This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

QA
152
.P53

43.

44.

Anfangsgründe der Algebra

nebst einer

Sammlung von Beispielen zusammengesetzter Aufgaben

aus der

praktischen Rechenkunst

zur

Übung der algebraischen Auflösungskunst

zum

Gebrauche für Lehrer und zum Selbstunterrichte für Schüler, die mit der gewöhnlichen Rechenkunst vertraut sind

von

J. A. L. Richter,

Conrector an der Herzogl. Hauptschule in Deßau.

Erster Theil.

Deßau 1822.

Bei Chr. Georg Ackermann.

QA
152
M53

Herrn

Gerhard Ulrich Anton Vieth

Herzogl. Anhalt-Deßauischem Schulrathe
und Professor der Mathematik,

seinem

Hochverehrten Lehrer

widmet dieses Werk

hochachtungsvoll und als geringen Beweis seiner
Dankbarkeit

der Verfasser.

Arit. u. Alg.
Seibel
9-24-30
2354
t.

Vorwort.

Ich bediente mich bei meinem Unterricht im praktischen Rechnen öfters zusammengesetzter Aufgaben aus der Regeldetri, wie man sie im gegenwärtigen Buche findet, um das Nachdenken der Schüler im Selbstfinden der Auflösung zu üben. Dieses glückte bei vielen, wenigstens in solchen Fällen, wo die Aufgabe nicht zu verwickelt war, und ich hatte so dem bloß mechanischen Rechnen der gewöhnlichen Regeldetri-Exempel so ziemlich ein Ziel gesetzt. In mehrern Fällen aber mußte ich die Auflösung den Schülern sagen, und da ich keine Kenntniß der allgemeinen Arithmetik voraussetzen konnte, so war es nicht immer möglich, ihnen die Gründe des Verfahrens ganz begreiflich zu machen; ich mußte mich wieder begnügen, wenn sie die Auflösung im Gedächtniß behielten. Fähigere Schüler kamen indessen nicht selten privatim zu mir und baten um die Erklärung der gegebenen Auflösung. Ich suchte ihnen dann den Gebrauch der Buchstaben, als allgemeiner Zahlzeichen, begreiflich zu machen und zu zeigen, wie man durch diese die Lösung solcher Aufgaben leicht finden und zugleich eine Einsicht in die Gründe des Verfahrens sich verschaffen könnte. Dadurch glückte es mir, bei immer mehr Schülern Interesse für die allgemeinen Lehren der Arithmetik zu erregen, und seit der Trennung unserer Hauptschule in zwei Abtheilungen: Gelehrte und Bürger-Schule, war es

mir, dem vom Herrn Director de Marées erhaltenen Auftrage zufolge, möglich, in der ersten Klasse der Bürgerschule diese allgemeine Arithmetik selbst vorzutragen und so die Schüler zum mathematischen Rechnen zu gewöhnen. In dieser Zeit erhielt ich von mehrern jungen Schulmännern, die zum Theil bei mir den arithmetischen Kursus gemacht hatten, die Aufforderung, doch eine Sammlung von solchen zusammengesetzten Aufgaben, wie sie bei mir gerechnet hätten, zu veranstalten und die Gründe der Rechnung dabei zu entwickeln. Die Sache schien mir nicht unnütz und ich entschloß mich zur Ausführung. Anfangs wollte ich nur Exempel geben und die Auflösung vermittelst des Gebrauchs der Buchstaben zeigen. Aber bald fand ich, daß hierbei zu viel Schwierigkeiten mir entgegenstanden, wenn ich die Kenntniß der allemeinen Arithmetik nicht voraussetzen wollte. Daß ich aber dieses bei den Meisten, welche das Unternehmen gewünscht hatten, nicht konnte, war mir bekannt, mithin ward ich gezwungen, meinen Plan in so fern abzuändern, daß ich den Beispielen eine Entwickelung der Lehren der Arithmetik vorauszusetzen beschloß. Ich setzte die Kenntniß der Bruchrechnung und, wie ich auch mit Recht thun zu können glaubte, selbst der Dezimalbrüche voraus, und bearbeitete nun das Ganze gerade zu als eine Anleitung zur Algebra, indem ich mit Entwickelung der Buchstabenrechnung und der Lehre von entgegengesetzten Größen den Anfang machte. Ich suchte nun diese allgemeine Arithmetik so zu bearbeiten, daß sie für den fähigen Schüler, so wie für den angehenden Lehrer, ohne Beihülfe mündlicher Anleitung, verständlich sein konnte, und mein innigster Wunsch ist, daß mir dieses gelungen sein möchte. Habe ich diesen Zweck nicht ganz verfehlt, so verdanke ich es dem trefflichen Unterrichte des Herrn Schulrath Vieth, dessen Verdienste um die Mathematik schon längst von dem Publikum anerkannt worden sind. Selbst sein Schüler in dieser

ersten aller Wissenschaften, kann ich nicht umhin, diese Gelegenheit zu benutzen, um ihm öffentlich meinen Dank für die Ausbildung der wenigen, mir von der Natur geschenkten Anlagen zur Mathematik abzustatten. Leider verbot mir die Nothwendigkeit, mich dem mathematischen Studium ganz zu widmen, aber den reinen Geistesgenuß, den mir die Beschäftigung mit demselben doch so reichlich verschafft hat, verdanke ich ihm, und so möge denn er mir verzeihen, daß ich seinen Namen in einem Werke nenne, das des Unvollkommenen gewiß noch viel an sich hat.

Bei der Darstellung der allgemeinen Arithmetik bin ich größtentheils dem Gange gefolgt, den mein verehrter Lehrer in seinen mathematischen Lehrbüchern genommen hat. Ich konnte nichts davon weglassen, wenn die folgenden Aufgaben ganz verständlich werden sollten, und so mußte denn auch die Lehre von Potenzen, Progressionen und Logarithmen mit durchgenommen werden, weil besonders in der Folge noch Aufgaben vorkommen, deren Lösung nur dadurch verständlich werden kann. Das, was über Kombinationen und figurirte Zahlen gesagt worden ist, hätte vielleicht wegbleiben können, aber diese Materie selbst schien mir so interessant und auch für das praktische Leben so brauchbar, daß ich mich nicht entschließen konnte, sie ganz zu übergehen. Der Gebrauch der Logarithmen aber verdiente eigentlich durchgängig in Schulen eingeführt zu werden, da sie in so vielen Fällen die Rechnung erleichtern und abkürzen.

Nach Beendigung der allgemeinen Arithmetik folgt nun mit S. 220. die eigentlich von mir bezweckte Entwickelung verschiedener Rechnungsaufgaben vermittelst der Kunstgriffe der Algebra. Es ist hier in der Anordnung der Rubriken ein Versehen von mir begangen worden, das ich leider zu spät erst wahrnahm. Anstatt der Überschrift: „Vierter Abschn. Rechnung mit algebraischen Gleichungen,“

Seit

Viertes Kapitel. Vom Ausziehen der Kubikwurzel aus zusammengesetzten Zahlen 6
Aus ganzen Zahlen 6
Aus Brüchen 7

Dritter Abschnitt.

Lehre von Verhältnissen, Kombinationen, figurirten Zahlen und Logarithmen.

Erstes Kapitel. Über die Begriffe: Verhältniß und Proportion 7
Zweites Kapitel. Von arithmetischen Verhältnissen und Proportionen 8
Drittes Kapitel. Von geometrischen Verhältnissen und Proportionen 86
Von einfachen Verhältnissen und Proportionen . . 86
Von zusammengesetzten Verhältnissen und Proportionen 102
Viertes Kapitel. Von Progressionen 126
Von Progressionen überhaupt 126
Von arithmetischen Progressionen 128
Von geometrischen Progressionen 132
Von der Summirung unendlich abnehmender Reihen 138
Fünftes Kapitel. Einiges von Kombinationen . . . 160
Sechstes Kapitel. Einiges über figurirte Zahlen . . . 181
Siebentes Kapitel. Von Logarithmen und ihrem Gebrauche 200

Vierter Abschnitt

(richtiger: Zweiter Theil.)

Rechnung mit algebraischen Gleichungen.

Allgemeine Erklärung und Regeln 220
Erklärung 220
Regeln zur Auflösung algebraischer Gleichungen . . 223
In Beziehung auf Gleichungen des ersten Grades . 223
Mit Einer unbekannten Größe 223
Mit zwei oder mehrern unbekannten Größen . . 233
Allgemeine Bemerkungen 233
Methode der Substitution 234
Methode der Kombination 236
Methode der Addition und Subtraktion . . . 239
Anwendung der gegebenen Regeln in Rechnungsaufgaben 247
Aufgaben mit Einer unbekannten Größe 247
Aufgaben mit zwei unbekannten Größen 282

Erster Theil.

Vorerinnerungen aus der allgemeinen Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Über Buchstabenrechnung und entgegengesetzte Größen.

Erstes Kapitel.

Über den Gebrauch der Buchstaben im Allgemeinen.

§. 1.

Vorbemerkung.

Die Rechnung mit Buchstaben scheint dem Nichtmathematiker schwieriger, als sie es in der That ist. Einige Kenntniß davon sollte jeder Rechenschüler haben, nicht nur, weil dadurch fast jede Rechenaufgabe bequemer aufgelöst und selbst in schwierigen Fällen Rath geschafft werden kann, sondern weil auch nichts mehr dazu beiträgt, den Verstand zu schärfen und das Nachdenken zu üben. Sie ist eine wahre Propädeutik des logischen Denkens. Nur zu gewöhnlich wird das sogenannte praktische Rechnen in Schulen gedankenlos getrieben und darum versagt es so oft seinen Beistand, wenn eine etwas combinirte Aufgabe zu lösen ist.

§. 2.
Erklärung.

Buchstabengrößen sind nichts anders, als allgemeine Zahlzeichen statt der bestimmten gewöhnlichen Ziffern. So drückt man sich auch oft im gemeinen Leben unbestimmt und allgemein aus, wenn man sagt: Wenn ich so und so viel Geld hätte, so könnte ich so und so viel kaufen. Dieses so und so viel bezeichnet nun der Mathematiker durch irgend einen Buchstaben und sagt z. B., wenn ich a Thaler hätte, so könnte ich b Ellen kaufen. Es kann also a und b jede mögliche bestimmte Zahl bedeuten, und es ist einleuchtend, daß alles das, was von a und b gilt, auch für jede bestimmte Zahl gelten müsse, die man dafür setzen will. Sage ich z. B. a ist doppelt so groß als b, so muß ich auch für a und b die Zahlen so wählen, daß dieses der Fall ist. Setze ich z. B. a = 10, so muß nothwendig b = 5 sein.

§. 3.
Willkührlicher Satz.

Es ist eingeführt, daß man die bekannten Größen in einer Rechenaufgabe durch die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets (a, b, c, d, e ꝛc.), die unbekannten durch die letztern (v, w, x, y, z) ausdrückt. In der Aufgabe: 3 Ellen kosten 4 Thaler, was kosten 9 Ellen? sind 3 Ellen, 4 Thaler, 9 Ellen bekannte Größen, der Preis der letztern aber unbekannt. Wenn man also die Größen im Allgemeinen bezeichnet, so sagt man: a Ellen kosten b Thaler, was kosten c Ellen? Setzt man nun den unbekannten Preis der c Ellen gleich x, so ergibt sich der Aufsatz: a Ellen verhält sich zu b Thaler, wie c Ellen zu x Thaler. Die letztern x Thaler findet man nun durch die Rechnung.

Statt a, b, c hätte auch jeder andere der ersten Buchstaben des Alphabets gewählt werden können, denn dies ist ganz willkührlich, also z. B.

m Ellen kosten d Thaler, was kosten q Ellen?

Eben so hätten auch statt x die Größen y, z, v, w u. s. w. gesetzt werden können.

§. 4.
Vorbemerkung.

Die Rechnung mit Buchstaben ist von der mit Zahlen eigentlich nicht abweichend, außer daß sie gewöhnlich nur angedeutet, nicht so, wie mit Zahlen, wirklich ausgeführt werden kann.

Dies Letztere geschieht dann, wenn man statt der Buchstaben ihre Werthe, d. h. die bestimmten Zahlen, setzt, welche sie bedeuten sollen. Aber eben dadurch, daß man die Ausführung der Rechnung nur andeutet, gelangt man zur Kenntniß allgemeiner Regeln für die Behandlung aller ähnlichen Aufgaben. Man lernt abstrakt denken und wird ein wirklicher, nicht bloß mechanischer Rechner.

§. 5.
Erklärung.

Da durch Buchstaben jede Rechnung nur angedeutet, nicht vollständig ausgeführt werden kann, so muß man sich gewisse Zeichen merken, wodurch die verschiedenen Rechnungsoperationen angezeigt werden. Diese Zeichen mit ihren Namen sind folgende:

1) Das Zeichen der Gleichheit zweier Größen (= äqual, gleich), welches, zwischen zwei Größen gesetzt, bedeutet, daß die eine eben so groß ist, als die andere, z. B. a = b; 1 thlr. = 3 Fl.

2) Das Zeichen der Addition zweier Größen (+ plus, mehr, und), welches, zwischen zwei Größen gesetzt, bezeichnet, daß dieselben addirt werden sollen, z. B. a + b. Ist a = 5, b = 4, so ist a + b = 5 + 4 = 9. Durch a + b ist die Addition nur angedeutet, durch 5 + 4 = 9 aber ausgeführt. Die Zahl, welche den addirten Größen zusammengenommen gleich ist, heißt die Summe.

Es ist einerlei, ob man schreibt a + b oder b + a; 5 + 4 oder 4 + 5. So auch bei mehrern Zahlen.

Statt	a	+ b	+ c	+ d	
kann ich schreiben	b	+ a	+ c	+ d	
	b	+ c	+ a	+ d	
	c	+ b	+ d	+ a	

u. s. w.

3) Das Zeichen der Subtraktion (— minus, weniger), welches, zwischen zwei Größen gesetzt, bedeutet, daß die an der rechten Seite von der an der linken abgezogen werden soll. Die erstere heißt der Subtrahendus, die letztere der Minuendus. Z. B. a — b. Ist a = 12; b = 8, so ist a — b = 12 — 8 = 4. Dieses Übrigbleibende heißt der Rest, der Unterschied, die Differenz. Die Stellung der Größen ist hier nicht willkührlich. Der Minuendus muß immer links, der Subtrahendus rechts vom Zeichen stehen; denn a — b, 12 — 8 ist eine ganz andere Größe, als b — a, 8 — 12.

Soll ich also bezeichnen 9 von 15 abgezogen, bleibt 6, so m ich schreiben $15 - 9 = 6$.

4) Das Zeichen der Multiplikation (. oder × mal), welches, zwischen zwei Größen gesetzt, bedeutet, daß bei mit einander multiplizirt werden sollen. Die zu multiplizirend Zahlen heißen die Faktoren, der eine der Multiplikandu der andere der Multiplikator, je nachdem ich den ein Faktor, als die Zahl, welche multiplizirt werden soll, oder a die, mit welcher ich die andere multiplizire, betrachten will. Di kann man annehmen, wie man will, denn 6.8 oder 6×8 eben so viel, als 8.6 oder 8×6. Die Zahl, welche durch d Multipliziren herauskommt, heißt das Produkt, z. B. 48 dem gegebenen Beispiele. Bei Buchstaben pflegt man, wenn nicht andere Umstände nothwendig machen, das Multiplikation zeichen wegzulassen und sie unmittelbar neben einander zu schreibe z. B. ab oder ba bedeutet, daß a mit b oder b mit a multiplizi werden soll.

5) Das Zeichen der Division. Hier ist zuvörde zu bemerken, daß man die Zahl, welche dividirt werden soll, d Dividendus, die Zahl aber, durch welche eine andere divid wird, den Divisor und die Zahl, welche anzeigt, wie oft Divisor im Dividendus enthalten sey, den Quotienten nen Das Zeichen der Division ist nun entweder (:), welches zwisch Dividendus und Divisor so gesetzt wird, daß ersterer link letzterer rechts vom Zeichen steht, oder ein Querstrich zwisch Dividendus und Divisor, so daß ersterer über, letzterer un denselben gestellt wird, also gerade so, wie die bekannte Bru bezeichnung. Man lieset beide Zeichen: dividirt durch, z. $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ bedeutet, daß a durch b dividirt werden soll. E Verwechslung in der Stellung darf nicht Statt finden. St $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ darf man nicht schreiben $b : a$ oder $\frac{b}{a}$, wenn Sinn ist, daß a durch b dividirt werden soll, denn $8 : 4$ oder ist ganz etwas anderes, als $4 : 8$ oder $\frac{4}{8}$. Gebraucht man Bruchbezeichnung, so muß der Querstrich mit der ganzen Z in Eine Linie kommen und der Dividendus über und der Divi unter dieser Linie stehen, also z. B. $a + \frac{p}{q}$, nicht $a + \frac{p}{a}$ o $a + \frac{p}{q}$.

6) Das Zeichen der Ungleichheit (>), welches bedeutet, daß eine Zahl größer oder kleiner als eine andere ist. Man setzt es so, daß die größere Zahl der Öffnung, die kleinere der Spitze gegenüber steht und lieset es nach Beschaffenheit der Umstände: ist größer, oder ist kleiner, z. B. a > b wird gelesen: a ist größer als b, a < b aber: a ist kleiner als b.

7) Die Klammer, welche bedeutet, daß eine Rechnungsoperation sich auf mehrere durch + oder — verbundene Größen gemeinschaftlich beziehen soll. Diese letztern werden alsdann in eine Klammer geschlossen und die Größe, welche auf die eingeschloßnen wirken soll, vor oder hinter die Klammer gesetzt, z. B. (a + b) m oder m (a + b) bedeutet, daß die Summe von a und b, oder daß sowol a als b mit m multiplizirt werden soll. Besteht die Größe, mit welcher man auf die in die Klammer eingeschloßnen gemeinschaftlich operiren will, auch aus mehrern durch + und — verbundenen Theilen, so muß sie ebenfalls in eine Klammer geschlossen werden, z. B. (a + b) . (m + q) bedeutet, daß die Summe von a und b mit der Summe von m und q multiplizirt werden soll, oder daß man die Größe a mit m und q, und die Größe b auch mit m und q zu multipliziren habe.

Mehreres über den Gebrauch der Klammer wird weiter unten vorkommen.

Eine Klammer auflösen heißt, die angezeigte Rechnungsoperation wirklich verrichten, so daß nun das Zeichen der Klammer weggelassen wird, z. B. m (a + b) wird aufgelöst, wenn man wirklich a und b mit m multiplizirt; es kommt heraus ma + mb. Eben so gibt (a + b) . (m + q) die Produkte ma + mb + qa + qb.

Es kann auch eine Klammer in einer Klammer vorkommen, in welchem Falle man die äußere durch [ ] und die innere durch ( ) bezeichnet, z. B. a [m + q (b + c) + d]. Dann löst man erst die innere Klammer auf und schreibt a (m + qb + qc + d) und nun das Ganze, wodurch man erhält am + aqb + aqc + ad.

Folgende Größenreihe wird sich jetzt erklären lassen:

$$\frac{(a+b-c)\,.\,(m-q+r)}{m\,(a-b+d)} = \frac{s}{t}\,.\,[f+g\,(h-i)]$$

Dies heißt nämlich: Man soll a und b addiren, von der Summe c abziehen und den Rest mit dem Unterschiede von m und q, nachdem noch r dazu addirt worden ist, multipliziren, das Produkt aber dividiren durch eine Zahl, welche gefunden wird, wenn man den Unterschied von a und b zu d addirt und die gefundene Summe mit m multiplizirt. Der herausgekommene

Quotient ist dann eben so groß, als das, was herauskommt, wenn man die Zahl s durch t dividirt und den Quotienten mit einer Zahl multiplizirt, welche gefunden wird, wenn man den Unterschied von h und i mit g multiplizirt und das Produkt zu a addirt. Es sei

a = 8 m = 12 d = 4 f = 13 i = 24
b = 3 q = 6 s = 16 g = 7
c = 5 r = 24 t = 192 h = 11

so läßt sich obige Buchstabenreihe in Zahlen so ausdrücken:

$$\frac{(8+3-5)\cdot(12-6+24)}{12\,(8-3+4)} = \frac{16}{192}\cdot[13+7\,(11-10)]$$

Es ist aber

$8+3-5 = 6$; $12-6+24 = 30$, also
$(8+3-5)\cdot(12-6+24) = 6\cdot 30 = 180$.

Ferner

$8-3+4 = 9$ und $12\,(8-3+4) = 12\cdot 9 = 108$,

also $\frac{(8+3-5)\cdot(12-6+24)}{12\,(8-3+4)} = \frac{180}{108} = 1\frac{2}{3}$.

Eben das kommt auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens heraus; denn es ist:

$11-10 = 1$, also $7\,(11-10) = 7\cdot 1 = 7$, also
$13+7\cdot(11-10) = 13+7 = 20$, und daher
$\frac{16}{192}\cdot[13+7\,(11-10)] = \frac{16}{192}\cdot 20 = \frac{320}{192} = 1\frac{2}{3}$.

§. 6.
Erklärung.

Wenn eine Größe mit einer andern multiplizirt ist, so nennt man eine von beiden den Koeffizienten der andern, z. B. in dem Ausdrucke ma ist m der Koeffizient von a, oder auch a der Koeffizient von m, in welchem letztern Falle aber man lieber am schreibt; denn der Koeffizient steht gern vor der Größe, welche er vervielfältigen soll. Steht eine Größe ohne beigesetzten Koeffizienten, so ist dieser allemal = 1, denn 6 ist = 1 . 6, also a auch = 1a. Man kann sich daher jede Größe als ein Produkt aus zwo Faktoren vorstellen; der eine ist die Größe selbst, der andere entweder irgend eine angegebene Zahl, oder 1.

§. 7.
Erklärung.

Eine Buchstabengröße heißt einfach, wenn sie entweder nur aus Einem Buchstaben besteht, oder ein Produkt aus

mehrern Buchstaben, oder ein Bruch (Quotient) ist, z. B. a, q, ab, mrn, $\frac{a}{b}$, $\frac{mn}{qr}$.

Eine Buchstabengröße aber heißt zusammengesetzt oder komplex, wenn sie aus mehrern durch + oder —, d. h. durch Addition oder Subtraktion verbundenen Theilen besteht, z. B. a + b; q — c + d; mn + pq — rs. Eine zweitheilige Größe nennt man ein Binomium, z. B. a + b; eine dreitheilige Trinomium, z. B. a — b + c, eine viertheilige, d. h. überhaupt eine, die mehr als zwei Theile hat, Polynomium.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Grundsätze in Beziehung auf die folgenden Rechnungen.

§. 8.

1) Jede Größe ist sich selbst gleich. Es ist offenbar a = a und m = m.

2) Wenn zwei Größen einerlei dritten Größe gleich sind, so sind sie einander selbst gleich. Wenn Cajus so viel Geld hat als Lucius, und Sempronius auch so viel als Lucius, so muß offenbar auch Cajus so viel Geld als Sempronius haben. Wenn ich daher weiß,

daß 2 thlr. = 3 Fl. — Oder daß a = b
und 2 thlr. = 48 gr. ist, — und a = q ist,
somüss. auch 3 Fl. = 48 gr. sein. — so muß auch b = q sein.

3) Gleiches zu Gleichem addirt, gibt gleiche Summen. Wenn Cajus und Sempronius jeder 8 gr. hat und jeder bekommt 4 gr. dazu, so haben beide auch jetzt wieder gleich viel. Also auch im Allgemeinen,

wenn a = b ist
und addirt wird m = m
so ist a + m = b + m.

4) Das Gleiche zum Ungleichen, oder das Ungleiche zum Gleichen addirt, gibt da, wo das

Größere ist, mehr zur Summe, als da, wo das Kleinere ist.

Wenn $a > b$	Wenn $a = b$
und addirt wird $c = c$	und addirt wird $c > d$
so ist $a + c > b + c$.	so ist $a + c > b + d$.

5) Gleiches von Gleichem abgezogen, läßt Gleiches übrig. Wenn zwei Personen gleich viel Geld haben, und jede gibt so viel Geld aus, als die andere, so müssen beide gleich viel übrig behalten. Also im Allgemeinen,

wenn $a = b$
und von jedem abgezogen wird $q = q$
so ist $a - q = b - q$.

6) Das Ungleiche vom Gleichen abgezogen, gibt bei dem größern Subtrahendus weniger als bei dem kleinern zum Reste.

Wenn $a = b$	Wenn 2 thlr. = 48 gr.
und abgezogen wird $q > r$	u. abgez. wird 1 thlr. > 16 gr.
so ist $a - q < b - r$.	so ist der Rest 1 thlr. < 32 gr.

7) Das Gleiche vom Ungleichen abgezogen, läßt da, wo der größere Minuendus ist, mehr als bei dem kleinern zum Reste.

Wenn $a > b$	Wenn 3 thlr. > 52 gr.
u. von jed. abgez. wird $c = c$	u. v. jed. abg. wird 1 thlr. = 24 gr.
so ist $a - c > b - c$.	so ist 2 thlr. > 28 gr.

8) Um wie viel der Minuendus größer oder kleiner wird, um eben so viel wird auch der Rest größer oder kleiner. Wenn 8 von 15 abgezogen, zum Rest 7 gibt, so muß, wenn 15 um 2 größer, also = 17 wird, auch der Rest um 2 größer, oder = 9, und wenn 15 um 2 kleiner, also = 13 wird, auch der Rest um 2 kleiner, also = 5 werden. Also wenn im Allgemeinen $a - b = c$ ist, so muß $(a + d) - b = c + d$ und $(a - d) - b = c - d$ sein.

9) Um wie viel der Subtrahendus größer wird, um so viel wird der Rest kleiner und um wie viel der Subtrahendus kleiner wird, um so viel wird der Rest größer. Wenn $12 - 5 = 7$ ist und 5 wird um 3 größer, so wird der Rest um 3 kleiner, also = 4; wird aber 5 um 3 kleiner, so wird der Rest um 3 größer, also = 10, und im Allgemeinen, wenn $a - b = c$ ist, so ist $a - (b + d) = c - d$ und $a - (b - d) = c + d$.

10) Wenn Minuendus und Subtrahendus um gleich viel größer oder kleiner werden, ſo bleibt der Reſt ungeändert. Wenn $a - b = c$, ſo iſt auch $(a+d) - (b+d) = c$ und $(a-d) - (b-d) = c$. Iſt $a = 12$, $b = 4$, $d = 3$, ſo iſt $12 - 4 = 8$ und $(12+3) - (4+3) = 8$ und $(12-3) - (4-3) = 8$.

11) Gleiches mit Gleichem multiplizirt, gibt gleiche Produkte.

Wenn $a = b$
und jedes multiplizirt wird mit $m = m$
ſo iſt $am = bm$.

Es ſey $a = 6$ thlr. und $b = 9$ Fl., m aber $= 4$, ſo iſt $4 \cdot 6$ thlr. $= 4 \cdot 9$ Fl. oder 24 thlr. $= 36$ Fl.

12) Das Gleiche mit dem Ungleichen oder das Letztere mit dem Erſtern multiplizirt, gibt da, wo der größere Faktor iſt, auch ein größeres Produkt, z. B.

Wenn $a = b$ iſt
und mult. wird mit $c > d$
ſo iſt $ac > bd$.

Es ſei $a = 2$ thlr., $b = 3$ Fl., $c = 8$, $d = 5$, ſo iſt $8 \cdot 2$ thlr. $> 5 \cdot 3$ Fl.

Wenn $a > b$
und mult. wird mit $c = c$
ſo iſt $ac > bc$.

Es ſei $a = 2$ thlr., $b = 2$ Fl., $c = 4$, ſo iſt $4 \cdot 2$ thlr. $> 4 \cdot 2$ Fl.

13) Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt gleiche Quotienten.

Wenn $a = b$
und jedes dividirt wird durch $c = c$
ſo iſt $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Wenn 2 thlr. $= 48$ gr.
und jedes dividirt wird durch $8 = 8$
ſo iſt $\frac{1}{4}$ thlr. $= 6$ gr.

14) Wenn das Gleiche durch das Ungleiche dividirt wird, ſo kommt da, wo der größere Diviſor iſt, ein kleinerer Quotient, und umgekehrt.

Wenn $a = b$
und dividirt wird durch $c > d$
ſo iſt $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

Wenn 3 thlr. $= 72$ gr.
u. divid. wird durch $8 > 4$
ſo iſt $\frac{3}{8}$ thlr. < 18 gr.

15) Wenn das Ungleiche durch das Gleiche dividirt wird, so kommt da, wo der größere Dividendus ist, auch der größere Quotient, und umgekehrt.

Wenn $a > b$
und jedes dividirt wird durch $c = c$
so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Wenn 4 thlr. > 3 thlr.
und jedes dividirt wird durch 2 = 2
so ist 2 thlr. > $1\frac{1}{2}$ thlr.

16) So vielmal der Dividendus, bei unverändertem Divisor, größer oder kleiner wird, so vielmal wird auch der Quotient größer oder kleiner. Wenn $8 : 4 = 2$ ist, so ist $3 \cdot 8 : 4 = 3 \cdot 2$, und wenn $12 : 4 = 3$ ist, so ist $\frac{1}{4}2 : 4$ oder $3 : 4 = \frac{1}{4}3$; also auch allgemein, wenn $a : b = c$ ist, so ist $ma : b = mc$ und $\frac{a}{q} : b = \frac{c}{q}$.

17) So vielmal, bei unverändertem Dividendus, der Divisor größer oder kleiner wird, so vielmal wird der Quotient kleiner oder größer. Wenn $18 : 3 = 6$ ist, so ist $18 : 2 \cdot 3 = \frac{6}{2} = 3$, und wenn $24 : 8 = 3$ ist, so ist $24 : \frac{8}{4} = 4 \cdot 3 = 12$, also auch allgemein, wenn $a : b = c$ ist, so ist $a : mb = \frac{c}{m}$ und $a : \frac{b}{m} = cm$.

18) Wenn Dividendus und Divisor gleich vielmal größer oder kleiner werden, so bleibt der Quotient ungeändert. Wenn $8 : 4 = 2$ ist, so ist auch $4 \cdot 8 : 4 \cdot 4 = 2$, desgleichen $\frac{8}{2} : \frac{4}{2} = 2$, also wenn im Allgemeinen $a : b = c$ ist, so ist auch $ma : mb = c$ und $\frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ ebenfalls $= c$.

19) Was größer oder kleiner ist, als eine von zwei gleichen Größen, das ist auch größer oder kleiner, als die andere.

Wenn $a = b$
und $q > a$
so ist auch $q > b$.

Wenn $a = b$
und $m < a$
so ist auch $m < b$.

20) Wenn zu einem gebliebenen Reste der Subtrahendus wieder addirt wird, so muß di

Summe dem Minuendus gleich ſein. Wenn $12 - 8 = 4$ iſt, ſo iſt nothwendig $8 + 4 = 12$, denn was man weggenommen hat, ſetzt man wieder hinzu; alſo im Allgemeinen, wenn $a - b = c$ iſt, ſo iſt $c + b = a$, oder kürzer, es muß immer $a - b + b = a$ ſein.

21) Wenn das, was zu einer Größe addirt worden, von der Summe wieder weggenommen wird, ſo muß der Reſt der urſprünglichen Größe gleich ſein. Wenn $8 + 6 = 14$, ſo iſt $14 - 6 = 8$ und im Allgemeinen iſt alſo $a + b - b = a$.

Aus 20 und 21 folgt, daß Addition und Subtraktion ſich gegenſeitig zur Probe dienen.

22) Wenn ein aus zwei Faktoren beſtehendes Produkt durch den einen Faktor dividirt wird, ſo iſt allemal der Quotient dem andern Faktor gleich. Wenn $6 . 8 = 48$ iſt, ſo iſt offenbar $\frac{48}{6} = 8$ und $\frac{48}{8} = 6$. Alſo auch allgemein $\frac{ab}{a} = b$ und $\frac{ab}{b} = a$.

23) Wenn der Quotient mit dem Diviſor wieder multiplizirt wird, ſo muß das Produkt dem Dividendus gleich ſein. Wenn $\frac{12}{4} = 3$ iſt, ſo iſt $4 . 3 = 12$, alſo auch allgemein: wenn $\frac{ab}{a} = b$ iſt, ſo iſt auch b mit a multiplizirt $= ab$, wo denn die Einerleiheit des Produkts mit dem Dividendus gleich ins Auge fällt.

Aus 22 und 23 folgt, daß Diviſion und Multiplikation ſich gegenſeitig zur Probe dienen.

Noch einige andere Grundſätze werden weiterhin an ihrem Orte folgen.

Drittes Kapitel.

Über die Rechnung mit entgegengeſetzten Größen.

§. 9.

Vorbemerkung.

Um mit Buchſtabengrößen rechnen zu können, muß erſt die in der Überſchrift angezeigte Rechnung mit entgegengeſetzten Größen erklärt werden. Wenn ich den Ausdruck habe $a - b$ und ſetze

$a = 12$ und $b = 8$, so hat die Ausführung der angedeuteten Subtraktion keine Schwierigkeit, aber wenn umgekehrt $a = 8$ und $b = 12$ ist, so lehrt die gemeine Rechenkunst kein Mittel den verlangten Rest zu finden. Was derselbe aber in diesem Fall sei, ergibt sich aus folgenden Sätzen.

§. 10.
Erklärung.

Entgegengesetzte Größen sind solche, welche einander vermindern, wenn man sie zusammen bringt. Wenn jemand 8 thlr. im Vermögen und 5 thlr. Schulden hat, so hat er nicht 8 thlr. + 5 thlr., sondern 8 thlr. — 5 thlr. im Vermögen.

Die eine der entgegengesetzten Größen, welche man will, nennt man positiv, bejahend, und bezeichnet sie mit dem Zeichen + (Plus), die andere nennt man negativ oder verneinend und bezeichnet sie mit — (Minus). Sieht man Vermögen als etwas Positives an, so sind obige 8 thlr. Vermögen = + 8 thlr. und obige 5 thlr. Schuld = — 5 thlr. Vermögen.

Jede Zahl ist eine Menge von Einheiten. Positive Zahlgrößen also sieht man als wirkliche Mengen der positiven Einheit an; negative aber als Mengen so viel fehlender positiver Einheiten. Wer 8 thlr. im Vermögen hat, der hat wirklich 1 thlr. achtmal; wer aber 5 thlr. Schulden hat, dem fehlt 1 thlr. fünfmal. Positive Größen sind also wirklich vorhandene, negative wirklich fehlende oder negativ vorhandene Größen.

§. 11.
Zusatz.

Wenn man 3 von 7 abzieht, so bleibt wirklich 4 übrig; wenn man aber 7 von 3 abziehen soll, so ist offenbar, daß von dem Subtrahendus 7 nur 3 Einheiten gegen die 3 Einheiten des Minuendus sich aufheben, daß also vom Subtrahendus noch 4 Einheiten bleiben, welche man abziehen, d. h. als fehlende Größen betrachten soll. Jene 4 Einheiten, welche bleiben, wenn man 3 von 7 abzieht, sind also wirklich vorhandene, diese 4 aber, welche entstehen, wenn man 7 von 3 abzieht, sind 4 fehlende, d. h. 4 negativ vorhandene, folglich sind sie den erstern 4 gerade entgegengesetzt und nenne ich jene positiv, so muß ich diese negativ nennen. Also ist $7 - 3 = + 4$ und $3 - 7 = - 4$.

In gewisser Beziehung ist das Negative weniger als Nichts, nämlich weniger als Nichts von einer gewissen Art des Etwas. Hat z. B. jemand 3 thlr. Geld und 7 thlr. Schulden, so würde er offenbar nichts haben, wenn er bloß 3 thlr. Schulden hätte. Da er aber noch 4 thlr. mehr Schulden hat, so hat er offenbar 4 weniger, als gar kein Vermögen. An und für sich aber sind allerdings negative Größen auch ein wirkliches Etwas.

§. 12.

Zusatz.

Steht eine positive Größe allein, oder im Anfange einer Reihe mehrerer Größen, so läßt man das Zeichen + weg, wenn man nicht aus andern Gründen es besonders ausdrücken will. Eine Größe ohne Zeichen ist also allemal positiv, denn das negative Zeichen darf nie weggelassen werden.

Von der Addition entgegengesetzter Größen.

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn eine positive Größe zu einer andern positiven addirt wird, so ist kein Zweifel, daß die Addition wie gewöhnlich geschehe und die Summe positiv werde, denn man rechnet das Wirklichvorhandene zum Wirklichvorhandenen, also + 8 und + 4 ist = + 12. Eben so wenn eine negative zu einer andern negativen addirt werden sollen, so geschieht dies auch wie gewöhnlich, denn die fehlenden Einheiten werden wirklich dadurch vermehrt; wenn man andere fehlende dazu rechnet, die Summe wird aber offenbar negativ, weil sie aus lauter fehlenden Größen besteht, also — 7 und — 3 ist = — 10. Soll aber Positives und Negatives addirt werden, so tritt die Wirkung des Entgegengesetzten ein, das Eine wird durch das Andere vermindert und die Summe muß offenbar das Zeichen derjenigen Größe bekommen, welche die andere an Menge der Einheiten übertrifft, also + 7 und — 4 ist zusammen = + 3, desgleichen — 7 und + 4 = — 3.

§. 14.

Zusatz.

Was die Addition von Buchstaben betrifft, so gelten in Rücksicht der Zeichen die vorigen Regeln. In so fern es aber

Buchstaben, also allgemeine unbestimmte Zeichen für Größen, sind, kann die Addition entweder nur angedeutet, oder wirklich vollzogen werden. Das Erstere geschieht dann, wenn die Buchstabengrößen von einander verschieden sind. Denn soll ich a und b addiren, so kann ich die Summe auf keine Art anders als durch $a + b$ ausdrücken. Eben so ist die Summe von $-a$ und $-b = -a - b$, und die Summe von $+a$ und $-b = a - b$, desgl. die Summe von $-a$ und $+b = -a + b$ oder (da man gern das Positive voransetzt) $= b - a$.

Wirklich vollzogen kann die Addition werden, wenn die Buchstabengrößen einerlei sind. Alsdann addirt man die Koeffizienten und setzt neben deren Summe die gemeinschaftliche Buchstabengröße, z. B. $3a + 5a = 8a$ (gerade so wie 3 thlr. und 5 thlr. zusammen 8 thlr. machen); $a + 2a = 3a$ (weil von a der Koeffizient $= 1$ ist); $q + q = 2q$. Desgleichen $5a$ und $-3a = 2a$; $4a - 9a = -5a$.

Beispiel.

Man addire

$$\begin{array}{r} 7a - 3b + 2c - 4d + e \\ -3a + 6b + 8c - 3d - 4e \\ -8a + 4b - 9c + 7d - 5e \\ 6a - 8b + 5c - 4d + 8e \\ \hline 11a + 3b - 2c + 9d - 6e \end{array}$$

Summe $= 13a + 2b + 4c + 5d - 6e$.

Von der Subtraktion entgegengesetzter Größen.

§. 15.

Lehrsatz.

Wenn überhaupt Größen von einander abgezogen werden sollen, so sind vier Fälle in Beziehung auf die Zeichen möglich. Man kann entweder positive von positiven, oder negative von negativen, oder positive von negativen, oder negative von positiven Größen abziehen. Wir wollen sehen, was in allen diesen Fällen geschehen muß.

1) Wenn eine positive Größe von einer positiven abgezogen werden soll, so werden wirklich so viel Einheiten, als der Subtrahendus enthält, von dem Minuendus weggenommen, d. h. man betrachtet die Menge der Einheiten des Subtrahendus im Minuendus als fehlend, oder als negativ. Gesetzt es soll

$+5$ von $+8$ abgezogen werden, so heißt dies: Man betrachte in den 8 wirklich vorhandenen Einheiten 5 als fehlend oder negativ, und also ist 5 von 8 abgezogen eben so viel als $8-5$, d. h. $+5$ von $+8$ abziehen, ist so viel als -5 zu 8 addiren. Was nun von $+8$ noch übrig bleibt, ist der Rest oder Unterschied. Eben so wenn $+8$ von $+5$ abgezogen werden soll, so heißt das: man rechne 8 fehlende Einheiten mit den 5 vorhandenen zusammen, also kommt wiederum $+5-8$ und der Rest ist $=-3$.

2) Soll eine negative Größe von einer negativen Größe abgezogen werden, z. B. -5 von -8, so heißt das: man betrachte unter den 8 fehlenden Einheiten 5 als nicht fehlend; aber wenn 5 Einheiten nicht fehlen, so heißt das offenbar: unter den 8 fehlenden Einheiten sind 5 wirklich vorhanden, also ist -5 von -8 abgezogen so viel als -8 und $+5$, d. h. so viel als $+5$ zu -8 addirt, und der herauskommende Rest ist $=-3$. Eben so wenn -8 von -5 abgezogen werden soll, so ist $-5=5$ fehlenden Einheiten, und -8, d. h. 8 fehlende Einheiten wegnehmen, heißt erklären: daß 8 Einheiten nicht fehlen, d. h. daß sie wirklich da sein sollen, also ist -8 von -5 abgezogen $=-5+8=+3$. Man betrachte die rechte Seite einer Wage als positiv, die linke als negativ. In der linken Schale mögen 8 Pfund liegen; nimmt man nun davon 5 Pfd. weg, d. h. zieht man -5 ab, so hat dies eben die Wirkung auf die Bewegung der Wage, als ob man auf die rechte Seite 5 Pfd. in die Schale gelegt, d. h. als ob man $+5$ zu -8 addirt hätte. Eben so, wenn in der linken Schale 5 Pfd. lägen, und man sollte aus derselben 8 Pfd. wegnehmen, so würde dies dadurch möglich sein, daß man in die rechte Schale 8 Pfd. legte. Dies hat offenbar auf die Bewegung der Wage die nämliche Wirkung und die rechte Schale bekommt dadurch ein Übergewicht von 3 Pfd., d. h. -8 von -5 abgezogen, ist $=+8-5=+3$.

3) Wenn eine negative Größe von einer positiven abgezogen werden soll, z. B. -5 von $+8$, so heißt das: ich soll 5 fehlende Einheiten wegnehmen, d. h. ich soll mir das Fehlende als nicht fehlend, also zu den 8 vorhandenen Einheiten noch 5 als vorhanden denken, d. h. -5 wird von $+8$ abgezogen, wenn man $+5$ zu $+8$ addirt. Der Unterschied zwischen $+8$ und -5 ist $=+13$. Nehmen wir wieder das Bild einer Wage. In der rechten Schale mögen 8 Pfd., in der linken 5 Pfd. liegen. Nimmt man nun diese letztern weg, so hat dies eben die Wirkung auf die Wage, als ob in die rechte Schale noch 5 Pfd. zugelegt worden wären, also, als ob 13 Pfd. in dieser Schale wirkten.

4) Wenn eine positive Größe von einer negativen weggenommen werden soll, z. B. +5 von −8, so heißt das: man soll außer den 8 schon fehlenden Einheiten auch noch 5 als fehlend betrachten, und also wird die Differenz dadurch gefunden, daß man zu den 8 fehlenden Einheiten noch 5 fehlende rechnet, d. h. +5 von −8 abgezogen ist = −5 −8 = −13. Liegen in der rechten Schale 5 Pfd. und in der linken 8 Pfd., so hat das Wegnehmen der 5 Pfd. eben die Wirkung auf die Wage, als ob in die linke Schale noch 5 Pfd. gelegt worden wären.

Es ist also bewiesen, daß

+5 von +8 abgezogen so viel ist als −5 zu +8 addirt, = +3
−5 = −8 = = = = = = +5 = −8 = = −3
−5 = +8 = = = = = = +5 = +8 = = +13
+5 = −8 = = = = = = −5 = −8 = = −13

Es ist also überhaupt bewiesen, daß, eine Größe von der andern abziehen, so viel heiße, als das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addiren.

Eben so kann man auch umgekehrt sagen:

−5 zu +8 addiren, ist so viel als +5 von +8 abziehen, Summe = +3
+5 = −8 = = = = = = −5 = −8 = = = −3
+5 = +8 = = = = = = −5 = +8 = = = +13
−5 = −8 = = = = = = +5 = −8 = = = −13

§. 16.
Zusatz.

Addiren und Subtrahiren ist also ganz einerlei. Eine Größe abziehen, heißt: die entgegengesetzte addiren, und eine Größe addiren, heißt: die entgegengesetzte abziehen.

Daraus fließt also folgende Regel für die Lehre von der Subtraktion:

Wenn Größen von einander abgezogen werden sollen, so verwandele man die Zeichen im Subtrahendus in die entgegengesetzten und addire dann.

Es ist also +8 −5 +3 −2 +6, abgezogen von −7 +9 −5 −4 +8 so viel als −8 +5 −3 +2 −6 addirt zu −7 +9 −5 −4 +8 und die Rechnung folgende, wenn man im Subtrahendus die untern Zeichen für die ursprünglichen, die darüber stehenden für die verwandelten nimmt.

Minu-

$$\begin{array}{rl} \text{Minuendus} = & -7+9-5-4+8 \\ \text{Subtrahendus} = & \mp 8 \pm 5 \mp 3 \pm 2 \mp 6 \\ \hline \text{Rest} = & -15+14-8-2+2. \end{array}$$

§. 17.

Zusatz.

Da also Subtraktion und Addition in der Rechnung nicht verschieden sind, so gelten in Rücksicht der Buchstaben auch für die Subtraktion alle die Bemerkungen, die wir schon bei der Addition gemacht haben.

Beispiel.

$$\begin{array}{rl} \text{Minuendus} = & 4a-3b+5c-d+e-2f \\ \text{Subtrahendus} = & \mp 7a \mp 5b \pm 3c \pm 2d \mp 8e \pm 6f \mp g \\ \hline \text{Differenz} = & -3a-8b+8c+d-7e+4f-g. \end{array}$$

§. 18.

Zusatz.

Will man anzeigen, daß eine aus mehrern Theilen bestehende Größe von einer andern abgezogen werden soll, so muß man diese Größe in eine Klammer schließen und das Subtraktionszeichen vorsetzen, z. B. von $p+q-r$ soll abgezogen werden $2p-3q+2r$; dieses schreibt man

$$p+q-r-(2p-3q+2r).$$

Verwandelt man nun nach der obigen Regel die Subtraktion in Addition, so bleibt die Klammer weg, und die Subtraktion ist vollzogen, also kommt

$$p+q-r-2p+3q-2r=-p+4q-3r.$$

§. 19.

Zusatz.

Ist aber der Subtrahendus ein Bruch, so bleibt die Klammer weg, z. B. $q-\frac{2p+r-c}{m}$, heißt: $\frac{2p+r-c}{m}$ soll von q abgezogen werden.

Um in diesem Falle die Subtraktion in Addition zu verwandeln, muß man erst den Bruch in seine Theile auflösen, d. h. unter jeden Theil des Zählers den gemeinschaftlichen Nenner m setzen. Denn so wie z. B. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{3+1+5}{8}=\frac{9}{8}$, so ist auch $\frac{9}{8}=\frac{3+1+5}{8}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}$. Also $q-\frac{2p+r-c}{m}=q-\left(\frac{2p}{m}+\frac{r}{m}-\frac{c}{m}\right)$, und jetzt die Subtraktion in

Addition verwandelt, kommt $q - \frac{2p}{m} - \frac{r}{m} + \frac{c}{m}$. Bringt man nun q auf den Nenner m, so erhält man:

$$\frac{mq}{m} - \frac{2p}{m} - \frac{r}{m} + \frac{c}{m} = \frac{mq - 2p - r + c}{m}$$

§. 20.

Einige Beispiele zur Addition und Subtraktion der Buchstabengrößen.

1) Man addire zu $3a - \frac{2}{3}b + 3c - d$ die Größen $5b - \frac{3}{4}a + \frac{3}{8}c - 5d$ und $\frac{5}{6}a - 3d + \frac{3}{4}c - 7b$ und $\frac{5}{6}d - \frac{5}{8}a + \frac{4}{5}c - \frac{4}{5}b$ und $4\frac{4}{5}d - 7c + 3a - 2\frac{2}{3}b$.

2) Man addire zu $3f - 7a + \frac{3}{4}d + 5b$ die Größen $5\frac{1}{2}a - 3\frac{3}{4}f + 7\frac{2}{3}c - 8\frac{3}{4}g + 2b$ und $6\frac{1}{4}d - 3\frac{1}{5}a + 7\frac{5}{8}f - 6\frac{2}{3}g$ und $5\frac{1}{2}c - 2\frac{1}{2}d + \frac{3}{4}b - 4\frac{2}{3}a$ und $2\frac{1}{3}g - 8\frac{1}{6}b + 4\frac{2}{3}c - 3\frac{3}{4}d$.

3) Es gibt jemand folgende Summen aus: 1) 25 thlr. — 3 gr. + 8 pf.; 2) 17 thlr. + 18 gr. — 10 pf.; 3) 8 thlr. — 15 gr. — 4 pf.; 4) 7 thlr. + 20 gr. — 5 pf.; 5) 10 thlr. — 14 gr. — 7 pf.; 6) 12 thlr. + 16 gr. + 9 pf. Wie viel beträgt dies zusammen?

4) Es hat jemand eingenommen: 1) 30 thlr. — 20 gr. + 6 pf.; 2) 45 thlr. + 17 gr. — 8 pf.; 3) 15 thlr. — 16 gr. + 8 pf.; 4) 27 thlr. — 13 gr. — 9 pf. Seine Ausgaben aber betragen: 1) 40 thlr. — 20 gr. — 4 pf.; 2) 18 thlr. — 7 gr. + 8 pf.; 3) 6 thlr. + 18 gr. — 9 pf.; 4) 13 thlr. + 19 gr. + 5 pf. Wie viel behält er übrig?

Da die Ausgaben von den Einnahmen abgezogen werden müssen, um den Rest zu finden, so addire man sie nach der Regel mit den entgegengesetzten Zeichen zu den Einnahmen.

5) Es hat jemand eingekauft: 1) 78 Ztn. + 75 Pfd. — 24 Lth. + 3 Qt.; 2) 36 Ztn. — 68 Pfd. + 21 Lth. — 2 Qt.; 3) 35 Ztn. + 37 Pfd. — 18 Lth. — 1 Qt.; 4) 46 Ztn. — 28 Pfd. + 5 Lth. — 3 Qt.; 5) 7 Ztn. + 98 Pfd. — 28 Lth. — 3 Qt. Davon verkauft er: 1) 39 Ztn. — 58 Pfd. + 27 Lth. — 2 Qt.; 2) 43 Ztn. — 108 Pfd. + 29 Lth. + 3 Qt.; 3) 12 Ztn. + 35 Pfd. — 21 Lth. — 2 Qt.; 4) 16 Ztn. — 18 Pfd. — 13 Lth. + 3 Qt.; 5) 27 Ztn. + 61 Pfd. — 15 Lth. — 1 Qt. Wie viel behält er von der Waare übrig?

6) Es erhält jemand $5\frac{1}{4}a - 3\frac{2}{3}b + 7c - 8d + \frac{5}{6}$ verliert $7\frac{2}{3}a + 5\frac{1}{4}b - 3\frac{1}{2}c - 9d$; erhält wieder $4a - 2\frac{2}{3}$

$-6\frac{2}{3}c + 4e - 5f$, verliert $8\frac{1}{6}a + 7\frac{2}{3}c - 8\frac{4}{5}d + 17f$; erhält $6a - 8b + 3c - 9d + 5e - f$, verliert $7b - 8d + 3f - 6c + 3a$; erhält $9\frac{1}{2}b + 3\frac{2}{3}a + 8c - 6\frac{2}{3}e - 7\frac{3}{4}f$, verliert $8\frac{2}{3}c - 5\frac{1}{3}b + 2\frac{3}{4}e + 6\frac{1}{2}f$. Wie viel beträgt das Übrige?

7) Wer 28 thlr. — 3 gr. — 7 pf. einnimmt und 17 thlr. + 8 gr. + 9 pf. ausgibt, was hat der übrig?

8) Von $7a - 3b + \frac{2}{3}c - \frac{3}{4}d + \frac{5}{6}e + \frac{7}{8}f$ ziehe man ab $8\frac{1}{2}b - 6\frac{2}{3}a + 5\frac{3}{4}d - 2\frac{1}{2}c + 8e - 6\frac{4}{5}f - 7g$.

9) Von a ziehe man ab $3p - 2q + m$.

10) Man berechne die Formel $a + 3b - c - (2d + 5a - 3c + 7b)$.

11) Man addire $8a - 3m + 4q - 7c$; $9q - 5a + 3b - 2c + 7m$; $6c - 8d + 3m - 7q + f$; $8m - 4c + 5a - 6b$; und ziehe davon ab $3a - 8b - 2m - 3q + 5c$; $6f - 2d - 7m + 5a$; $7b - 4d - 8m + 5q - 6c$.

Von der Multiplikation entgegengesetzter Größen.

§. 21.

Vorbemerkung und Lehrsatz.

Die Hauptbemerkungen betreffen wiederum die Zeichen. Wie bei der Subtraktion, sind auch hier vier Fälle zu unterscheiden. Es wird entweder eine positive Größe mit einer positiven, oder eine positive mit einer negativen, oder eine negative mit einer positiven, oder eine negative mit einer negativen multiplizirt. Der zweite und dritte Fall sind eigentlich einerlei, da es willkührlich ist, welchen der beiden Faktoren man als den Multiplikator oder Multiplikandus ansehen will. Es sind also nur drei Fälle zu betrachten.

1) Wenn eine positive Größe mit einer positiven multiplizirt wird, so wird eine wirklich vorhandene Größe wirklich so vielmal genommen, als der Multiplikator Einheiten hat. Das Produkt ist also positiv. Es ist $+8 \cdot +4 = +32$.

2) Wenn eine positive Größe mit einer negativen, oder eine negative mit einer positiven multiplizirt wird, so wird im ersten Falle das Wirklichvorhandene ein- oder etliche Mal als nicht vorhanden, als fehlend gedacht, im letztern Falle aber das Fehlende als wirklich fehlend: folglich ist in beiden Fällen das Produkt

negativ. Es ist $+8 \cdot -4 = -32$ und $-8 \cdot +4 = -32$.

3) Wenn eine negative Größe mit einer negativen multiplizirt wird, so heißt das: man soll eine fehlende Größe ein- oder etliche Mal als nicht fehlend, d. h. man soll sich dieselbe ein- oder etliche Mal als wirklich vorhanden vorstellen. Das Produkt ist also positiv. Dieser Fall hat Ähnlichkeit mit der Eigenheit in der Sprache, daß auch zwei Verneinungen eine Bejahung bilden. Er ist nicht unwissend, heißt so viel als, er weiß etwas. Eben so ist denn auch $-8 \cdot -4 = +32$.

§. 22.

Zusatz.

In Beziehung auf die Zeichen gilt also für die Multiplikation die allgemeine Regel: Einerlei Zeichen geben im Produkte + und verschiedene Zeichen —.

§. 23.

Zusatz.

Was die Multiplikation der Buchstabengrößen an und für sich betrifft, so werden die einzelnen Faktoren unmittelbar zusammengeschrieben, und sind Koeffizienten in bestimmten Zahlen dabei, so werden diese wirklich multiplizirt und das Produkt vor das Produkt der Buchstaben gesetzt, z. B. a mit b multiplizirt, gibt ab; 3a mit 2b multiplizirt, gibt 6ab.

§. 24.

Zusatz.

Will man anzeigen, daß eine aus mehreren Theilen bestehende Größe mit einer andern multiplizirt werden soll, so muß man erstere in eine Klammer schließen, und auch die andere, wenn sie ebenfalls zusammengesetzt ist, z. B. $a + c - d$ mit m multiplizirt, wird geschrieben:

$$m\,(a + c - d),$$

und $p + q - r$ mit $c - d + e$ multiplizirt, wird geschrieben:

$$(p + q - r) \cdot (c - d + e):$$

Führt man die Multiplikation $m\,(a + c - d)$ aus, so muß man jeden einzelnen Theil der eingeschloßnen Größe mit m multipliziren; es kommt $ma + mc - md$. Hat man also in einer zusammengesetzten Größe mehrere Theile, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so kann man, um einen kürzern Ausdruck zu bekommen, den gemeinschaftlichen Faktor allein setzen und die

andern ungleichen Faktoren in eine Klammer einschließen. So wie nämlich $ma + mc - md = m(a + c - d)$ war, so ist auch $pq - pr + ps = p(q - r + s)$. Man vergleiche §. 5. Nr. 7.

§. 25.
Zusatz.

Manchmal ist der eine ungleiche Faktor bloß 1, wenn nämlich kein anderer Koeffizient bei dem gemeinschaftlichen Faktor steht, z. B.

$ab + ac - a$ ist gleich $a(b + c - 1)$, weil das letzte $a = 1a$ ist.

Bekommt der vor der Klammer stehende gemeinschaftliche Faktor das Zeichen —, so ist das in der Klammer Eingeschoßne eine Subtraktion und die Zeichen müssen daher verwandelt werden, z. B.

$ab - amc - amd + ame - af$ wird verwandelt in
$a(b - mc - md + me - f)$, und dieses in
$a[b - m(c + d - e) - f]$.

Es muß nämlich c und d positiv, e aber negativ sein, weil mc und md negativ, und me positiv sein soll.

Löst man eine solche Klammer auf, so wird wieder durch Verwandlung der Zeichen die Subtraktion in Addition umgeändert, z. B.

$a[a + c - e(f - g + h)] = ab + ac - ae(f - g + h)$
$= ab + ac - aef + aeg - aeh$.

Der Gebrauch der Klammer gibt oft Abkürzung in der Rechnung. Es ist z. B. $48 + 36 - 60 = 12 \cdot 4 + 12 \cdot 3 - 12 \cdot 5 = 12(4 + 3 - 5)$, und der letztere Ausdruck ist offenbar leichter zu übersehen, als die beiden erstern.

§. 26.
Zusatz.

Wenn beide Faktoren zusammengesetzt sind, so wird gewöhnlich multiplizirt, nämlich jeder Theil des Multiplikandus mit jedem Theile des Multiplikators, z. B.

$$\begin{array}{r} 3a - 2b + c - 4d \\ 3a + 2b - 2c + 3d \\ \hline 9aa - 6ab + 3ac - 12ad \\ + 6ab - 4bb + 2bc - 8bd \\ - 6ac + 4bc - 2cc + 3cd \\ + 9ad - 6bd + 3cd - 12dd \\ \hline 9aa - 3ac - 4bb - 3ad + 6bc - 14bd - 2cc + 6cd - 12dd. \end{array}$$

Es ist bequemer, an der linken Seite, wie im Beispiele, anzufangen.

Es sind also 1) alle Theile des Multiplikandus mit 3a durchmultiplizirt worden, dies gibt die oberste Reihe; 2) alle Glieder des Multiplikandus mit + 2b, dies gibt die zweite Reihe; 3) alle Glieder des Multiplikandus mit — 2c, dies gibt die dritte Reihe; 4) alle Glieder des Multiplikandus mit + 3d, dies gibt die unterste Reihe. Nun addire man die einzelnen Produkte nach den Regeln der Addition, wobei sich denn manche Theile gegen einander ganz aufheben, z. B. — 6ab und + 6ab, andere aber sich zusammenziehen lassen, z. B. + 3ac und — 6ac in — 3ac; ferner — 12ad und + 9ad in — 3ad, auch + 2bc und + 4bc in + 6bc, desgleichen — 8bd und — 6bd in — 14bd, endlich + 3cd und + 3cd in + 6cd. Man kann auch in der Summe der Produkte die gemeinschaftlichen Faktoren aufsuchen und die Klammer anwenden. Dann läßt sich die Summe so ausdrücken:

$$3a(3a-c-d)-2b(ab-3c+7d)-2c(c-3d)-12dd.$$

Von der Division entgegengesetzter Größen.

§. 27.

Vorbemerkung und Lehrsatz.

Wir bemerken zuerst die Regel in Rücksicht der Zeichen.

Es gibt ebenfalls vier Fälle: Der Dividendus und der Divisor können beide zusammen positiv, oder beide negativ, oder es kann der Dividendus positiv und der Divisor negativ, oder der Dividendus negativ und der Divisor positiv sein.

Durch die Division wird überhaupt gesucht, wie vielmal eine Zahl (der Divisor) in der andern (dem Dividendus) enthalten sei, und der Quotient gibt die Antwort auf diese Frage. Aber nur das Gleichartige ist in einander wirklich enthalten. Wenn also

1) Divisor und Dividendus beide positiv sind, so sind sie offenbar gleichartig und also der erstere im letztern wirklich enthalten, folglich der Quotient positiv.

2) Wenn Divisor und Dividendus beide negativ sind, so sind sie auch gleichartig, also der erstere wirklich in dem letztern enthalten (das Fehlende in dem Fehlenden), folglich der Quotient auch positiv.

3) Wenn der Divisor positiv und der Dividendus negativ ist, so sind beide ungleichartig, das Wirklichvorhandene kann also nicht wirklich in dem Fehlenden stecken, sondern nur sein Entgegengesetztes (das Fehlende), also kann der Quotient nicht positiv, sondern er muß negativ sein.

4) Wenn der Divisor negativ und der Dividendus positiv ist, so sind beide auch ungleichartig; das Fehlende kann wieder nicht wirklich in dem Wirklichvorhandenen stecken, sondern nur sein Entgegengesetztes (das Wirklichvorhandene), also kann der Quotient auch nicht positiv, sondern er muß negativ sein.

§. 28.

Zusatz.

Es gilt also für die Division dieselbe Regel, wie für die Multiplikation: Wenn Divisor und Dividendus einerlei Zeichen haben, so wird der Quotient positiv; haben aber beide verschiedene Zeichen, so wird der Quotient negativ.

Es ist als $\frac{+8}{+4} = +2$; $\frac{-8}{-4} = +2$; $\frac{+8}{-4} = -2$ und $\frac{-8}{+4} = -2$.

§. 29.

Zusatz.

Was nun die Division der Buchstabengrößen an und für sich betrifft, so merke man folgendes:

1) Ist der Divisor ein ganz anderer Buchstabe, als der Dividendus, so kann die Division nur angezeigt werden, z. B. a durch b dividirt, gibt bloß $\frac{a}{b}$.

2) Ist der Divisor als Faktor im Dividendus enthalten, so sind der andere oder die andern Faktoren des Dividendus der Quotient (nach §. 8. Nr. 22.), z. B. ab durch b dividirt, gibt zum Quotienten a; $\frac{pqr}{q} = pr$; $\frac{mqp}{mp} = q$; $\frac{mnop}{np} = mo$. Man braucht immer nur im Dividendus und Divisor das Gleiche gegen einander wegzustreichen; was dann vom Dividendus stehen bleibt, ist der Quotient.

3) Sind nur einige oder etliche Faktoren des Divisors im Dividendus enthalten, so streiche man wieder das Gleiche gegenseitig weg und setze, was stehen bleibt, mit dem Divisionszeichen unter einander, z. B. $\frac{abc}{bm} = \frac{ac}{m}$; $\frac{pqrs}{pru} = \frac{qs}{u}$.

4) Ist der Divisor der gemeinschaftliche Faktor einer zusammengesetzten Größe, so streicht man diesen in allen Theilen des Dividendus gegen den Divisor weg, z. B. $\frac{ab + ac - ad}{a} = b + c - d$; denn $\frac{ab + ac - ad}{a}$ ist $= \frac{a(b+c-d)}{a} = b + c - d$.

So auch, wenn im Divisor noch ein anderer Faktor dabei steht, z. B. $\frac{pq - pr + ps}{pm} = \frac{q - r + s}{m}$.

Auch wenn der Divisor zusammengesetzt ist, aber in allen Theilen den gemeinschaftlichen Faktor hat, z. B. $\frac{ma - mb + mc}{mq - mr} = \frac{a - b + c}{q - r}$.

§. 30.

Zusatz.

Übrigens geschieht die Division, wenn sie wirklich ausgeführt wird, mit Beobachtung der gegebenen Regeln wie gewöhnlich.

Beispiel mit einem einfachen Divisor.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
$3a$	$9ad - 6ap + 5aq - 2ar$	$3d - 2p + \frac{5}{3}q - \frac{2}{3}r$

$+9ad$

$-6ap$

$\pm 6ap$

$+5aq$

$+5aq$

$-2ar$

$\pm 2ar$

Mit $+3a$ in $+9ad$ dividirt, gibt den Quotienten $+3d$; damit den Divisor multiplizirt, kommt zum Produkte $+9ad$, dieses wird untergeschrieben, das Zeichen $+$ in $-$ verwandelt, und nun addirt, die Summe gibt 0. Jetzt zieht man den folgenden Theil des Dividendus $-6ap$ herunter, dividirt mit $+3a$, findet so den Quotienten $-2p$ und verfährt damit wie vorher. Eben so zieht man nun den dritten Theil des Dividendus $+5aq$ herunter und dividirt hinein. Der Quotient ist $+\frac{5}{3}q$; diesen mit $3a$ multiplizirt, gibt $\frac{5}{3}q \cdot 3a = \frac{5 \cdot 3}{3}aq = 5aq$. So denn auch bei dem folgenden Theile des Dividendus.

Beispiele mit einem zusammengesetzten Divisor.

Divisor. Dividendus. Quotient.

$$
\begin{array}{l|l|l}
2p-4m+3r & 2pp+6pq-4pm-12qm-pr+8rm+9qr-6rr & p+3q-2r \\
 & \mp 2pp \quad \pm 4pm \quad \mp 3pr & \\
\hline
 & 6pq \quad -12qm-4pr+8rm+9qr-6rr & \\
 & \mp 6pq \quad \pm 12qm \quad \mp 9qr & \\
\hline
 & -4pr+8rm \quad -6rr & \\
 & \pm 4pr \mp 8rm \quad \pm 6rr & \\
\hline
\end{array}
$$

Man dividire mit dem ersten Theile des Divisors in den ersten Theil des Dividendus, mit $+2p$ in $+2pp$; der Quotient ist $+p$. Mit diesem multiplizire man nun alle Theile des Divisors und schreibe die Produkte da unter, wo im Dividendus ähnliche oder gleiche Größen stehen, also $+2pp$ unter $+2pp$, und $-4pm$ unter $-4pm$ und $+3pr$ unter $-pr$. Nun verwandle man die Zeichen und addire, so hebt sich $+2pp$ mit $-2pp$; $-4pm$ mit $+4pm$ und $-pr$ mit $-3pr$ gibt zusammen $-4pr$. Man ziehe nun die übrigen Theile des Dividendus zu dem Reste $-4pr$ herunter und dividire wieder mit $+2p$ in $+6pq$. Mit dem Quotienten $+3q$ werden, wie im Anfange, alle Theile des Divisors multiplizirt und die Produkte dahin geschrieben, wo sie passen, die Zeichen verwandelt und addirt. Es hebt sich alles. Endlich ziehe man die übrigen Theile des Dividendus herunter und verfahre wie vorher.

Zweites Beispiel.

Divisor. Dividendus. Quotient.

$$
\begin{array}{l|l|l}
3p-2m+3q & 9pp-4mm+12qm-9qq & 3p+2m-3q \\
 & \mp 9pp \pm 6pm \mp 9qp & \\
\hline
 & +6pm-4mm-9qp+12qm-9qq & \\
 & \mp 6pm \pm 4mm \quad \mp 6qm & \\
\hline
 & -9qp+6qm-9qq & \\
 & \pm 9qp \mp 6qm \pm 9qq & \\
\hline
\end{array}
$$

Mit $+3p$ in $+9pp$ dividirt, gibt $+3p$. Mit diesem Quotienten alle Theile des Divisors multiplizirt, gibt Produkte, für welche sich keine gleiche oder ähnliche Theile im Dividendus finden. Man schreibe sie also beliebig unter, verwandle die Zeichen und addire, so kommen unter den Strich die Reste $+6pm$ und $-9qp$ und die übrigen Theile des Dividendus. Jetzt wieder dividirt und den Divisor mit dem Quotienten

$+ 2m$ multiplizirt, kommen die Produkte $+ 6pm$, $- 4mm$ und $+ 6qm$, welche gehörig untergeschrieben werden. Die beiden erstern heben sich mit den darüber stehenden Theilen des Dividendus und $- 6qm$ gibt mit $+ 12qm$ zusammen $+ 6qm$. Diesen Rest und die übrigen Theile des Dividendus herunter gezogen und wieder dividirt, geht zuletzt alles auf.

§. 31.

Zusatz.

Bleibt bei einer Division etwas übrig, so wird der Rest als Bruch neben den Quotienten geschrieben, wie folgende Beispiele zeigen.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
$a + 2b - c$	$aa - 4bb + 2bc - cc$	$a - 2b + c - \frac{2bc}{a+2b-c}$
	$\mp aa \mp 2ab \pm ac$	
	$-2ab - 4bb + ac + 2bc - cc$	
	$\mp 2ab \pm 4bb \mp 2bc$	
	$ac - cc$	
	$\mp ac \mp 2bc \pm cc$	
	$-2bc$	
$3e - f + 4h$	$9ee - ff + 3fh - 12hh$	$3e - f - 4h - \frac{5fh - 4hh}{3e - f + 4h}$
	$\mp 9ee \pm 3ef \mp 12eh$	
	$3ef - ff - 12eh + 3fh - 12hh$	
	$\mp 3ef \pm ff \mp 4fh$	
	$-12eh - fh - 12hh$	
	$\pm 12eh \mp 4fh \pm 16hh$	
	$-5fh + 4hh$	

Setzt man in dem letztern Beispiele den Rest als Bruch an, so muß man die Zeichen verändern, wenn der ganze Bruch, wie hier geschehen ist, als Subtrahendus betrachtet werden soll. Hätte man statt des vorstehenden Minus das Additionszeichen gebraucht, so wäre der Rest mit unveränderten Zeichen als Zähler hingeschrieben worden, also der Quotient folgender:

$$3e + f - 4h + \frac{4hh - 5fh}{3e - f + 4h}.$$

§. 32.

Wenn man mit einer zusammengesetzten in eine einfache Größe dividiren soll, so ist der Quotient ein bloßer Bruch,

z. B. a dividirt durch $a + b = \frac{a}{a+b}$. Man kann aber auch die Division wirklich ausführen; dann erhält man einen Quotienten, der aus einer unendlichen Reihe von Theilen besteht, weil die Division niemals aufgeht und also ohne Ende fortgesetzt werden kann. Je mehr Glieder man von einer solchen Reihe nimmt, desto vollständiger erhält man den Quotienten. Ganz vollständig wird derselbe aber nie, man müßte denn irgendwo aufhören und den letzten Rest als Bruch anhängen. Beispiele mögen dies deutlich machen. Man dividire also a durch $a + b$.

$$a + b \mid a \quad \mid 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} - \frac{bbb}{aaa} \text{ ꝛc.}$$

$$\begin{array}{l} a \mp b \\ \hline -b \\ \pm b \pm \frac{bb}{a} \\ \hline \frac{bb}{a} \\ \mp \frac{bb}{a} \mp \frac{bbb}{aa} \\ \hline -\frac{bbb}{aa} \\ \pm \frac{bbb}{aaa} \pm \frac{bbbb}{aaa} \\ \hline +\frac{bbbb}{aaa} \end{array}$$

Es ist a in a gerade 1 mal enthalten; der ganze Divisor mit 1 multiplizirt, gibt $a + b$, die Zeichen verwandelt und addirt, kommt zum Reste $-b$. Darein wieder mit a dividirt, kommt der Quotient $-\frac{b}{a}$, diesen mit $a + b$ multiplizirt, kommt $-b - \frac{bb}{a}$, die Zeichen verwandelt und addirt, erhält man zum Reste $\frac{bb}{a}$. Diesen Rest wieder mit a dividirt, kommt $+\frac{bb}{aa}$, damit den Divisor multiplizirt, gibt $+\frac{bb}{a} + \frac{bbb}{aa}$, die Zeichen verwandelt und addirt, erhält man zum Reste $-\frac{bbb}{aa}$ ꝛc. Man braucht die Division nicht lange fortzusetzen, denn man sieht bald, nach welchem Gesetze die Theile des Quotienten fortgehen. So kommt in unserm Beispiele mit jedem neuen Gliede

im Zähler ein b und im Nenner ein a mehr als Faktor zu stehen, und die Zeichen der Glieder sind abwechselnd + und —; darum könnte man gleich, ohne wirklich weiter zu dividiren, die Theile des Quotienten noch weiter fortschreiben z. B.

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} - \frac{bbb}{aaa} + \frac{bbbb}{aaaa} - \frac{bbbbb}{aaaaa} + \frac{bbbbbb}{aaaaaa} \text{ &c.}$$

Ganz vollständig aber würde der Quotient nur dann werden, wenn man irgendwo aufhörte und dann den gebliebenen Rest als Bruch ansetzte. Nach dem Gliede $-\frac{bbb}{aaa}$ ist der Rest $= +\frac{bbbb}{aaa}$, d. h. der Rest ist immer so beschaffen, daß er 1) das entgegengesetzte Zeichen von dem Gliede hat, wo man aufhört, und 2) daß sein Zähler einen Faktor mehr hat, als der Zähler dieses Gliedes, der Nenner aber eben so viel Faktoren, als der Nenner dieses Gliedes. Wollte man also bei $+\frac{bbbbbb}{aaaaaa}$ aufhören, so würde der Rest sein $-\frac{bbbbbbb}{aaaaaa}$. Um nun diesen Rest als Bruch anzuhängen, setze man den Divisor darunter, oder multiplizire gleich den Nenner des Restes mit demselben, weil ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt wird, wenn man den Nenner mit derselben multiplizirt. Also wäre der vollständige Quotient $=$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} - \frac{bbb}{aaa} + \frac{bbbb}{aaaa} - \frac{bbbbb}{aaaaa} + \frac{bbbbbb}{aaaaaa} - \frac{bbbbbbb}{aaaaaa\,(a+b)}$$

Der Sinn des Ganzen ist nun folgender: Wenn man a durch $a + b$ dividirt, so ist der Quotient 1) $= 1$, aber dieser ist zu groß, weil ein negativer Rest bleibt, man muß also noch $\frac{b}{a}$ abziehen und so wäre der Quotient $= 1 - \frac{b}{a}$. Allein man hat etwas zu viel abgezogen, weil bei der Division ein positiver Rest bleibt, also muß man noch $\frac{bb}{aa}$ addiren und der Quotient wäre $= 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}$. Aber man hat wieder zu viel addirt, weil bei der Division ein negativer Rest bleibt, man zieht also noch $\frac{bbb}{aaa}$ ab; dies ist wieder zu viel abgezogen, und man muß daher noch $\frac{bbbb}{aaaa}$ addiren u. s. w. Das, was an dem richtigen Quotienten noch mangelhaft ist, mag es nun ein Zuviel oder ein Zuwenig sein, wird mit jedem neuen Theile des Quotienten immer kleiner und kleiner und man erhält also den Quotienten desto voll-

ständiger, je mehr Glieder man nimmt. Ein Beispiel in Zahlen wird dies erläutern. Es sei $a = 3$, $b = 2$, also $\frac{a}{a+b} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$, so gibt obiger Quotient folgende Reihe:

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \text{ ꝛc.}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \frac{32}{243} + \frac{64}{729} \text{ ꝛc.}$$

Der Quotient 1 ist um $\frac{2}{3}$ zu groß, zieht man nun $\frac{2}{3}$ ab, so bleibt $\frac{1}{3}$, welches um $\frac{4}{15}$ zu klein ist, addirt man also noch $\frac{4}{9}$, so kommt $\frac{7}{9}$, welches wieder um $\frac{8}{45}$ zu groß ist, also doch weniger zu groß, als das vorige $\frac{1}{3}$ zu klein war. Zieht man nun wieder $\frac{8}{27}$ ab, so ist $\frac{7}{9} - \frac{8}{27} = \frac{21}{27} - \frac{8}{27} = \frac{13}{27}$, welches um $\frac{16}{135}$ zu klein ist, also weniger zu klein, als das vorige $\frac{7}{9}$ zu groß war, denn $\frac{8}{45}$ ist $= \frac{24}{135}$. Addirt man nun wieder $\frac{16}{81}$, so ist $\frac{13}{27} + \frac{16}{81} = \frac{39}{81} + \frac{16}{81} = \frac{55}{81}$ und dieses ist um $\frac{32}{405}$ zu groß, aber weniger zu groß, als das vorige $\frac{13}{27}$ zu klein war, denn $\frac{16}{135}$ ist $= \frac{48}{405}$. Zieht man nun wieder $\frac{32}{243}$ ab, so kommt $\frac{55}{81} - \frac{32}{243} = \frac{165}{243} - \frac{32}{243} = \frac{133}{243}$, welches um $\frac{64}{1215}$ zu klein ist, aber wieder weniger zu klein, als das vorige $\frac{55}{81}$ zu groß war, denn $\frac{32}{405}$ ist $= \frac{256}{2025}$. Addirt man endlich $\frac{64}{729}$, so ist $\frac{133}{243} + \frac{64}{729} = \frac{399}{729} + \frac{64}{729} = \frac{463}{729}$, welches um $\frac{128}{3645}$ zu groß ist, aber weniger zu groß, als das vorige $\frac{133}{243}$ zu klein war, denn $\frac{64}{1215}$ ist $= \frac{192}{3645}$. Man sieht also deutlich, wie mit jedem folgenden Gliede der Quotient sich immer mehr dem wahren Werthe, nämlich $\frac{3}{5}$ nähert und immer weniger zu groß oder zu klein wird. Denkt man sich also die Division ohne Ende fortgesetzt, so muß das Zukleine und Zugroße immer mehr verschwinden und die ganze unendliche Reihe aller Theile des Quotienten ist wirklich $= \frac{3}{5}$.

Hört man z. B. mit dem siebenten Gliede auf, wo der Quotient um $\frac{128}{3645}$ zu groß war, so muß der angehängte Bruch

$$-\frac{bbbbbbb}{aaaaaa\,(a+b)} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\,(3+2)} = -\frac{128}{729 \cdot 5}$$

$= -\frac{128}{3645}$ gerade so groß sein, als jener Überschuß beträgt, wie denn auch der Augenschein lehrt.

Weiter unten wird sich das Gesetz, wonach der Quotient gefunden wird, näher erörtern lassen.

§. 33.

Beispiele zur Multiplikation mit Buchstabengrößen.

Man multiplizire

1) $3a - 2b + 5d$ mit $2a + 3b - 4d$.

2) $5m - 3q + 4p - 2r$ mit $5m + 3q - 4p + 2r$.

3) $-8d+2e-3f+g$ mit $d+2f-3e-g$.
4) $\frac{3}{4}a-\frac{2}{3}b+\frac{1}{4}c-d$ mit $3a-4b+\frac{2}{3}c-\frac{5}{6}d$.
5) $7a-8b+3c-5f$ mit $2a+3b-4c+4f$.
6) $5f-3e+\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}d$ mit $5f+3e-\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}d$.
7) $2ab-3cd+ef-g$ mit $3a+2c-3f+3gm$.
8) $6b-8q+4p-2c$ mit $\frac{2}{3}b-\frac{3}{4}q+\frac{1}{2}p-\frac{5}{8}c$.
9) $3q-3m+2p-3r$ mit $6q-3p+2m-8r$.
10) $7m-\frac{3}{4}b+2\frac{1}{2}c+3\frac{1}{4}d$ mit $2\frac{1}{2}m+2\frac{1}{4}b-3\frac{1}{2}c+4\frac{1}{8}d$.
11) $6\frac{1}{2}m-\frac{2}{3}b+\frac{3}{8}c-4d$ mit $2\frac{5}{6}m-\frac{3}{4}b+\frac{5}{8}c-\frac{4}{5}d$.
12) $\frac{5}{8}p-\frac{2}{3}q+\frac{3}{4}r+\frac{5}{6}s$ mit $2p+\frac{3}{4}q-4r-2\frac{1}{3}s$.

§. 34.

Beispiele zur Division mit Buchstabengrößen.

Man dividire

1) $15aa-ab+3ac-6bb+17bc-12cc$ durch $3a-2b+3c$.
2) $18pp+9pm-9mm-12pq+24mq-16qq$ durch $6p-3m+4q$.
3) $4aa-9bb+24bc-6bd-16cc+8cd-dd$ durch $2a-3b+4c-d$.
4) $30aa+2am-4mm-3aq+12mq+4ap-9qq-16mp+24pq-16pp$ durch $5a+2m-3q+4p$.
5) $9aabb-4ppqq+12pqmr-9mmrr$ durch $3ab-2pq+3mr$.
6) $mmrr-ppqq+2pqcd-ccdd-2pqfg+2cdfg-ffgg$ durch $mr-pq+cd-fg$.
7) $6qq+16pq-32pp+4mq-5qr+80pm-32mm+28pr-32rm-6rr$ durch $2q+8p-4m-3r$.
8) $25ff-25cf+6cc+25df-13cd+6dd-8ce-8ed-64ee$ durch $5f-3c+2d-8e$.
9) $12bb+32bc-12cc-18be+26ce+10bd-12ee-30cd+25ed-12dd$ durch $6b-2c+3e-4d$.
10) $16qq-9rr+60mr-100mm-24pr+80mp-16pp$ durch $8q+3r-10m+4p$.

§. 35.

Man bringe folgende Größenreihen in Klammern.

1) $pq-pr+pm-3pa+4pc$.
2) $mq-mpr+mpc-mqd+mpe$.

3) $abc - abd + ab - aqr + ams.$
4) $ef - egh + egd - eg + e.$
5) $3a - 6b + 3c - 9f.$
6) $3a - 2ab + 3abc - amf + ag.$
7) $a - am + amp - amg + 3ap.$
8) $a - bm + bcm - bcde + bcdf - beg + bq.$

§. 36.

Man löse folgende Klammern auf.

1) $a + m(b - c)d.$
2) $a + q(r - 3 + 2c) - f.$
3) $m[3p - 1 + 6(c - f + d) - e].$
4) $a[1 - p(q - r) + m].$
5) $q[c - d[m + 4(a - b) - r] + c].$
6) $pm[r - q[c - d(e + f)] + 9(h - m)].$
7) $a - \frac{p(q - r) + m}{a - b}.$
8) $q - \frac{mr + cd - ef}{g(h - m)}.$
9) $q - \frac{m + f(g - h) - e}{q + r}.$
10) $c - d - \frac{a + b(c - d) - e}{e - f}.$
11) $q(r - s) - \frac{p + q(c - r) + a}{m(m - 1)}.$
12) $m(c + 1) - \frac{m(m - 1)(m - 2)}{p(q - r) + m}.$

Viertes Kapitel.

Von der Bruchrechnung bei Buchstabengrößen.

§. 37.

Lehrsatz.

Wenn Brüche aus Buchstabengrößen gebildet werden, so gelten für ihre Behandlung dieselben Regeln, wie bei Brüchen aus bestimmten Zahlen. Wir wollen also diese nur ganz kurz angeben:

1) Man multiplizirt einen Bruch mit einem Ganzen, wenn entweder der Zähler mit demselben multiplizirt wird und der Nenner unverändert bleibt; oder wenn man den Zähler ungeändert läßt und den Nenner durch das Ganze dividirt, z. B. $8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ und $4 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{2}$, also auch $a \cdot \frac{p}{q} = \frac{ap}{q}$ und $m \cdot \frac{r}{mp} = \frac{r}{p}$.

2) Man dividirt einen Bruch durch ein Ganzes, wenn man entweder den Zähler desselben durch das Ganze dividirt und den Nenner ungeändert läßt, oder wenn man den Zähler ungeändert läßt und den Nenner mit dem Ganzen multiplizirt, z. B. $\frac{9}{11} : 3 = \frac{3}{11}$, $\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{16}$, also auch $\frac{pr}{q} : p = \frac{r}{q}$, $\frac{m}{n} : q = \frac{m}{qn}$.

3) Ein Bruch bleibt an Werth unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplizirt oder dividirt, z. B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ und $\frac{18}{45} : \frac{9}{9} = \frac{2}{5} = \frac{18}{45}$. So auch in Buchstaben $\frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{ap}{aq} = \frac{p}{q}$ und $\frac{pr : r}{mr : r} = \frac{p}{m} = \frac{pr}{mr}$.

4) Man hebt einen Bruch auf, wenn man den Zähler durch einerlei Zahl ohne Rest dividiren kann, z. B. $\frac{12}{16} \overset{4}{|} \frac{3}{4}$, also auch $\frac{pqr}{pmr} \overset{r}{|} \frac{q}{m}$.

5) Man bringt einen Bruch auf einen andern gegebenen Nenner, wenn man den gegebenen Nenner durch den alten Nenner dividirt, den Quotienten mit dem alten Zähler multiplizirt und das Produkt als Zähler des gegebenen Nenners ansetzt, z. B. $\frac{7}{8}$ auf den Nenner 24 gebracht, gibt nach dieser Regel $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{3} = \frac{21}{24}$ und also $\frac{p}{q}$ auf den Nenner qm gebracht, gibt $\frac{pm}{qm}$.

6) Eine ganze Zahl wird in einen Bruch von gegebenem Nenner verwandelt, wenn man die ganze Zahl mit dem neuen Nenner multiplizirt und das Produkt als Zähler über den neuen Nenner schreibt, z. B. 5 auf den Nenner 8 gebracht, gibt $\frac{40}{8}$ und so auch a auf den Nenner m gebracht, gibt $\frac{am}{m}$.

7) Mehrere Brüche werden unter einen Nenner gebracht, wenn man durch Multiplikation aller Nenner, die, welche in andere aufgehen, ausgenommen, den Generalnenner sucht, diesen durch jeden Nenner dividirt, die Quotienten mit den Zählern multiplizirt und unter diese Produkte, als die neuen Zähler, den Generalnenner schreibt, z. B. von den Brüchen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, $\frac{i}{k}$ ist der Generalnenner = bdfhk, also die Rechnung so:

$\frac{a}{b}$

	bdfhk	
$\frac{a}{b}$	dfhk	adfhk
$\frac{c}{d}$	bfhk	cbfhk
$\frac{e}{f}$	bdhk	ebdhk
$\frac{g}{h}$	bdfk	gbdfk
$\frac{i}{k}$	bdfh	ibdfh

Die neuen Brüche sind also:

$$\frac{a}{b} = \frac{adfhk}{bdfhk} \qquad \frac{c}{d} = \frac{cbfhk}{bdfhk} \qquad \frac{e}{f} = \frac{ebdhk}{bdfhk} \qquad \frac{g}{h} = \frac{gbdfk}{bdfhk} \qquad \frac{i}{k} = \frac{ibdfh}{bdfhk}$$

Es kann auch der Fall sein, daß unter den Nennern der Brüche sich einige gegen einander ganz oder zum Theil aufheben. Dann kann man, wie bei Zahlen, einen kleinern Generalnenner finden. Z. B.

Es seien die Brüche gegeben $\frac{a}{b}, \frac{c}{bm}, \frac{d}{3b}, \frac{e}{mq}, \frac{f}{bmr}, \frac{g}{6qr}$.

Man setze die Nenner in eine Reihe und dividire durch die gemeinschaftlichen Faktoren

b)	b, bm, 3b, mq, bmr, 6qr	
m)	1, m, 3, mq, mr, 6qr	
q)	1, 1, 3, q, r, 6qr	
3)	1, 1, 3, 1, r, 6r	
r)	1, 1, 1, 1, r, 2r	
	1, 1, 1, 1, 1, 2	

Nun multiplizire man alle Divisoren mit einander und mit dem, was sich nicht hat heben lassen, so kommt zum Generalnenner 6 bmqr und die Brüche werden nun, wie vorher, auf diesen Nenner gebracht.

	6 bmqr	
$\frac{a}{b}$	6 mqr	6 amqr
$\frac{c}{bm}$	6 qr	6 cqr
$\frac{d}{3b}$	2 mqr	2 dmqr
$\frac{e}{mq}$	6 br	6 ebr
$\frac{f}{bmr}$	6 q	6 fq
$\frac{g}{6qr}$	bm	gbm

Die neuen Brüche sind also:

$$\frac{a}{b} = \frac{6amqr}{6bmqr} \qquad \frac{c}{bm} = \frac{6cqr}{6bmqr} \qquad \frac{d}{3b} = \frac{2dmqr}{6bmqr} \qquad \frac{e}{mq} = \frac{6ebr}{6bmqr} \qquad \frac{f}{bmr} = \frac{6fq}{6bmqr} \qquad \frac{g}{6qr} = \frac{gbm}{6bmqr}$$

8) Brüche werden mit Ganzen eingerichtet, wenn man die Ganzen mit dem Nenner multiplizirt, den Zähler dazu rechnet und den Nenner unter die Summe schreibt, z. B. $4\frac{7}{8} = \frac{39}{8}$, also auch $a + \frac{p}{q} = \frac{aq+p}{q}$. Eben so, wenn der Bruch das Zeichen — vor sich hat, z. B. $a - \frac{p}{q} = \frac{aq-p}{q}$.

9) Brüche werden addirt, wenn man, im Fall sie einerlei Nenner haben, die Zähler addirt und den gemeinschaftlichen Nenner darunter schreibt, und wenn die Nenner verschieden sind, sie erst auf einerlei Nenner bringt und dann, wie vorher, verfährt, z. B. $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} + \frac{m}{q} + \frac{c}{q} = \frac{p+r+m+c}{q}$ und $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} = \frac{adfh}{bdfh} + \frac{cbfh}{bdfh} + \frac{ebdh}{bdfh} + \frac{gbdf}{bdfh} = \frac{adfh+cbfh+ebdh+gbdf}{bdfh}$, oder wenn man mit Anwendung der Klammer einige Produkte zusammenzieht, so kommt $\frac{fh\,(ad+cb)+bd\,(eh+gf)}{bdfh}$.

10) Brüche zu Ganzen addiren, heißt, sie mit dem Additionszeichen daneben schreiben, oder auch sie mit den Ganzen einrichten (8).

11) Brüche werden von einander abgezogen, wenn man, im Fall sie einerlei Nenner haben, den Zähler des Subtrahendus vom Zähler des Minuendus abzieht und den gemeinschaftlichen Nenner darunter schreibt, und, im Fall sie verschiedene Nenner haben, sie unter einerlei Nenner bringt und dann wie vorher verfährt, z. B. $\frac{p}{q} - \frac{r}{q} = \frac{p-r}{q}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

12) Brüche werden bei Buchstabengrößen von Ganzen abgezogen, wenn man den Bruch mit dem Subtraktionszeichen zu den Ganzen schreibt, oder die Subtraktion in Addition verwandelt und dann mit den Ganzen einrichtet, z. B. $\frac{p}{q}$ von a abgezogen ist $= a - \frac{p}{q} = \frac{aq-p}{q}$. So auch bei zusammengesetzten Brüchen, z. B. $\frac{p+q-r}{s}$ von a abgezogen, gibt $a - \frac{p+q-r}{s} = \frac{as-p-q+r}{s}$. Ferner $\frac{m-n+p}{a-b+c}$ von q abgezogen, gibt $q - \frac{m-n+p}{a-b+c} = \frac{q\,(a-b+c)-m+n-p}{a-b+c}$.

13) Brüche werden mit einander multiplizirt, wenn man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplizirt, z. B. $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{48}$, also auch $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$; $\frac{p-q}{a-b} \cdot \frac{c+d}{e-f} = \frac{(p-q) \cdot (c+d)}{(a-b) \cdot (e-f)}$, wo man denn, wenn es nöthig ist, die Multiplikation in Zähler und Nenner ausführen kann.

14) Brüche werden durch einander dividirt, wenn man den Divisor umkehrt und nun den Dividendus damit multiplizirt, z. B. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{4}{5}$ dividirt, ist $= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{27}{16}$, also auch $\frac{p}{q}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt, gibt $\frac{p}{q} \cdot \frac{b}{a} = \frac{pb}{aq}$.

15) Eine ganze Zahl mit einem Bruche multipliziren, ist eben so viel, als den Bruch mit dem Ganzen multipliziren (1).

16) Ein Ganzes wird durch einen Bruch dividirt, wenn man das Ganze mit dem umgekehrten Bruche multiplizirt (14), z. B. 4 dividirt durch $\frac{7}{8} = 4 \cdot \frac{8}{7} = \frac{32}{7}$, also auch a dividirt durch $\frac{p}{q} = a \cdot \frac{q}{p} = \frac{aq}{p}$.

17) Ist ein unreiner Bruch von der Art, daß bloß der Zähler ein Bruch, der Nenner eine ganze Zahl ist, so zeigt er an, daß der Bruch durch die ganze Zahl dividirt werden soll, also nach 2. z. B. $\frac{\frac{p}{q}}{m} = \frac{p}{qm}$.

18) Ist der Zähler eine ganze Zahl und der Nenner ein Bruch, so soll das Ganze durch den Bruch dividirt werden, also nach 16 und 1. z. B. $\frac{p}{\frac{q}{r}} = p \cdot \frac{r}{q} = \frac{pr}{q}$.

19) Ist sowol der Zähler als Nenner ein Bruch, so bedeutet dies, daß der obere Bruch durch den untern dividirt werden soll, also nach 14. z. B. $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = \frac{pn}{qm}$.

§. 38.

Beispiele zur Bruchrechnung.

1) Man multiplizire $\frac{a}{b}$ mit q,

2) = = = $\frac{q-r}{s}$ = a,

3) Man multiplizire $\frac{p+q}{c-d}$ mit $c-d$.

4) = = = $\frac{m}{r}$ = $p-q$.

5) = = = $\frac{5p}{8m}$ = $4m$.

6) = = = $\frac{p-r}{3(a-b)}$ = $2(a-b)$.

7) = = = $\frac{q+m}{aa-bb}$ = $a+b$.

1) Man dividire $\frac{a}{p}$ durch q.

2) = = $\frac{m}{n}$ = $r-b$.

3) = = $\frac{p-q}{c}$ = $g-f$.

4) = = $\frac{8m}{p}$ = $4m$.

5) = = $\frac{3(p-s)}{4m}$ = $2(p-s)$.

6) = = $\frac{8p-4r}{m-q}$ = 4.

7) = = $\frac{pq-pr}{m(c-d)}$ = $2p$.

8) = = $\frac{3ab-6am}{4p+q}$ = $2a$.

1) Man hebe auf $\frac{am-ar}{ap-aq}$.

2) = = = $\frac{pq-pqr+pqm}{3pq-2pqm}$.

3) = = = $-\frac{dfh+def}{dfg-def+fgh}$.

4) = = = $\frac{3bhl-9aabhl+6abhl}{9abhlm+3bchil}$.

1) Man bringe den Bruch $\frac{a}{q}$ auf den Nenner $3q$.

2) = = = = $\frac{a-b}{2r}$ = = = $5r$.

3) = = = = $\frac{p+q-r}{m(a-b)}$ = = = $q(a-b)$.

4) = = = = $\frac{r+s}{c-d}$ = = = $pm(c-d)$.

1) Man verwandle die Zahl $3p$ in einen Bruch vom Nenner r.
2) " " " " $a-b$ " " " " " $q+s$.
3) " " " " $m+r$ " " " " " $a-b$.

Man bringe folgende Brüche unter einerlei Nenner:

1) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$.
2) $\frac{a}{2b}, \frac{c}{3bd}, \frac{e}{4gf}, \frac{h}{6bg}, \frac{i}{8df}$.
3) $\frac{p}{m-1}, \frac{q}{p(m-1)}, \frac{r}{m(m-1)}, \frac{s}{4(m-1)}, \frac{t}{q(m-1)}$.
4) $\frac{c}{qq}, \frac{de}{3pq}, \frac{sf}{6pt}, \frac{3gh}{2qr}, \frac{r}{8pp}, \frac{ikl}{12pqt}$.

Man richte folgende Brüche mit ihren Ganzen ein:

1) $a+\frac{b}{c}$; 2) $de+\frac{a}{g}$; 3) $3a-2b+\frac{3bc}{m}$;
4) $ab-mq+3r+\frac{c-d}{m}$; 5) $6q-3p+\frac{3c}{m-r}$;
6) $8p-3q-\frac{3m+2r-c}{4p-2q}$; 7) $\frac{pc-md}{3q-1}+4c-2b+3m$;
8) $7a-3b-\frac{5g+r-c}{3q-pr}$; 9) $8m+3b-\frac{3c+d-e}{4m-2b+q}$.

Man addire folgende Brüche:

1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{3b}+\frac{f}{mb}$.
2) $\frac{3}{m}-\frac{b}{m}+\frac{3g}{m}-\frac{4d}{m}$.
3) $\frac{1}{g}+\frac{f}{2gh}-\frac{2g}{hi}+\frac{g}{3h}$.
4) $\frac{a}{b}-\frac{p}{bq}+\frac{r}{c-d}-\frac{m+q}{m(c-d)}+\frac{s}{qm}$.
5) $\frac{gh}{2ik}+\frac{2lm}{3p}-\frac{3np}{4kk}+\frac{5qr}{6ikl}-\frac{7m}{8ipl}$.
6) $\frac{1}{7}+\frac{a}{7p}-\frac{b}{7pp}+\frac{cc}{a}-\frac{d}{aa}+\frac{r}{aap}$.

1) Man ziehe ab von $\frac{a}{2b}$ den Bruch $\frac{2a}{3b}$.
2) " " " " $\frac{7c}{dd}$ " " $\frac{c}{8dd}$.
3) " " " " $\frac{1}{m}$ " " $\frac{q}{m}$.
4) " " " " $\frac{1}{a}$ " " $-\frac{a}{b}$.

5) Man ziehe ab von $\frac{2x-3y}{4m}$ den Bruch $\frac{3a-b}{m(a-c)}$.

6) = = = = $\frac{q}{b}+\frac{c}{d}$ = = $\frac{m}{ab}-\frac{3c}{bd}$.

7) = = = = $-\frac{pq}{a-b}$ = = $\frac{2a}{c-d}$.

8) = = = = $\frac{p-m}{c-d}$ = = $-\frac{3q+r}{m-n}$.

9) = = = = $-\frac{q}{r-s}$ = = $-\frac{mr}{s+r}$.

1) Man ziehe ab von pq den Bruch $\frac{r+s}{m}$.

2) = = = = ab—c = = $\frac{pr-mq+s}{a-b}$.

3) = = = = qr = = $-\frac{m+b-c}{q}$.

4) = = = = ab—m = = $\frac{3ab-2m+r}{4a-3b}$.

5) = = = = q+p = = $\frac{3q-2p}{m-n+q}$.

6) = = = = ml—pr = = $\frac{mpl+mql-mpr}{m-q+l}$.

1) Man multiplizire $\frac{a}{b}$ mit $\frac{x}{a}$.

2) = = = $\frac{2g}{h}$ = $-\frac{4h}{3g}$.

3) = = = $\frac{mp}{q}$ = $\frac{qr}{ap}$.

4) = = = $\frac{3a}{2b}$ = $\frac{2c}{3d}$.

5) = = = $-\frac{7m}{3d}$ = $-\frac{6e}{a-b}$.

6) = = = $\frac{6aab}{7cdd}$ = $\frac{14ddd}{3abc}$.

7) = = = $\frac{3a-b}{4q}$ = $\frac{3q-qm}{4a-ab}$.

8) = = = $\frac{e}{d}$ = $\frac{3}{4}$ und dann mit $\frac{2bq}{3cd}$.

1) Man dividire $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$.

2) = = $\frac{q-r}{m}$ = $\frac{3q-2r}{2m}$.

3) Man dividire $\frac{3aa}{2bb}$ durch $\frac{4ab}{2bq}$.

4) = = $\frac{7cd}{mp}$ = $-\frac{3q}{p}$.

5) = = $-\frac{a}{b}$ = $\frac{3a}{2b}$.

6) = = $-\frac{c-d}{a-b}$ = $-\frac{p}{q}$.

Man multiplizire:

1) $p+q$ mit $\frac{r}{s}$; 2) $-(r-s)$ mit $\frac{q-a}{p}$; 3) m mit $\frac{a-b}{c-d}$;

4) $-(m+2s)$ mit $-\frac{p+q}{a-b}$; 5) $3mq-5rs$ mit $\frac{pq-rs}{m-n}$.

Man dividire:

1) a durch $\frac{pm}{q}$; 2) $-b$ durch $\frac{a-b}{c-d}$; 3) $m-n$ durch $-\frac{p+q}{r-s}$;

4) $qr-mn$ durch $\frac{ps-qr}{r-m}$; 5) $-(ab-c)$ durch $-\frac{f-e}{b-c}$.

Man löse folgende unreine Brüche auf. Der stärkere und längere Strich scheidet den Zähler vom Nenner.

1) $\frac{\frac{m}{n}}{r}$; 2) $\frac{-p}{\frac{q}{a-b}}$; 3) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{m}$; 4) $\frac{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}{c-d}$;

5) $\frac{a}{\frac{c}{d}}$; 6) $\frac{m-n}{\frac{p}{q}}$; 7) $\frac{p+q}{\frac{a-b}{c}}$; 8) $\frac{e-f}{\frac{d-c}{g+h}}$;

9) $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{r}{s}}$; 10) $\frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{c}{d}}$; 11) $\frac{\frac{a-b}{p-q}}{\frac{r}{s}}$; 12) $\frac{\frac{e-f}{g+h}}{\frac{b-c}{d}}$;

13) $\frac{\frac{pm+r}{q-s}}{\frac{b+c}{d-e}}$; 14) $\frac{\frac{mr-bs+e}{c+d}}{\frac{e-f}{g+h}}$.

Man verwandle folgende Brüche in unendliche Reihen:

1) $\frac{x}{3+by}$; 2) $\frac{4}{aa-3g}$; 3) $\frac{b}{b-1}$; 4) $\frac{c}{c+1}$; 5) $\frac{f}{1-g}$;

6) $\frac{g}{g-h}$; 7) $\frac{1}{n-2}$; 8) $\frac{kl}{3-mm}$; 9) $\frac{-1}{2+3}$.

Zweiter Abschnitt.

Lehre von den Potenzen.

Erstes Kapitel.

Über den Begriff und die Benennungen der Potenzen.

§. 39.

Erklärung.

Unter Potenz versteht man ein Produkt, welches aus lauter gleichen Faktoren besteht, z. B. $36 = 6 \cdot 6$; $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$; $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

§. 40.

Erklärung.

Die Zahl, welche, um die Potenz hervorzubringen, mehrere Mal mit sich selbst multiplizirt wird, heißt die Wurzel der Potenz.

§. 41.

Erklärung.

Man unterscheidet den Grad der Potenz nach der Anzahl der gleichen Faktoren, die in derselben vorkommen. Eine Potenz, welche 2, 3, 4 gleiche Faktoren enthält, heißt eine Potenz vom zweiten, dritten, vierten Grade, oder kurz: die zweite, dritte, vierte Potenz der Wurzel. Um diesen Grad anzuzeigen, setzt man rechts über die Wurzel eine kleine Ziffer und nennt diese den Exponenten der Potenz, z. B. $36 = 6^2$; $64 = 4^3$; $81 = 8^4$. Man lies't dies 36 ist gleich 6 in der zweiten Potenz, 64 ist gleich 4 in der dritten Potenz, 81 ist gleich 3 in der vierten Potenz. Man erspart durch diese Bezeichnung das mehrmalige Hinschreiben der Wurzel. Eben so bei Buchstaben. Statt aaa setzt man a^3; statt pppp setzt man p^4.

§. 42.

Erklärung.

Um anzuzeigen, daß eine Zahl die Wurzel einer gegebenen Potenz sei, schreibt man vor die Potenz das Zeichen $\surd$, und

um zu bestimmen, von welchem Grade der Potenz die Wurzel angezeigt werden soll, schreibt man über die Öffnung des Wurzelzeichens den Exponenten, z. B. $\sqrt[3]{64} = 4$, heißt: Man sehe 64 als die dritte Potenz irgend einer Zahl an und suche diese; sie ist 4, denn $4 . 4 . 4 = 64$, also ist 4 die Wurzel der dritten Potenz von 64. Eben so wird $\sqrt[5]{32} = 2$ oder $2 = \sqrt[5]{32}$ gelesen: 2 ist gleich der Wurzel der fünften Potenz von 32, weil $32 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2$ ist. So werden denn auch die Ausdrücke $p = \sqrt[3]{a}$; $a = \sqrt[4]{a^4}$; $b = \sqrt[2]{b^2}$ und dergl. verständlich sein.

§. 43.

Zusatz.

Die zweite Potenz einer Zahl nennt man auch Quadrat und ihre Wurzel Quadratwurzel, wobei zu merken ist, daß man über der Öffnung des Wurzelzeichens den Exponenten 2 wegläßt, $4 = \sqrt{16}$ heißt: 4 ist die Quadratwurzel von 16.

Die dritte Potenz einer Zahl heißt auch Kubus und ihre Wurzel Kubikwurzel $3^3 = 27$ heißt also: 3 in der dritten Potenz ist gleich 27, oder der Kubus von 3 ist gleich 27. Eben so $\sqrt[3]{27} = 3$ heißt: die Wurzel der dritten Potenz von 27 oder die Kubikwurzel von 27 ist $= 3$.

§. 44.

Zusatz.

Die erste Potenz einer Zahl ist die Zahl selbst; denn sie muß ein Produkt sein, das die Zahl nur einmal als Faktor enthält, also ein Produkt, dessen Faktoren 1 und die Zahl selbst sind. Es ist z. B. $6 = 6 . 1$, also 6 die erste Potenz von $6 = 6^1$. Man läßt indessen den Exponenten 1 gewöhnlich weg, wenn man nicht Gründe hat, ihn besonders zu bemerken.

Zweites Kapitel.

Von der Rechnung mit Potenzen.

Addition und Subtraktion.

§. 45.

Lehrsatz.

Was das Addiren und Subtrahiren betrifft, so ist zu bemerken, daß beides in allen den Fällen nur angezeigt werden kann, wenn Wurzel oder Exponent der Potenz verschieden sind; ist aber beides einerlei, so kann man wirklich addiren und subtrahiren, indem man sowol dieses, als jenes mit den Koeffizienten verrichtet und neben die Summe oder Differenz derselben die gemeinschaftliche Potenz schreibt.

Beispiele.

a^3 addirt zu $a^2 = a^3 + a^2$; $-p^4$ addirt zu $q^4 = q^4 - p^4$; a^2 addirt zu $b^3 = a^2 + b^3$; r^2 abgezogen von $r^3 = r^3 - r^2$; $-q^2$ abgezogen von $p^3 = p^3 + q^2$; m^3 abgezogen von $-q^2 = -q^2 - m^3$.

Aber $a^2 + a^2 = 2a^2$; $3a^3 - 2a^3 = a^3$; $5q^4 + 3q^4 = 8q^4$; und von $3a^5$ abgezogen $a^5 = 2a^5$; von $4a^3$ abgezogen $-3a^3 = 7a^3$; von $-p^2$ abgezogen $-3p^2 = +2p^2$; von $-3q^3$ abgezogen $+2q^3 = -5q^3$.

Multiplikation der Potenzen.

§. 46.

Lehrsatz.

Das Multipliziren der Potenzen wird auch entweder bloß angezeigt, oder wirklich ausgeführt. Das Erstere geschieht, wenn die Wurzeln verschieden sind; man schreibt alsdann die Faktoren bloß neben einander, z. B. $a^3 . p^2 = a^3 p^2$; $b^2 . -q^3 = -b^2 q^3$; $-m^3 . -q^2 = +m^3 q^2$. Das Letztere aber ist der Fall, wenn die Wurzeln einerlei sind, die Exponenten mögen gleich oder verschieden sein. Die Multiplikation geschieht dann nach folgender Regel: Man addire die Potenzexponenten der Faktoren und schreibe die Summe derselben als Exponent rechts über die gemeinschaft-

liche Wurzel, z. B. $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$. Es sei $a = 4$, so ist $a^3 \cdot a^2 = 4^3 \cdot 4^2 = 4^5 = 64 \cdot 16 = 1024$. Eben so ist $-a^3 \cdot a^5 = -a^8$; $-p^2 \cdot -p^2 = +p^4$; $3^5 \cdot 3^2 = 3^7 = 243 \cdot 9 = 2187$.

Die Richtigkeit der Regel erhellet so: Es ist $a^3 = aaa$ und $a^2 = aa$, also $a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa$, d. h. im Produkte kommt die Wurzel a so vielmal vor, als in beiden Faktoren zusammengenommen, folglich ist dies Produkt eine Potenz der Wurzel, deren Exponent gleich ist der Summe der Exponenten der Faktoren.

Division der Potenzen.

§. 47.

Lehrsatz.

Das Dividiren wird auch bloß angezeigt, wenn die Wurzel des Dividendus von der des Divisors verschieden ist, z. B. a^3 dividirt durch b^2 kann nicht anders ausgedrückt werden, als $\frac{a^3}{b^2}$. Sind aber die Wurzeln im Dividendus und Divisor einerlei, so kann die Division wirklich vollzogen werden, nach der Regel: Man ziehe den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus ab, und schreibe den Rest als Exponent rechts über die gemeinschaftliche Wurzel, z. B. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$ und in Zahlen $\frac{2^5}{2^2} = 2^3 = 8 = \frac{32}{4}$; $\frac{6^3}{6^2} = 6^{3-2} = 6^1 = \frac{216}{36}$. Die Richtigkeit erhellet daraus, daß $a^5 = aaaaa$ und $a^3 = aaa$, also $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa}$ ist, wo denn offenbar im Dividendus sich so viel Faktoren aufheben, als der Divisor hat und zum Quotienten $aa = a^2$ kommt.

§. 48.

Zusatz.

Es kann der Fall sein, daß der Exponent des Divisors dem des Dividendus gleich ist, z. B. wenn a^3 durch a^3 dividirt werden soll; dann kommt nach der Regel $a^{3-3} = a^0$ zum Quotienten heraus. Fragt man, was dieser Ausdruck bedeuten solle, so überlege man, daß auf gewöhnliche Art dividirt $\frac{a^3}{a^3} = 1$ ist, so wie jede Zahl, durch sich selbst dividirt, zum Quotienten 1 gibt.

Also ist a^0, d. h. jede Zahl, sie mag groß oder klein, eine ganze oder ein Bruch sein, sobald sie in der 0ten Potenz gedacht wird, $= 1$.

§. 49.

Es kann aber auch der Fall sein, daß der Exponent des Divisors größer ist, als der des Dividendus; dann kommt der Exponent des Quotienten negativ, z. B. $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Was soll dieser Ausdruck bedeuten? Es ist $\frac{a^3}{a^5} = \frac{aaa}{aaaaa}$. Man hebe diesen Bruch mit dem Zähler, so bekommt man im Zähler den Quotienten 1 und im Nenner den Quotienten aa oder a^2. Folglich ist $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$, d. h. jede Potenz mit einem negativen Exponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler $= 1$, der Nenner aber eine Potenz der Wurzel ist, die denselben Exponenten positiv hat, der in der andern Form negativ ist. Also ist überhaupt $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ und in Zahlen $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

§. 50.

Lehrsatz.

Um ein Produkt auf eine Potenz zu erheben, macht man von jedem Faktor die verlangte Potenz und multiplizirt diese mit einander. Das Anzeigen dieser Operation geschieht so, daß man die Faktoren in eine Klammer schließt und den Exponenten der Potenz rechts darüber an die Außenseite der Klammer setzt. Es ist also $(ab)^3 = a^3b^3$; denn $(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaabbb = a^3b^3$, oder in Zahlen $(6 \cdot 8)^2 = 6^2 \cdot 8^2 = 36 \cdot 64 = 2304$. Wollte man beim Anzeigen die Klammer weglassen, so würde der Exponent sich bloß auf den letzten Faktor beziehen; ab^3 heißt bloß, a soll mit der dritten Potenz von b multiplizirt werden.

§. 51.

Lehrsatz.

Umgekehrt wird eine Wurzel aus einem Produkte gezogen, wenn man aus jedem Faktor die verlangte Wurzel zieht und die gefundenen Wurzeln mit einander multiplizirt. Denn von $(ab)^3 = a^3 \cdot b^3$ ist die Kubikwurzel $= ab$, aber diese Faktoren a und b werden gefunden, wenn man von a^3 und von b^3 die Kubikwurzel

nimmt, also ist $\sqrt[3]{(ab)^3} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} = ab$, folglich auch im Allgemeinen $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ und $\sqrt[4]{pq} = \sqrt[4]{p} \cdot \sqrt[4]{q}$ oder in Zahlen $\sqrt{36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 3 \cdot 2 = 6$.

§. 52.

Zusatz.

Ein Quotient oder Bruch wird auf eine Potenz erhoben, wenn man jeden Faktor auf die verlangte Potenz erhebt, und die Potenz des Dividendus oder Zählers durch die Potenz des Divisors oder Nenners dividirt. Beim Anzeigen wird wiederum der Quotient oder Bruch in eine Klammer geschlossen, z. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$; denn $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$. In Zahlen: $\left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$.

Wollte man beim Anzeigen die Klammer weglassen, so würde sich der Exponent bloß auf den Dividendus oder Zähler beziehen. $\frac{a^3}{b}$ würde heißen: die dritte Potenz von a durch b dividiren.

§. 53.

Zusatz.

Umgekehrt wird aus einem Quotienten oder Bruche eine Wurzel gezogen, wenn man sowol aus dem Dividendus (Zähler), als aus dem Divisor (Nenner) die verlangte Wurzel zieht und erstere durch die letztere dividirt. Denn so wie $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$ ist, so ist umgekehrt $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}$. Aus dem letzteren Ausdrucke wird aber offenbar a und b gefunden, wenn man aus a^3 und aus b^3 die Kubikwurzel zieht, also $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}}$, folglich auch $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}}$, und in Zahlen $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$.

§. 54.

Lehrsatz.

Soll eine Potenz auf einen neuen Grad erhoben werden, so wird der alte Exponent mit dem neuen multiplizirt und das Produkt

als Exponent rechts über die Wurzel geschrieben. Beim Anzeigen wird die Wurzel mit dem alten Exponenten in eine Klammer geschlossen, z. B. $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$. Denn $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^{3 \cdot 2} = a^6$, und in Zahlen $(4^3)^3 = 4^9 = 131072$.

§. 55.

Umgekehrt, soll aus einer Potenz die Wurzel eines gewissen Grades gezogen werden, so dividirt man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel und schreibt den Quotienten als Exponenten über die Wurzel. Denn von $(a^3)^2 = a^6$ ist die Quadratwurzel $= a^3$ und so wie der Exponent 6 aus der Multiplikation der Exponenten 3 und 2 entstand, so entsteht der Exponent 3 aus der Division des Exponenten 6 durch 2, d. h. durch den Exponenten der Quadratwurzel, also ist $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$. So auch $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, weil $a = a^1$ ist; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. w.

So sieht man also, daß man jedesmal statt der Wurzelzeichen Brüche als Exponenten ansetzen kann, daß also Wurzeln auch nichts anders sind, als Potenzen, und daß man beliebig Wurzeln in Potenzen und Potenzen in Wurzeln verwandeln kann. So wie z. B. $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, so ist auch $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ und also $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$.

§. 56.

Zusatz.

Man kann sich auch die gebrochenen Exponenten negativ denken, z. B. $a^{-\frac{2}{3}}$. Dieser Ausdruck ist nach §. 49. $= \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$ und da $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, so ist $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$. Umgekehrt ist $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{3}{2}}$.

§. 57.

Zusatz.

Alle Zahlen unsers Zahlensystems lassen sich als Produkte aus den ersten 9 Ziffern in irgend eine Potenz der 10 vorstellen, deren Exponent entweder positiv, oder Null, oder negativ ist. Es sei z. B. die Zahl 68794,5326 gegeben, so sind die Werthe der

einzelnen Ziffern, bei der linken Hand angefangen, folgende. Es ist die gegebene Zahl $= 6 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1}{1000} + 6 \cdot \frac{1}{10000}$. Nun ist $10000 = 10^4$; $1000 = 10^3$; $100 = 10^2$; $10 = 10^1$; $1 = 10^0$; $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$; $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$; $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$; $\frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$. Folglich ist die gegebene Zahl $68794{,}5326 = 6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$.

Wenn man die Exponenten dieser Potenzen von 10, womit jede Ziffer multiplizirt ist, gerade über die Ziffer (nicht etwas rechts) schreibt, so nennt man sie Ordnungsexponenten. Obige Zahl kann also mit ihren Ordnungsexponenten auch so dargestellt werden: Es ist $68794{,}5326 = 6^{4} + 8^{3} + 7^{2} + 9^{1} + 4^{0} + 5^{-1} + 3^{-2} + 2^{-3} + 6^{-4}$. Der Ordnungsexponent zeigt also immer an, mit welcher Potenz von 10 die Ziffer multiplizirt gedacht werden muß. Finde ich z. B. 8^{7}, so ist dies $= 8 \cdot 10^7 = 8 \cdot 10000000$, und $3^{-4} = 3 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot \frac{1}{10000} = 0{,}0003$. Es zeigt also auch der Ordnungsexponent jedesmal an 1) wenn er positiv ist, wie viel Nullen an der rechten Seite der Ziffer, und 2) wenn er negativ ist, wie viel Nullen an der linken Seite der Ziffer gedacht werden müssen.

§. 58.

Zusatz.

Alle Ordnungsexponenten, welche Null übersteigen, nennt man höhere. Wenn nun eine Ziffer in einer höhern Ordnung auf irgend eine Potenz erhoben werden soll, so hat man allemal ein Produkt zu potenziren und das Erheben geschieht nach §. 50. Es ist also z. B. $(8^{3})^4 = (8 \cdot 10^3)^4 = 8^4 \cdot 10^{3 \cdot 4} = 8^4 \cdot 10^{12} = 8^{12}$, d. h. man muß erstlich die Zahl 8 an und für sich auf die vierte Potenz erheben und diese Potenz dann mit 10^3 auf die vierte Potenz erhoben, oder mit 10^{12} multipliziren; es kommt $4096000000000000 = 4096$. Daraus fließt denn die Regel: Wenn eine Zahl in einer höhern Ordnung auf irgend eine Potenz erhoben werden soll, so mache man erst von der Zahl selbst, als Einer betrachtet, die verlangte Potenz und gebe dieser, d. h. ihrer

letzten Ziffer, die Ordnung, welche das Produkt aus dem Ordnungsexponenten der Wurzel und dem Exponenten der Potenz anzeigt. Nennt man irgend eine Zahl überhaupt a und ihren Ordnungsexponenten m, die Potenz aber, welche davon gemacht werden soll, die nte, so ist $\left(\overset{m}{a}\right)^n = \overset{mn}{a^n}$, d. h. = a in der nten Potenz, erhoben auf die mnte Ordnung. Da die Anzahl der Nullen mit dem Ordnungsexponenten übereinstimmt, so findet man auch die Potenz einer Zahl, deren Ordnung durch beigesetzte Nullen ausgedrückt ist, wenn man an die Potenz der Zahl so vielmal mehr Nullen hängt, wie bei der Wurzel standen, als der Exponent der Potenz Einheiten hat. Gesetzt, die Wurzel = q hat m Nullen und sie soll auf die nte Potenz erhoben werden, so werden an q^n noch mn Nullen gehängt. Es sei q = 6, m = 3; n = 4, so ist $6000^4 = 1296000000000000$.

Ist der Ordnungsexponent negativ, so gilt ganz dieselbe Regel, nur daß, wenn er durch Nullen ausgedrückt ist, die Nullen an der linken Seite zu stehen kommen, z. B. $\left(\overset{-3}{3}\right)^4 = 0{,}003^4 = \overset{-12}{3^4} = 0{,}000000000081$. Die vierte Potenz von 3 ist hier nicht eine einfache Ziffer, sondern zusammengesetzt; deswegen stehen nur 11 Nullen, weil die zwölfte Null durch die 8 ersetzt wird, denn nur die letzte Ziffer 1 des Produkts 81 steht in der — 12ten Ordnung, aber die 8 in der — 11ten.

§. 59.

Zusatz.

Soll aus einer Zahl in einer höhern Ordnung die Wurzel eines gewissen Grades gezogen werden, so hat man ebenfalls die Wurzel aus einem Produkte zu ziehen und man muß nach §. 51. verfahren. Es ist also $\overset{3}{\sqrt{}}\overset{6}{8} = \sqrt[3]{(8 \cdot 10^6)} = \overset{3}{\sqrt{8}} \cdot \overset{3}{\sqrt{10^6}} = 2 \overset{3}{\sqrt{10^6}} = 2 \cdot 10^{\frac{6}{3}} = 2 \cdot 10^2 = \overset{2}{2}$, d. h. man ziehe erstlich aus der Zahl selbst, als Einer betrachtet, die verlangte Wurzel (hier die Kubikwurzel) und gebe dann dieser Wurzel eine Ordnung, deren Exponent gefunden wird, wenn man (nach §. 55.) die Ordnung der gegebenen Zahl durch den Exponenten der Wurzel dividirt. Diese Division muß aufgehen, wenn die Wurzel sich wirklich vollständig soll darstellen lassen. Ist die Ordnung durch Nullen ausgedrückt, so findet man die Anzahl der Nullen in der Wurzel, wenn man die Anzahl der Nullen in der Potenz durch

den

den Exponenten der Wurzel dividirt. Obiges Beispiel $\sqrt[3]{8^6}$ ist $= \sqrt[3]{8000000} = 200$.

§. 60.

Zusatz.

Aus diesen Betrachtungen über die Natur der Ordnungsexponenten ergeben sich auch folgende Sätze, worauf die Regeln für die Multiplikation und Division ganzer Zahlen und Dezimalbrüche beruhen.

1) Wenn zwei Zahlen mit einander multiplizirt werden, so suche man erst ihr Produkt als Einer und gebe dann diesem Produkte, d. h. seiner letzten Ziffer, eine Ordnung, deren Exponent gleich ist der Summe der Ordnungsexponenten der Faktoren. Es ist also $8^3 \cdot 4^2 = 8 \cdot 4^{3+2} = 32^5$; denn $8^3 \cdot 4^2 = 8 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2$ $= 8 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 32 \cdot 10^{3+2} = 32 \cdot 10^5 = 32^5$, und wenn statt der Ordnungsexponenten Nullen stehen, so ist $8^3 \cdot 4^2 = 8000 \cdot 400 = 3200000$.

Fernet ist $8^3 \cdot 4^0 = 8 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^0 = 8 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^0$ $= 8 \cdot 4 \cdot 10^{3+0} = 8 \cdot 4 \cdot 10^3 = 32 \cdot 10^3 = 32^3 = 32000$, d. h. wenn der eine Faktor ein Einer ist, so ist die Ordnung des Produkts gleich der Ordnung des andern höhern Faktors.

Ferner $8^3 \cdot 4^{-2} = 8 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}$ $= 8 \cdot 4 \cdot 10^{3-2} = 8 \cdot 4 \cdot 10^1 = 32 \cdot 10^1 = 32^1$, oder $8000 \cdot 0{,}04 = 320$. Der Ordnungsexponent des Produkts wird also um so viel kleiner, als der negative Ordnungsexponent des Dezimalbruchs Einheiten hat, weil 3 und -2 addirt, so viel ist, als 2 von 3 abgezogen.

Eben so ist $8^3 \cdot 4^{-5} = 8 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-5} = 8 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5}$ $= 8 \cdot 4 \cdot 10^{3-5} = 32 \cdot 10^{-2} = 32^{-2}$, oder $8000 \cdot 0{,}00004$ $= 0{,}32$.

Endlich ist $8^{-3} \cdot 4^{-2} = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}$ $= 8 \cdot 4 \cdot 10^{-3-2} = 32 \cdot 10^{-5} = 32^{-5}$, oder $0{,}008 \cdot 0{,}04$ $= 0{,}00032$.

Hieraus lassen sich alle Regeln für das Multipliziren der ganzen Zahlen und Dezimalbrüche in Beziehung auf die Ordnung der Ziffern des Produkts vollständig herleiten.

2) Wenn zwei Zahlen durch einander dividirt werden, so suche man erst ihren Quotienten als Einer und gebe dann diesem d. h. seiner letzten Ziffer, eine Ordnung, deren Exponent gefunden wird, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Divisors abzieht. Es ist also

$8^5 : 4^3 = \frac{8}{4}^{5-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 2$; denn $8^5 : 4^3 = 8 \cdot 10^5 : 4 \cdot 10^3 = \frac{8}{4} \cdot \frac{10^5}{10^3} = 2 \cdot 10^{5-3} = 2 \cdot 10^2 = 2^2$ oder 800000 : 4000 = 200.

Ferner $8^3 : 4^5 = \frac{8 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^5} = \frac{8}{4} \cdot \frac{10^3}{10^5} = 2 \cdot 10^{3-5} = 2 \cdot 10^{-2} = 2$, oder 8000 : 400000 = 0,02.

Ferner $8^{-3} : 4^2 = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^2} = \frac{8}{4} \cdot 10^{-3-2} = 2 \cdot 10^{-5} = 2$, oder 0,008 : 400 = 0,00002.

Ferner $8^{-3} : 4^{-2} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{8}{4} \cdot 10^{-3+2} = 2 \cdot 10^{-1} = 2$, oder 0,008 : 0,04 = 0,2.

Endlich $8^{-3} : 4^{-5} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-5}} = \frac{8}{4} \cdot 10^{-3+5} = 2 \cdot 10^2 = 2^2$, oder 0,008 : 0,00004 = 200.

Auf diesen Sätzen beruhen denn auch alle Regeln für die Division der ganzen Zahlen und Dezimalbrüche in Beziehung auf die Ordnung des Quotienten.

§. 61.

Die verschiedenen Arten von Exponenten, welche wir kennen gelernt haben, geben noch folgende Beispiele zur Multiplikation und Division der Potenzen.

Multiplikation.

$a^3 \cdot a^{-2} = a^{3-2} = a^1$, denn $a^3 \cdot a^{-2} = aaa \cdot \frac{1}{aa} = \frac{aaa}{aa} = a = a^1$.

$a^{-3} \cdot a^2 = a^{-3+2} = a^{-1}$, denn $a^{-3} \cdot a^2 = \frac{1}{aaa} \cdot aa = \frac{aa}{aaa} = \frac{1}{a} = a^{-1}$.

$a^{-3} \cdot a^{-4} = a^{-3-4} = a^{-7}$, denn $a^{-3} \cdot a^{-4} = \frac{1}{aaa} \cdot \frac{1}{aaaa} = \frac{1}{aaaaaaa} = \frac{1}{a^7} = a^{-7}$.

$a^4 \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{4+\frac{3}{2}} = a^{\frac{11}{2}} = a^{\frac{14}{2}} = \sqrt{a^{14}}$.

$a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{17}{20}} = \sqrt[20]{a^{17}}$.

$a^{-3} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{-3+\frac{2}{3}} = a^{-\frac{7}{3}} = a^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{a^7}$.

$a^5 \cdot a^{-\frac{5}{6}} = a^{5-\frac{5}{6}} = a^{4\frac{1}{6}} = a^{\frac{25}{6}} = \sqrt[6]{a^{25}}$.

$a^{-4} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{-4-\frac{3}{4}} = a^{-4\frac{3}{4}} = a^{-\frac{19}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{19}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^{19}}}$.

$a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{17}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{17}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^{17}}}$.

$a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

$a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{-\frac{5}{8}} = a^{\frac{7}{3}-\frac{5}{8}} = a^{-\frac{7}{24}} = \frac{1}{a^{\frac{7}{24}}} = \frac{1}{\sqrt[24]{a^7}}$.

$\sqrt[5]{a^3} : a^4 = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^4 = a^{4\frac{3}{5}} = a^{\frac{23}{5}} = \sqrt[5]{a^{23}}$.

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{3}{3}+\frac{3}{5}} = a^{\frac{19}{15}} = \sqrt[15]{a^{19}}$.

$\sqrt[4]{a^3} \cdot \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{-3} = a^{\frac{3}{4}-3} = a^{-2\frac{1}{4}} = a^{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^9}}$.

$\sqrt[3]{a^5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1$.

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{5}{4}}} = a^{-\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{5}{4}} = a^{-\frac{31}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{31}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^{31}}}$.

Division.

$a^5 : a^2 = a^3$.

$a^4 : a^{-3} = a^{4-(-3)} = a^{4+3} = a^7$; es ist nämlich auch

$a^4 : a^{-3} = a^4 : \frac{1}{a^3} = a^4 \cdot \frac{a^3}{1} = a^4 \cdot a^3 = a^7$.

$a^{-2} : a^5 = a^{-2-5} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$; es ist nämlich auch $a^{-2} : a^5$

$= \frac{1}{a^2} : a^5 = \frac{1}{a^2 \cdot a^5} = \frac{1}{a^7} = a^{-7}$.

$a^{-3} : a^{-4} = a^{-3-(-4)} = a^{-3+4} = a^1 = a$; es ist nämlich

auch $a^{-3} : a^{-4} = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{a^4}{1} = \frac{a^4}{a^3} = a = a^1$.

$a^{-5} : a^{-3} = a^{-5-(-3)} = a^{-5+3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; es ist nämlich

auch $a^{-5} : a^{-3} = \frac{1}{a^5} : \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{a^3}{1} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$.

$a^3 : a^{\frac{3}{4}} = a^{3-\frac{3}{4}} = a^{2\frac{1}{4}} = a^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{a^9}$.

$a^{\frac{3}{5}} : a^2 = a^{\frac{3}{5}-2} = a^{\frac{3}{5}-\frac{6}{5}} = a^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$.

$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{5}{10}-\frac{4}{5}} = a^{\frac{25}{10}-\frac{8}{10}} = a^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{a}$.

$a^5 : a^{-\frac{1}{2}} = a^{5-(-\frac{1}{2})} = a^{5+\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{2}} = \sqrt{a^{11}}$.

$a^{-4} : a^{\frac{3}{4}} = a^{-4-\frac{3}{4}} = a^{-4\frac{3}{4}} = a^{-\frac{19}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{19}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^{19}}}$.

$a^{-3} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{-3-(-\frac{1}{2})} = a^{-3+\frac{1}{2}} = a^{-2\frac{1}{2}} = a^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{2}}}$
$= \frac{1}{\sqrt{a^5}}$.

$a^{-\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{17}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{17}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^{17}}}$.

$a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{5}{6}} = a^{-\frac{1}{2}-(-\frac{5}{6})} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

Dies Beispiel kann zeigen, wie man öfters durch dergleichen Reduktionen auf einen bequemern und leichtern Ausdruck kommen kann. Da nämlich $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ und $a^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{6}}}$
$= \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$ ist, so heißt der Ausdruck $a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{5}{6}}$ so viel, als: man soll den Bruch $\frac{1}{\sqrt{a}}$ (1 dividirt durch die Quadratwurzel von a) dividiren durch eine Zahl, welche man findet, wenn 1 durch die Wurzel der sechsten Potenz aus a auf die fünfte Potenz erhoben, dividirt wird. Diese Rechnung könnte, wenn die Zahl a gerade nicht sehr günstig gegeben ist, leicht eine Arbeit von mehrern Stunden sein, wogegen der damit ganz gleiche und durch obige Reduktion gefundene Ausdruck $\sqrt[3]{a}$ in einer ungleich kürzern Zeit berechnet werden kann.

$a^{\frac{4}{5}} : a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{5}-(-\frac{2}{3})} = a^{\frac{4}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{22}{15}} = \sqrt[15]{a^{22}}$.

$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[5]{a^6} = a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{6}{5}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{6}{5}} = a^{\frac{10-18}{15}} = a^{-\frac{8}{15}} = \frac{1}{a^{\frac{8}{15}}}$
$= \frac{1}{\sqrt[15]{a^8}}$.

$\sqrt[4]{a^3} : \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{3}{4}} : \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{4}-(-\frac{2}{3})} = a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}$
$= a^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{a^{17}}$.

$\frac{1}{\sqrt{a}} : a^3 = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} : a^3 = a^{-\frac{1}{2}} : a^3 = a^{-\frac{1}{2}-3} = a^{-3\frac{1}{2}}$
$= a^{-\frac{7}{2}} = \sqrt{a^7}$.

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} : \frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} : \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{4}{3}} : a^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{4}{3}-(-\frac{3}{2})}$
$= a^{-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}} = a^{-\frac{8}{6}+\frac{9}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

§. 62.

Beispiele zur Erhebung auf Potenzen und zum Wurzelausziehen.

Erhebung auf Potenzen:

$(a^{-5})^2 = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$.

$(a^{\frac{3}{4}})^3 = a^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{a^9}$.

$(a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$.

$(a^{-2})^{\frac{3}{4}} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$.

$(a^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{10}{18}} = \sqrt[18]{a^{10}}$.

$(a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} = a^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} = a^{-\frac{6}{12}} = a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Auch dies ist ein weit kürzerer Ausdruck als der ursprüngliche; denn da $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ ist, so müßte man erstlich von a das Quadrat machen, daraus die Kubikwurzel ziehen und mit dieser Zahl in 1 dividiren. Was nun da herauskäme, sollte auf die $\frac{3}{4}$ Potenz erhoben werden, d. h. man müßte den herausgekommenen Quotienten auf die dritte Potenz erheben und aus derselben die Wurzel der vierten Potenz ziehen. Statt dieser ganzen mühevollen Arbeit hat man nun vermöge des Ausdrucks $\frac{1}{\sqrt{a}}$ nichts weiter zu thun, als aus a die Quadratwurzel zu ziehen und damit in 1 zu dividiren.

Wurzel ausziehen:

$\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}}$.

$\sqrt[3]{a^{-4}} = a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$.

$\sqrt[3]{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

$\sqrt[12]{a^{-\frac{5}{6}}} = a^{-\frac{5}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$.

$\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt[5]{a^6}}} = \frac{\sqrt[2]{1}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^{\frac{6}{5}}}} = \frac{1}{a^{\frac{6}{15}}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$,

ein Ausdruck, der ebenfalls weit kürzer ist, als der gegebene.

§. 63.

Beispiele zur Selbstübung über die Lehre von Potenzen.

I. Man löse folgende Ausdrücke auf:

1) $6^3 =$; 2) $86^4 =$; 3) $4q^x =$; 4) $(\frac{3}{4})^x =$;
5) $97^0 =$; 6) $(\frac{5}{3})^0 =$; 7) $q^0 =$; 8) $8^{-x} =$;
9) $11^{-5} =$; 10) $q^{-m} =$; 11) $8^{\frac{2}{3}} =$; 12) $m^{\frac{p}{q}} =$;
13) $16^{-\frac{1}{2}} =$; 14) $a^{-\frac{1}{3}} =$; 15) $\frac{6^{\frac{2}{3}}}{8^{-\frac{1}{2}}} =$.

II. Man multiplizire:

1) p^4 mit $p^3 =$;
2) p^{-3} " $p^5 =$;
3) p^7 " $p^{-4} =$;
4) p^3 " $p^{-6} =$;
5) p^{-3} " $p^{-2} =$;
6) q^a " $q^{-b} =$;
7) $q^{\frac{2}{3}}$ " $q^{\frac{3}{5}} =$;
8) q^3 mit $q^{\frac{2}{3}} =$;
9) q^{-4} " $q^{\frac{5}{6}} =$;
10) $q^{-\frac{1}{2}}$ " $q^{-\frac{1}{3}} =$;
11) $q^{\frac{2}{3}}$ " $q^{-\frac{5}{6}} =$;
12) $\sqrt[5]{m^6}$ " $\sqrt[3]{m^4} =$;
13) $\frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}$ " $\sqrt[4]{m^5} =$;
14) $\frac{1}{\sqrt[4]{m^3}}$ " $\frac{1}{\sqrt[3]{m^4}} =$.

III. Man dividire:

1) a^3 durch $a^6 =$;
2) a^5 " $a^{-3} =$;
3) a^{-2} " $a^3 =$;
4) a^{-5} " $a^{-3} =$;
5) a^{-1} " $a^{-3} =$;
6) $a^{\frac{2}{3}}$ " $a^{\frac{1}{4}} =$;
7) $a^{-\frac{3}{4}}$ " $a^{\frac{5}{6}} =$;
8) $a^{-\frac{1}{2}}$ " $a^{-\frac{1}{4}} =$;
9) a^4 " $a^{-\frac{3}{5}} =$;
10) $a^{-\frac{5}{6}}$ " $a^{-3} =$;
11) a^{-2} durch $a^{\frac{1}{3}} =$;
12) a^3 " $a^{\frac{4}{3}} =$;
13) a^p " $a^q =$;
14) a^{-m} " $a^n =$;
15) $a^{\frac{p}{q}}$ " $a^m =$;
16) $a^{\frac{m}{n}}$ " $a^{\frac{p}{q}} =$;
17) $a^{-\frac{b}{c}}$ " $a^{\frac{d}{e}} =$;
18) $\sqrt[m]{a^b}$ " $\sqrt[q]{a^b} =$;
19) $\sqrt[p]{a^{-m}}$ " $\sqrt[q]{a^n} =$;
20) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ " $a^{-3} =$;

21) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^{-2}}}$ durch $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} =$; 23) $\frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}$ durch $\frac{3}{4}a^{\frac{2}{3}} =$;

22) $8a^4$: $2a^3 =$; 24) $\frac{15}{a^4}$: $\frac{5}{a^3} =$;

IV. Man löse folgende Klammern auf:

1) $(ab)^m =$; 2) $\left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{3}{2}} =$; 3) $(8qp)^{-m} =$;

4) $(9a)^{\frac{1}{2}} =$; 5) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 =$; 6) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^{-2} =$;

7) $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{3}} =$; 8) $\left(\frac{5pm}{6qr}\right)^5 =$.

V. Man erhebe zu Potenzen:

1) $(a^2)^3 =$; 2) $(a^{\frac{2}{3}})^2 =$; 3) $(a^{-4})^2 =$; 4) $(a^2)^{-3} =$;

5) $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} =$; 6) $(a^3)^{-\frac{2}{3}} =$; 7) $(a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{4}} =$; 8) $(a^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} =$.

VI. Man drücke folgende Wurzeln durch gebrochene Exponenten aus:

1) $\sqrt[3]{a} =$; 2) $\sqrt[4]{ab} =$; 3) $\sqrt[5]{\frac{p}{q}} =$; 4) $\sqrt[3]{a^2} =$;

5) $\sqrt[3]{a^2b^3} =$; 6) $\sqrt[7]{a^{-3}b^{\frac{3}{4}}} =$; 7) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}} =$;

8) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}} =$; 9) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^{\frac{3}{4}}}} =$; 10) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-\frac{2}{3}}}} =$.

VII. Man ziehe folgende Wurzeln:

1) $\sqrt{ab} =$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{n}} =$; 3) $\sqrt[4]{a^3b^4} =$;

4) $\sqrt[5]{\frac{p^3}{q^2}} =$; 5) $\sqrt[3]{8p} =$; 6) $\sqrt[4]{81.256.16} =$;

7) $\sqrt[3]{\frac{8.27}{125.216}} =$.

Drittes Kapitel.

Vom Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 64.

Erklärung.

Eine Quadratwurzel ist einfach, wenn sie nur aus Einer Ziffer besteht, zusammengesetzt, wenn mehrere Ziffern neben einander stehen. Zu den einfachen Wurzeln gehören die ersten 9 Ziffern, ihre Quadrate zeigt folgendes Täfelchen.

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Jedes Quadrat hat also eine einfache Wurzel, wenn es eins aus diesem Täfelchen ist, im Gegentheil ist die Wurzel zusammengesetzt, z. B. die Quadratwurzel von 49 ist 7, also einfach, dagegen die Quadratwurzel von 42 wäre zusammengesetzt, denn sie muß zwischen 6 und 7 fallen.

§. 65.

Zusatz.

Auch solche Wurzeln kann man als einfach ansehen, die bloß aus Einer Ziffer in einer höhern Ordnung bestehen. Das Quadrat derselben findet man ebenfalls im obigen Täfelchen, nur daß es auf eine doppelt so große Ordnung erhoben werden, oder doppelt so viel Nullen bekommen muß, als die Wurzel hatte, nach §. 58. Es ist also $(\overset{3}{4})^2$ oder $4000^2 = \overset{6}{16} = 16000000$ und $(\overset{-3}{6})^2$ oder $0{,}006^2 = \overset{-6}{36} = 0{,}000036$.

§. 66.

Von jedem Quadrate einer einfachen Zahl findet man die Wurzel gleich unmittelbar aus dem Täfelchen. Dies ist auch der Fall, wenn das Quadrat im Täfelchen in einer höhern Ordnung steht. Die Wurzel eines solchen ist dann nach §. 59. gleich der im Täfelchen stehenden Wurzel, erhoben auf eine Ordnung, die dem Quotienten gleich ist, welcher entsteht, wenn man den Ordnungsexponenten des Quadrats durch 2 dividirt. Damit ist denn auch einerlei, wenn man der Wurzel halb so viel Nullen gibt, als das Quadrat hatte. Z. B. $\sqrt{16} = 4$, also auch

$\sqrt[4]{16} = \sqrt{160000} = 4^2 = 400$ und $\sqrt[-4]{16} = \sqrt{0{,}0016} = 4^{-2} = 0{,}04$.

§. 67.

Steht dagegen eine Quadratzahl weder an und für sich noch in einer höhern Ordnung im obigen Täfelchen, so ist die Wurzel zusammengesetzt. Wie diese gefunden werde, lehren die folgenden Sätze.

§. 68.

Lehrsatz.

Jede zusammengesetzte Zahl kann man als zweitheilig ansehen. Es sei überhaupt der erste Theil = a, der zweite = b, also die ganze Zahl = a + b, so wird ihr Quadrat gefunden, wenn man a + b mit sich selbst multiplizirt,

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

d. h. in Worten: Das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Quadrate des ersten Theils, (a^2) aus dem doppelten Produkte des ersten Theils in den zweiten ($2ab$) und aus dem Quadrate des zweiten Theils (b^2).

Es sei die gegebene Wurzel = 67, so ist a = 60 und b = 7, also

a^2	$= 60^2$	$= 3600$
$2ab$	$= 2 . 60 . 7$	$= 840$
b^2	$= 7^2$	$= 49$
Also $a^2 + 2ab + b^2$	$= 67^2$	$= 4489$.

§. 69.

Zusatz.

Es ist in diesem Beispiele a ein Zehner und b ein Einer. Nun ist das Quadrat von 6 Zehner = 36 Hunderte, folglich fängt dasselbe mit der Ordnung der Hundert an und geht bis in die Tausende, aber nicht höher; denn das Quadrat des höchsten Zehners oder 90^2 ist = 8100 und erreicht also die Zehntausende nicht.

Das Doppelprodukt $2ab$ fängt mit der Stelle der Zehner an und kann höchstens bis in die Tausende gehen; denn setzt man für a und b den höchsten Zehner und Einer, so ist $2ab = 2 . 90 . 9 = 1620$, dessen höchste Ziffer also nicht die Tausende übersteigt.

Das Quadrat des Einers fängt mit den Einern an und geht höchstens bis in die Zehner, denn setzt man für b den größten Einer, oder 9, so ist $b^2 = 9^2 = 81$, welches die Hundert nicht erreicht.

§. 70.

Zusatz.

Jede Quadratzahl hat doppelt so viel Ziffern als die Wurzel, oder doppelt so viel, weniger 1, also eine Wurzel von 3, 4, 5 Ziffern hat zum Quadrate eine Zahl von 6 oder 5, 8 oder 7, 10 oder 9 Ziffern.

Dies ergibt sich aus einer leichten Vergleichung. Die Quadrate der einzifferichten Wurzeln (1 bis 9) gehen von 1 bis 81 und haben also 1 oder 2 Ziffern; die Quadrate der zweizifferichten Wurzeln (10 bis 99) gehen von 100 bis 9801 und haben also 3 bis 4 Ziffern; die Quadrate der dreizifferichten Wurzeln (100 bis 999) gehen von 10000 bis 998001 und haben also 5 bis 6 Ziffern. So geht dies immer fort und also wird der Satz durch alle mögliche Beispiele bewiesen.

§. 71.

Zusatz.

Theilt man also eine Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Klassen jede von 2 Ziffern (doch kann die erste Klasse linker Hand auch nur eine Ziffer haben, wenn nämlich die Quadratzahl nur doppelt so viel Ziffern weniger eins, als die Wurzel hat), so hat die Wurzel gerade so viel Ziffern als das Quadrat Klassen hat.

§. 72.

Zusatz.

In der höchsten Klasse muß nothwendig das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel, in den 2 höchsten Klassen das Quadrat der beiden höchsten Ziffern, in den 3 höchsten Klassen das Quadrat der 3 höchsten Ziffern der Wurzel stecken u. s. w. Ist z. B. 3224422656 das Quadrat von 56784 und theilt man das Quadrat durch Striche in Klassen, nämlich so: 32|24|42|26|56, so steckt in der höchsten Klasse 32 (= 32000000) das Quadrat von 5 (= 50000), in den 2 höchsten Klassen 3224 (= 3224000000) das Quadrat von 56 (= 56000), in den 3 höchsten Klassen 322442 (= 3224420000) das Quadrat von 567 (= 56700), in den 4 höchsten Klassen 32244226 (= 3224422600) das Quadrat von 5678 (= 56780) u. s. w.

§. 73.

Zusatz.

Die bisherigen Betrachtungen werden die Regeln geben, wie man eine zusammengesetzte Quadratwurzel finden könne. Wir wollen dies an einem Beispiele zeigen. Es sei die Quadratzahl 7569 gegeben. Sie ist in Klassen getheilt = 75|69|, also die Wurzel zweiziffericht, folglich überhaupt = a + b und daher die Quadratzahl selbst = $a^2 + 2ab + b^2$. In der ersten Klasse linker Hand steckt also das Quadrat von a, d. h. das Quadrat eines Zehners, in dem übrigen das Produkt 2ab und b^2. Nun ist die Rechnung so:

$a^2 + 2ab + b^2 = 75|69 \mid a + b$
$a^2 = 64 \mid 8 \quad 7$
$1169 = 2ab + b^2$
$2a = 16) \quad 112 = 2ab$
$49 = b^2$
$1169 = 2ab + b^2$
0000

1) Man suche aus dem Quadrattäfelchen ein Quadrat, das der höchsten Klasse am nächsten kommt. Die höchste Klasse ist 75 (= 7500) und das nächste Quadrat = 64, nämlich 6400, da es das Quadrat eines Zehners ist und dieses mit der Ordnung der Hunderte anfängt.

2) Man schreibe dies nächste Quadrat 64 unter die höchste Klasse, mit der es von einerlei Ordnung ist, und ziehe es ab, so ist also von der ganzen Quadratzahl der Theil a^2 weggenommen, und es bleibt von derselben noch übrig $2ab + b^2 = 1169$.

3) Man ziehe also zu dem gebliebenen Reste 11 die zweite Klasse (69) herunter. Da beides zusammen = $2ab + b^2$ ist und das Doppelprodukt 2ab mit der Ordnung der Zehner anfängt, so ist dieses 2ab in dem Reste 11 und der ersten Ziffer der zweiten Klasse oder in 1160 enthalten. Diese Zahl besteht aus dem Faktor 2a und dem Faktor b; man findet also b, wenn man mit 2a in 1160 dividirt. Es ist aber 2a = 16 Zehner oder 160, also b = 7.

4) Nun multiplizire man mit dem gefundenen b = 7 den Divisor 2a = 16 Zehner und schreibe das Produkt 112 Zehner so unter, daß die 2 Zehner unter die erste Ziffer der zweiten Klasse, weil diese auch ein Zehner ist, zu stehen komme. Dann

mache man das Quadrat des zweiten Theils $7 = 49$ und schreibe es so unter das vorige Produkt, daß seine letzte Ziffer unter die letzten der zweiten Klasse (Einer unter Einer) zu stehen kommt, addire nun die Produkte $2ab$ und b^2 zusammen und ziehe die Summe von dem gebliebenen Reste der Quadratzahl ab. Bleibt nichts übrig, wie hier, so hat man die vollständige Wurzel gefunden.

§. 74.

Zusatz.

Nach eben den Regeln, wie eine zweizifferichte Wurzel ausgezogen wird, werden auch mehrzifferichte gefunden. Das eben beschriebene Verfahren wird immer wiederholt, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & a'' \\
 & & \overline{a'} \\
 & & \overline{ab}|b'|b'' \\
 & 46|70|35|56 & 68\ 3\ 4 \\
a^2 = & 36 & \\
\hline
 & 1070 = 2ab + b^2 & \\
2a = 12) & 96 = 2ab & \\
 & 64 = b^2 & \\
\hline
 & 1024 = 2ab + b^2 & \\
\hline
 & 4635 = 2a'b' + b'^2 & \\
2a' = 136) & 408 = 2a'b' & \\
 & 9 = b'^2 & \\
\hline
 & 4089 = 2a'b' + b'^2 & \\
\hline
 & 54656 = 2a''b'' + b''^2 & \\
2a'' = 1366) & 5464 = 2a''b'' & \\
 & 16 = b''^2 & \\
\hline
 & 54656 = 2a''b'' + b''^2 & \\
\hline
 & 0000 &
\end{array}
$$

Die Berechnung der zwei ersten Ziffern der Wurzel ist ganz wie §. 22. Was nun von den zwei ersten Klassen übrig bleibt (46) nebst der dritten Klasse enthält wiederum ein doppeltes Produkt $2ab$ und b^2, wenn nämlich jetzt unter a der schon gefundene Theil der Wurzel 68 und unter b der dritte Theil der Wurzel verstanden wird. Wir setzen daher jetzt die zwei ersten Theile der Wurzel oder $68 = a'$ und den dritten Theil der Wurzel $= b'$.

Um b' zu finden, nehme man $a' = 68$, zweimal, also $2a' = 136$, dividire damit in 463, d. h. in den Rest 46 und

die erste Ziffer der dritten Klasse, so ist der Quotient $3 = b' =$ dem dritten Theil der Wurzel. Nun multiplizire man $2a'$ mit b', so erhält man $2a'b'$ und mache noch b'^2, welche beide Produkte, wie das Exempel zeigt, untergeschrieben werden. Ihre Summe wird von 4635 abgezogen. Der Rest 546, nebst der vierten Klasse, enthält wieder im Doppelprodukt $2ab$ und ein b^2, aber jetzt ist $a =$ der Summe aller drei schon gefundenen Theile der Wurzel $= 683$ und wir haben es deswegen mit a'' bezeichnet, b aber ist der vierte Theil und von uns durch b'' ausgedrückt worden. Also ist $54656 = 2a''b'' + b''^2$. Man mache also wieder, um b'' zu finden, das Produkt $2a'' = 2 \cdot 683 = 1366$ und dividire damit in 5465, so ist $b'' = 4$, also $2a''b'' = 5464$ und $b''^2 = 16$; die Summe $2a''b'' + b''^2 = 54656$ und da beim Abziehen nichts übrig bleibt, so ist die vollständige Quadratwurzel gefunden.

Bei allen Produkten die Ordnungen der Ziffern durch beigesetzte Nullen ausgedrückt, steht das Exempel so:

```
                46|70|35|56 | 6000
                36 00 00 00 |  800
                 10703556     30
12900)           9600000      4
                  640000
                10240000
                  463556
13600)          408000
                    900
                  408900
                   54656
13660)           54640
                    16
                   54656
                   0000
```

§. 75.

Zusatz.

Der Abkürzung wegen kann man das Doppelprodukt $2ab$ mit b^2 gleich in eine Zeile zusammenziehen, indem man den gefundenen Theil b sich rechts neben dem Divisor geschrieben denkt und nun gleich beides mit b multiplizirt. Das obige Beispiel stehet nun so:

```
          46|70|35|56 | 6834
          36          |
          ----
          1070
128)      1024
          ----
           4635
1363)      4089
           -----
           54656
13664)     54656
           -----
           00000
```

Die bei den Divisoren geschriebenen kleinen Ziffern sind die gefundenen b, b′, b″ und nun ist 128 mit 8; 1363 mit 3; 13664 mit 4 multiplizirt worden.

§. 76.

Zusatz.

Oft ist eine gegebene Zahl keine vollständiges Quadrat, dann bleibt, nachdem aus der letzten Klasse der letzte Theil der Wurzel gefunden worden ist, noch etwas übrig. An diesen Rest pflegt man eine neue Klasse von zwei Nullen zu setzen und wie vorher fortzurechnen, dadurch findet man einen Dezimalbruch und fährt man mit dem Anhängen der Klassen von Nullen fort, so erhält man so viel Dezimalstellen, als Klassen angehängt worden sind. Mit jeder neuen Dezimalstelle kommt man der wahren Wurzel zehnmal näher, aber nie ist dieselbe vollkommen zu erreichen, da die Rechnung niemals aufgehen kann. Folgendes Beispiel zeigt ein solches Wurzelausziehen durch Näherung.

```
          87|56|43 | 935,758
          81       |
          ---
           656
183)       549
           ----
           10743
1865)       9325
            -----
            1418,00
18707)      130949
            ------
            1085100
187145)      935725
             -------
             15137500
1871508)     14972064
             --------
               165436
               u. s. w.
```

Die gefundene Wurzel ist also 935 Ganze, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{8}{1000}$; die wahre fällt zwischen 935,758 und 935,759, so daß also der Fehler noch kein ganzes Tausendtheil beträgt. Man nennt dergleichen Quadratwurzeln, die nicht vollständig gefunden werden können, Irrationalzahlen.

§. 77.

Zusatz.

Soll man aus einem Bruche eine Quadratwurzel ziehen, so sind folgende Fälle möglich: 1) Zähler und Nenner des Bruchs sind vollkommne Quadrate; dann zieht man so wol aus dem Zähler als aus dem Nenner die Wurzel und dividirt erstere durch die letztere, z. B. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

2) Der Nenner ist ein vollkommnes Quadrat, aber nicht der Zähler; dann zieht man aus dem Zähler die Wurzel nach §. 24. und dividirt diese durch die Wurzel des Nenners, z. B. $\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

Berechnung der Wurzel von 8:

8 | 2,8284235

4

400

4) 384

1600

56) 1124

47600

564) 45184

241600

5656) 226256

1534400

56568) 1131364

20303600

565684) 16970529

333307100

5656846) 282842325

50464775

u. s. w.

Also ist $\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2,8284235}{3} = 0,9428078$.

3) Ist weder Zähler noch Nenner ein vollkommnes Quadrat, oder doch wenigstens nur der Zähler, so verwandle man den Bruch in einen Dezimalbruch und ziehe aus demselben die Wurzel. Dabei ist zu bemerken, daß man dem Dezimalbruche, in welchen der gegebene verwandelt wird, eine gerade Anzahl von Dezimalstellen (2, 4, 6, 8 u. s. w.) geben müsse. Geht also beim Verwandeln die Division auf, ohne daß doch eine gerade Anzahl Stellen kommen, so muß man an der rechten Seite noch eine Null anhängen. Geht aber die Division nicht auf, so setzt man sie allemal bis zu einer geraden Anzahl Stellen fort.

Beispiel.

Man ziehe aus $\frac{5}{8}$ die Quadratwurzel. Es ist $\frac{5}{8}$, in einen Dezimalbruch verwandelt, $= 0{,}625$ und da dies nur drei Stellen sind, so ziehe man die Wurzel aus 0,6250. Also so:

```
        0,62|50 | 0,790569
          49    |
         1350
   14)   1341
          900
  158)    000
          90000
 1580)    79025
          1097500
15810)    948636
          14886400
158112)   14230161
            656239
            u. s. w.
```

§. 78.

Zusatz.

Der Grund, warum die Anzahl der Dezimalstellen gerade sein muß, ist folgender: Es ist $\frac{5}{8} = 0{,}625 = \frac{625}{1000}$, also $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0{,}625} = \sqrt{\frac{625}{1000}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{1000}}$. Aber der Nenner 1000 ist kein vollkommnes Quadrat, also seine Wurzel eine Irrationalzahl. Mit dieser müßte man nun noch die Wurzel des Zählers dividiren, um die verlangte Wurzel zu haben. Aber zwei Rechnungen, nämlich das Ausziehen der Wurzel aus dem Nenner

und

und das Dividiren der Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners kann man ersparen, wenn man durch Anhängung einer Null die Anzahl der Dezimalstellen gerade macht. Es ist nämlich $0{,}625 = 0{,}6250 = \frac{6250}{10000}$, also $\sqrt{0{,}625} = \sqrt{0{,}6250} = \sqrt{\frac{6250}{10000}} = \frac{\sqrt{6250}}{\sqrt{10000}}$ und da 10000 ein vollkommnes Quadrat und die Wurzel davon $= 100$ ist, so ist $\frac{\sqrt{6250}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{6250}}{100}$. Man hat also nur nöthig, aus dem Zähler die Wurzel zu ziehen und die Division mit dem Nenner bleibt auch weg, weil sie schon dadurch geschehen ist, daß man die Wurzel aus 6250 als Dezimalbruch, d. h. als Zehntel und Hundertel ansetzt.

§. 79.

Zusatz.

Zu bemerken ist, daß jede Quadratwurzel sowol positiv als negativ sein kann; denn von $+a$ ist das Quadrat $= +a^2$ und von $-a$ auch $= +a^2$, also umgekehrt die Wurzel von a^2 sowol $-a$, als $+a$. Sobald ein Quadrat negativ ist, ist die Wurzel desselben eine unmögliche Zahl, wie z. B. $\sqrt{-a^2}$.

§. 80.

Man ziehe die Quadratwurzeln aus folgenden Zahlen und wo zuletzt noch ein Rest bleibt, berechne man 7 Dezimalstellen.

1) 5625.
2) 177241.
3) 339889.
4) 748225.
5) 3286969.
6) 104734756.
7) 14408161156.
8) 106615124216.
9) 11.
10) 56.
11) 855.
12) 467.

Viertes Kapitel.

Vom Ausziehen der Kubikwurzel.

§. 81.

Erklärung.

Eine Kubikwurzel ist einfach, wenn sie nur aus Einer Ziffer besteht, zusammengesetzt, wenn sie durch mehrere Ziffern neben einander ausgedrückt wird. Zu den einfachen Wurzeln gehören die ersten 9 Ziffern, welche nebst ihren Kubus folgendes Täfelchen angibt.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kubus.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Jeder Kubus also, der in diesem Täfelchen gefunden wird, hat eine einfache Wurzel, nämlich die, welche gerade darüber steht; jede Zahl aber, die sich nicht unter den Kubus des Täfelchens findet, hat eine zusammengesetzte Kubikwurzel, z. B. 72, deren Wurzel größer als 4 und kleiner als 5 sein muß.

§. 82.

Zusatz.

Zu den einfachen Kubikwurzeln kann man auch alle die Zahlen rechnen, welche eine von den ersten 9 Ziffern in höheren Ordnungen ausdrücken, oder Nullen bei sich haben, z. B. 8^{3} oder 8000; 4^{-2} oder $0{,}04$. Man findet ihren Kubus, wenn man den Kubus der einfachen Ziffer im Täfelchen auf eine Ordnung erhebt, deren Exponent dreimal so groß ist, als der Ordnungsexponent der Wurzel, oder diesem Kubus dreimal so viel Nullen gibt, als die Wurzel hat (§. 58.), z. B. $(4)^3 = 64^{12}$ oder $40000^3 = 64000000000000$; $(5^{-2})^3 = 125^{-6}$, oder $0{,}05^3 = 0{,}000125$. Daß im letzteren Falle 2 Nullen durch Ziffern ersetzt werden, ist schon oben bemerkt. (§. 58.)

§. 83.

Zusatz.

Ist eine Kubikzahl gegeben, die im obigen Täfelchen steht, so findet man aus demselben auch gleich unmittelbar ihre Wurzel,

und dies ist auch der Fall, wenn ein solcher Kubus in einer höhern Ordnung sich befindet. Denn die Ordnung der Wurzel ist alsdann der Quotient, welcher entsteht, wenn man den Ordnungsexponenten des Kubus durch 3 dividirt. (§. 59.) Damit ist einerlei, wenn man der Wurzel dreimal weniger Nullen gibt, als der Kubus hatte. Es ist z. B. $\sqrt[3]{216} = 6$, also auch $\sqrt[3]{216}$ oder $\sqrt[3]{216000} = \overset{2}{6} = 60$; $\sqrt[3]{\overset{12}{216}}$ oder $\sqrt[3]{216000000000000} = \overset{4}{6} = 60000$; $\sqrt[3]{\overset{-9}{216}}$ oder $\sqrt[3]{0{,}00000216} = \overset{-3}{6} = 0{,}006$.

§. 84.
Zusatz.

Sobald nun eine Kubikzahl weder an und für sich, noch auch in höherer Ordnung in jenem Täfelchen steht, so ist ihre Wurzel nicht einfach, sondern zusammengesetzt und wie eine solche gefunden werde, lehren folgende Sätze.

§. 85.
Lehrsatz.

Jede zusammengesetzte Zahl kann man als zweitheilig ansehen. Es sei also überhaupt ihr erster Theil = a und der zweite = b, also die ganze Zahl = a + b, so wird die allgemeine Form für den Kubus jeder zweitheiligen Zahl gefunden, wenn man von a + b den Kubus macht.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \qquad ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ \qquad\quad a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \qquad\quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Diese Formel heißt in Worten ausgedrückt: Der Kubus jeder zweitheiligen Zahl besteht 1) aus dem Kubus des ersten Theils (a^3), 2) aus dem dreifachen Produkte vom Quadrate des ersten Theils in den zweiten Theil ($3a^2b$), 3) aus dem dreifachen Produkte des ersten Theils in das Quadrat des

zweiten Theils ($3ab^2$), und 4) aus dem Kubus des zweiten Theils (b^3).

Es sei die gegebene Wurzel $= 87$, so ist $a = 80$, $b = 7$, also:

$$a^3 = 80^3 = 512000$$
$$3a^2b = 3 \cdot 80^2 \cdot 7 = 134400$$
$$3ab^2 = 3 \cdot 80 \cdot 7^2 = 11760,$$
$$b^3 = 7^3 = 343$$

Also $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 87^3 = 658503$.

§. 86.

Zusatz.

Wenn der erste Theil der Wurzel, nämlich a, ein Zehner und der zweite Theil b ein Einer ist, so muß der Kubus des Zehners allemal mit der Ordnung der Tausende anfangen und kann höchstens nur bis in die Ordnung der Hunderttausende gehen. Denn jeder Zehner ist ein Produkt aus einem Einer und 10, z. B. 6 Zehner oder $60 = 6 \cdot 10$, also $60^3 = 6^3 \cdot 10^3 = 216 \cdot 1000$, folglich ist die letzte Ziffer des Kubus ein Tausender. Daß aber ein solcher Kubus die Hunderttausende nicht übersteigen kann, erhellet, wenn man den Kubus vom höchsten Zehner macht, nämlich von 9 Zehner oder 90. Dieser ist $= 729000$, erreicht also nicht die Million, folglich um so weniger die kleinern Zehner.

Das dreifache Produkt $3 \cdot a^2b$ fängt mit der Stelle der Hunderte an und geht höchstens auch bis in die Hunderttausende. Denn wenn man für a und b die höchsten Zehner und Einer, 90 und 9 nimmt, so ist $3 \cdot a^2b = 3 \cdot 90^2 \cdot 9 = 3 \cdot 9^2 \cdot 10^2 \cdot 9 = 3 \cdot 9^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 3 \cdot 9^2 \cdot 9 \cdot 100$, also das Ziffernprodukt $3 \cdot 9^2 \cdot 9$ ein Hunderter, und das ganze Produkt $= 218700$, also die Hunderttausende nicht übersteigend, folglich um so weniger, wenn man kleinere Zehner und Einer nimmt.

Das Produkt $3ab^2$ fängt mit den Zehnern an und geht höchstens bis in die Zehntausende. Denn nimmt man wieder die höchsten Zehner und Einer, so ist $3ab^2 = 3 \cdot 90 \cdot 9^2 = 3 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 9^2 = 3 \cdot 9 \cdot 9^2 \cdot 10$, also das Ziffernprodukt $3 \cdot 9 \cdot 9^2$ ein Zehner und das ganze Produkt $= 21870$, folglich die Zehntausende nicht übersteigend, also auch nicht, wenn kleinere Zehner und Einer genommen werden.

Der Kubus des Einers fängt mit den Einern an und geht höchstens bis in die Stelle der Hunderte, denn der höchste Einer 9 hat zum Kubus 729, erreicht also noch nicht die Tausende.

§. 87.

Lehrsatz.

Jede Kubikzahl hat entweder dreimal so viel Ziffern als die Wurzel, oder dreimal so viel weniger 1, oder dreimal so viel weniger 2.

Wenn also eine Wurzel 6 Ziffern hat, so hat der Kubus entweder 18, oder 17, oder 16 Ziffern, nicht mehr und nicht weniger.

Die Richtigkeit erhellet auf ähnliche Art, wie bei den Quadraten. Die Kubi der einzifferichten Wurzeln (1 bis 9) gehen von 1 bis 729, haben also 3, oder 2, oder 1 Ziffer; die Kubi der zweizifferichten (von 10 bis 99) gehen von 1000 bis 970299, haben also 6, oder 5, oder 4 Ziffern; die Kubi der dreizifferichten Wurzeln (100 bis 999) gehen von 1000000 bis 997002999 und haben also entweder 9, oder 8, oder 7 Ziffern. Diese Schlüsse kann man so immer weiter fortsetzen und immer wird man bestätigt finden, daß der Kubus dreimal so viel, oder dreimal so viel weniger 1, oder dreimal so viel weniger 2 Ziffern als die Wurzel hat.

§. 88.

Zusatz.

Theilt man also von der Rechten zur Linken eine gegebene Kubikzahl in Klassen, jede von 3 Ziffern (die höchste Klasse linker Hand kann aber auch nur 2 oder 1 Ziffer haben, wenn nämlich die Kubikzahl nur dreimal so viel weniger 1, oder dreimal so viel weniger 2 Ziffern als die Wurzel hat), so muß die Wurzel so viel Ziffern haben, als die Kubikzahl Klassen hat und in jeder Klasse muß der Kubus einer Ziffer der Wurzel stecken, nämlich von der Linken zur Rechten der Kubus der ersten oder höchsten Ziffer der Wurzel in der ersten oder höchsten Klasse, der Kubus der 2 ersten Ziffern in den 2 ersten Klassen, der Kubus der 3 ersten Ziffern in den 3 ersten Klassen u. s. w. Es sei z. B. die Kubikzahl 671392950462144 gegeben und ihre Wurzel = 87564. Den Kubus in Klassen getheilt, gibt 671|392|950|462|144, also gerade so viel Klassen, als die Ziffer Wurzeln hat. In der höchsten Klasse 671 (eigentlich 671000000000000) steckt der Kubus von 8 (eigentlich von 80000), in den 2 ersten Klassen 671392 (eigentlich 671392000000000) der Kubus von 87 (eigentlich 87000), in den 3 ersten Klassen 671392950

(eigentlich 671392950000000) der Kubus von 875 (eigentlich 87500) u. s. w.

§. 89.

Zusatz.

Die bisherigen Betrachtungen sollten dienen, um die Regeln verständlich zu machen, welche für die Ausziehung zusammengesetzter Kubikwurzeln gegeben werden. Ein Beispiel wird diese Regeln und ihre Gründe am deutlichsten zeigen.

Es sei also die Kubikzahl 373248 gegeben. Man theile sie von der Rechten zur Linken in Klassen, so erhält man 2 Klassen, also hat die Wurzel 2 Ziffern, die eine ein Zehner, die andere ein Einer. Nennen wir den Zehner a und den Einer b, so ist die ganze Wurzel $= a + b$ und folglich der Kubus von $a + b$ der gegebenen Zahl gleich. Es ist $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 373248$. Man muß also die Kubikwurzel finden, wenn man nach und nach die Theile des Kubus von $a + b$ in Zahlen bestimmt, und daraus die Theile der Wurzel berechnet. Dies geschieht nun auf folgende Art:

	373|248	a b	
$a^3 =$	343	7 z	
	30248	$= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
$3a^2 = 147)$	294	$= 3a^2b$	
	84	$=$	$3ab^2$
	8	$=$	b^3
	30248	$= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
	0000		

Da nach §. 87. in der ersten Klasse des Kubus auch der Kubus der höchsten Ziffer der Wurzel stecken muß, so ist in 373 (eigentlich 373000) a^3 enthalten. Man suche also in dem Kubiktäfelchen den nächsten Kubus zur ersten Klasse, dieser ist 343 eigentlich 343000) und schreibe die Wurzel 7 (eigentlich 70) an ihren Ort, und setze den Kubus unter die erste Klasse, um ihn abzuziehen.

Was nun von der Kubikzahl noch übrig bleibt, muß enthalten $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Man ziehe also zu dem Reste 30 die zweite Klasse herunter, so ist $30248 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ und zwar muß $3a^2b$, weil es mit der Ordnung Hundert anfängt,

in dem Rest und der ersten Ziffer der zweiten Klasse, in 302 (eigentlich 30200) enthalten sein.

Denke ich mir also $302 = 3a^2b$, so finde ich offenbar b, wenn ich mit $3a^2$ in 302 dividire. Man mache also das Quadrat vom ersten Theile 7, nehme dieses dreimal und schreibe das Produkt 147 an die linke Seite.

Mit diesem Divisor dividire man in 302 (eigentlich mit 14700 in 30200), so ist der Quotient 2 der zweite Theil der Wurzel, nämlich b. Mit dieser 2 multiplizire man den Divisor und schreibe das Produkt 294 so unter, daß die letzte Ziffer 4 unter die erste der zweiten Klasse kommt, weil diese Ziffer ein Hunderter ist, und also das Produkt eigentlich 29400 heißt. Dadurch hat man $3a^2b$ gefunden.

Nun mache man von 2 das Quadrat, multiplizire es mit dem ersten Theil 7 und nehme dies Produkt dreimal, so erhält man $84 = 3ab^2$. Dieses Produkt wird so untergeschrieben, daß seine letzte Ziffer 4 als Zehner unter die zweite der zweiten Klasse kommt, denn eigentlich ist $3ab^2 = 840$.

Endlich mache man von 2 den Kubus und schreibe diesen, nämlich 8, so unter, daß seine letzte Ziffer unter die letzte der zweiten Klasse kommt, weil dieser Kubus mit den Einern anfängt.

Nun addire man die 3 Produkte $294 = 3a^2b$, $84 = 3ab^2$ und $8 = b^3$ zusammen und ziehe die Summe von dem Reste der zweiten Klasse ab. Da nichts übrig bleibt, so ist 72 genau die Kubikwurzel von 373248.

§. 90.

Zusatz.

Nach eben den Regeln, wie die zweizifferichte Wurzel gefunden wird, wird auch die mehrzifferichte gefunden; man braucht jene Regeln nur immer zu wiederholen. Wir zeigen dies wieder an einem Beispiele.

Es sei der Kubus 2142121555505704 gegeben. In Klassen getheilt, erhält man 5 und also hat auch die Wurzel 5 Ziffern. Wir wollen, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel, die erste oder höchste Ziffer der Wurzel durch a, die zweite durch b ausdrücken, dann diese beiden als Eine Ziffer ansehen und zusammen a', die dritte also b' nennen, diese drei zusammen wieder $= a''$ und die vierte $= b''$; diese vier zusammen $= a'''$ und die fünfte $= b'''$ setzen, so wird das Ausziehen der Wurzel so geschehen:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & a''' \\
 & & a'' \\
 & & a' \\
 & & ab \quad b' \quad b'' \quad b''' \\
 & 214|212|155|505|704 & 59 \quad 8 \quad 3 \quad 4 \\
a^3 = & 125 & \\
\hline
 & 89212 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \\
3a^2 = 75) & 675 \quad = 3a^2b & \\
 & 1215 \quad = \qquad 3ab^2 & \\
 & 729 = \qquad\qquad b^3 & \\
\hline
 & 80379 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \\
\hline
 & 8833155 = 3a'^2b' + 3a'b'^2 + b'^3 & \\
3a'^2 = 10443) & 83544 \quad = 3a'^2b' & \\
 & 11328 \quad = \qquad 3a'b'^2 & \\
 & 512 = \qquad\qquad b'^3 & \\
\hline
 & 8468192 = 3a'^2b' + 3a'b'^2 + b'^3 & \\
\hline
 & 364963505 = 3a''^2b'' + 3a''b''^2 + b''^3 & \\
3a''^2 = 1072812) & 3218436 \quad = 3a''^2b'' & \\
 & 16146 \quad = \qquad 3a''b''^2 & \\
 & 27 = \qquad\qquad b''^3 & \\
\hline
 & 322005087 = 3a''^2b'' + 3a''b''^2 + b''^3 & \\
\hline
 & 42958418704 = 3a'''^2b''' + 3a'''b'''^2 + b'''^3 & \\
3a'''^2 = 107388867) & 429555468 \quad = 3a'''^2b''' & \\
 & 287184 \quad = \qquad 3a'''b'''^2 & \\
 & 64 = \qquad\qquad b'''^3 & \\
\hline
 & 42958418704 = 3a'''^2b''' + 3a'''b'''^2 + b'''^3 & \\
\hline
 & 00000000000 &
\end{array}
$$

Die Berechnung der ersten beiden Ziffern der Wurzel ist ganz wie §. 88. Der Rest 8833 und die heruntergezogene dritte Klasse 155 müssen nun, wenn man die schon gefundenen beiden Ziffern der Wurzel, nämlich 59, als Eine ansieht und sie durch a' bezeichnet und also die folgende dritte durch b', wiederum enthalten $3a'^2b' + 3a'b'^2 + b'^3$ und zwar wird wieder $3a'^2b'$ in dem Reste und der ersten Ziffer der dritten Klasse, oder in 88331 stecken. Man mache also das Quadrat von 59 und nehme es dreimal, so erhält man den Divisor $10443 = 3a'^2$ und damit 88331 dividirt, wird der Quotient $8 = b'$, also die dritte Ziffer der Wurzel. Nun multiplizire man 10443 mit 8, also $3a'^2$ mit b', so erhält man $83544 = 3a'^2b'$ und dieses

Produkt wird, wie bei der zweizifferichten Wurzel, so untergeschrieben, daß seine letzte Ziffer unter die erste der heruntergezogenen Klasse kommt.

Nun mache man das Quadrat von 8 = b'^2 und multiplizire es mit 59 und mit 3, so erhält man 11328 = $3a'b'^2$, welches auch, wie bei der zweizifferichten Wurzel untergeschrieben wird.

Endlich mache man den Kubus von 8, so erhält man 512 = b'^3 und schreibe auch dieses Produkt wie bei der zweizifferichten Wurzel unter. Jetzt addire man die drei Produkte 83544 = $3a'^2b'$, 11328 = $3a'b'^2$ und 512 = b'^3 und ziehe die Summe 8468192 von dem Reste und der dritten Klasse ab, so hat man die 3 ersten Ziffern der Wurzel gefunden. Zum Reste nehme man die vierte Klasse herunter, so müssen beide zusammen enthalten $3a''^2b'' + 3a''b''^2 + b''^3$, wenn man die drei gefundenen Ziffern = a'' und die folgende vierte Ziffer = b'' setzt.

Man mache also von 598 = a'' das Quadrat und nehme es dreimal, so erhält man den Divisor 1072812 = $3a''^2$. Mit diesem in den Rest und die erste Ziffer der vierten Klasse oder in 3649635 dividirt, kommt der vierte Theil der Wurzel oder b'' = 3. Damit $3a''^2$ multiplizirt, erhält man 3218436 = $3a''^2b''$.

Nun mache man von b'' = 3 das Quadrat und multiplizire es mit 598 = a'' und mit 3, so ergibt sich 16146 = $3a''b''^2$.

Endlich mache man b''^3 = 27 und schreibe diese drei Produkte, wie im vorigen unter, so erhält man durch ihre Addition die Summe 32200587 = $3a''^2b'' + 3a''b''^2 + b''^3$ und diese vom Reste und der vierten Klasse abgezogen, bleibt 42958418.

Zu diesem Reste die fünfte Klasse genommen, muß diese ganze Zahl enthalten $3a'''^2b''' + 3a'''b'''^2 + b'''^3$, wenn nämlich a''' alle schon gefundenen Theile der Wurzel und b''' den noch zu findenden neuen Theil bedeutet.

Man mache also wieder $3a'''^2$ = 107388867 und dividire damit in 429584187, so ergibt sich b''' = 4 und damit $3a'''^2$ multiplizirt, kommt 429555468 = $3a'''^2b'''$.

Nun mache man die Produkte $3a'''b'''^2$ und b'''^3 und schreibe sie, wie oben, unter, so ist ihre Summe 42958418704 = $3a'''^2b''' + 3a'''b'''^2 + b'''^3$ und da diese Summe der obenstehenden Zahl ganz gleich ist, so hat man alle Theile der

gegebenen Kubikzahl völlig erschöpft und so die vollständige Wurzel gefunden.

Daß die Rechnung nun immer so fortgeht, wenn die Kubikzahl noch mehr Klassen hat, ist von selbst klar.

Wenn man bei allen Theilen des Kubus und der Wurzel die Ordnungen der Ziffern durch beigesetzte Nullen ausdrückt, so steht obiges Exempel so:

```
                214|212|155|505|704 | 50000
                125 000 000 000 000 | 9000
                 89212000000000     |  800
7500000000)      67500000000000     |   30
                 12150000000000     |    4
                   729000000000
                 80379000000000
                  8833155000000
10443000000)      8354400000000
                   113280000000
                      512000000
                  8468192000000
                   364963505000
10728120000)      321843600000
                     161460000
                         27000
                   322005087000
                    42958418704
10738886700)        42955546800
                         2871840
                              64
                    42958418704
                    00000000000
```

§. 91.

Zusatz.

Wenn am Ende der Rechnung noch etwas von der Kubikzahl übrig bleibt, so ist die Wurzel nicht vollständig gefunden (im Fall man nämlich nicht falsch gerechnet hat), sondern diese fällt zwischen die gefundene Zahl und die nächste, d. h. um 1 größere, muß also eine ganze Zahl und ein Bruch sein. Gesetzt, die gefundene Wurzel sei 638, so fällt die wahre, wenn nach der

Rechnung noch ein Rest bleibt, zwischen 638 und 639. Der Fehler beträgt also keine ganze Einheit, sondern nur einen Theil derselben. In diesem Falle kann die Wurzel auf keine Art vollständig gefunden werden und man nennt daher auch dergleichen Wurzeln Irrationalzahlen. Aber nähern kann man sich ihrem wahren Werthe, so weit man will, indem man an den gebliebenen Rest eine Klasse von 3 Nullen hängt, die Rechnung, wie vorher, fortsetzt und zu jedem neuen Reste wieder eine Klasse von 3 Nullen fügt. Für jede Klasse von Nullen erhält man in der Wurzel eine neue Ziffer, die aber nun Dezimalbruch ist, so daß man mit jeder neuen Dezimalstelle der wahren Wurzel sich zehnmal nähert, ohne sie doch je zu erreichen, weil wegen der Nullen die Rechnung nie aufgehen kann. Folgendes Beispiel diene zur Erläuterung.

Man ziehe aus 240736 die Kubikwurzel.

240|736 | 62,2081 . . . .
216 |
24736
108) 216
72
8
22328
2408000
11532) 23064
744
8
2313848
94152000
1160652) 00000000
94152000000
116065200) 928521600
1194240
512
92864102912
1287897088000
11609505792) 11609505792
186624
1
11609524454 41
126944642559

Es ist also die Kubikwurzel aus der gegebenen Zahl = 62,2081.... Der Fehler beträgt noch kein ganzes Zehntausendtheil; denn hätte man die letzte Ziffer nur um 1 größer genommen, so wäre die abzuziehende Summe der Produkte zu groß gekommen. Durch weitere Rechnung aber hätte man dem wahren Werthe sich immer mehr nähern können.

In diesem Beispiele trat der Fall ein, daß man bei Berechnung der vierten Stelle 0 mal nehmen mußte. Da dadurch alle Produkte $(3a^2b + 3ab^2 + b^3)$ auch $= 0$ werden, so hat man in einem solchen Falle nichts zu thun, als zu dem gebliebenen Reste eine neue Klasse herunter zu ziehen (im Beispiele nochmals 3 Nullen anzusetzen) und dem Divisor 2 Nullen anzufügen, dann aber, wie gewöhnlich, weiter zu rechnen.

§. 92.

Aufgabe.

Aus einem Bruche die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflösung.

1) Wenn Zähler und Nenner vollkommne Kubikzahlen sind, so ziehe man aus jedem derselben die Wurzel und dividire die Kubikwurzel des Zählers durch die des Nenners, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} \text{ (§. 53.)} = \frac{3}{4}.$$

2) Ist bloß der Nenner eine vollkommne Kubikzahl, so kann man aus dem Zähler die Kubikwurzel durch Näherung ziehen und diese durch die Kubikwurzel des Nenners dividiren, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} = \frac{1,91293112}{2} = 0,9564656.$$

3) In allen andern Fällen verwandle man den gegebenen Bruch in einen Dezimalbruch und ziehe aus diesem die Kubikwurzel, wobei aber zu bemerken ist, daß die Anzahl der Dezimalstellen immer dreifach sein müsse, weswegen man, wenn der gefundene Dezimalbruch keine dreifache Anzahl Stellen hat, noch so viel Nullen anhängen muß, bis dieses der Fall ist. Z. B. Man ziehe aus $\frac{3}{4}$ die Kubikwurzel. Es ist $\frac{3}{4} = 0,75$, also muß man diesen Bruch in 0,750 verwandeln und daraus die Wurzel ziehen.

Rechnung.

```
        0,|750 | 0,9085 . . .
          729 |
243)     21000
         21000000
24300)   194400
           17280
              512
         19613312
          1386688000
2473392)  12366960
             68100
               125
         1237377125
          149310875  u. s. w.
```

Wäre der gegebene Bruch $\frac{7}{16}$, also der Dezimalbruch 0,4375 gewesen, so hätte man 2 Nullen anhängen und also die Kubikwurzel aus 0,437500 ziehen müssen.

Der Grund dieser Regel ist derselbe, wie oben in §. 77. Es ist $\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100}$, also $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{75}{100}} = \frac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{100}}$, also müßte man erstlich aus dem Zähler und zweitens aus dem Nenner die Kubikwurzel ziehen und dann die erstere durch die letztere dividiren. Nun ist 100 kein vollkommner Kubus, die Wurzel davon also irrational; folglich hätte man zwei mühsame Wurzelziehungen und dann noch eine auch nicht bequeme Division zu verrichten, weil der Divisor vielziffericht wäre. Nun sind aber 1000, 1000000, 1000000000 u. s. w. vollkommne Kubikzahlen und ihre Wurzeln 10, 100, 1000 u. s. w. Verwandelt man daher den Bruch so, daß der Nenner 1000, oder 1000000 u. s. w. wird, so ist die Ausziehung der Kubikwurzel aus dem Nenner vermieden, denn diese ist aus §. 81. und 82. sogleich bekannt, eben so auch die Division mit dem Nenner, weil die Dezimalstellen der Wurzel aus dem Zähler schon den Quotienten angeben. Diesen Vortheil erlangt man nun eben, wenn man dem gefundenen Dezimalbruche eine dreifache Anzahl von Stellen gibt; denn es ist $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{750}{1000} = 0{,}750$ und $0{,}4375 = \frac{4375}{10000} = \frac{437500}{1000000} = 0{,}437500$.

Dritter Abschnitt.

Lehre von Verhältnissen und Proportionen.

Erstes Kapitel.

Über die Begriffe: Verhältniß und Proportion.

§. 93.

Erklärung.

Wenn man 2 Größen neben einander stellt, um sie mit einander zu vergleichen, so heißt diese Nebeneinanderstellung ein Verhältniß und die Größen selbst Glieder des Verhältnisses, die Größe auf der linken Seite das erste oder vorhergehende und die auf der rechten das zweite oder folgende Glied.

§. 94.

Erklärung.

Die Vergleichung kann auf zweierlei Art geschehen: 1) Untersucht man, um wie viel Theile das folgende Glied größer sei, als das vorhergehende, so heißt das Verhältniß ein arithmetisches. 2) Untersucht man aber, wie vielmal das folgende Glied größer sei, als das vorhergehende, so heißt das Verhältniß ein geometrisches. Wenn ich 3 und 6 mit einander vergleiche und finde, daß 6 um 3 Theile größer ist als 3, so ist das Verhältniß zwischen 3 und 6 ein arithmetisches; eben so das Verhältniß 7 und 5, wenn ich finde, daß 5 um -2 größer, d. h. 5 um $+2$ kleiner ist, als 7. Wenn ich aber 3 und 6 so vergleiche, daß ich frage: wie vielmal ist 6 größer als 3? so ist das Verhältniß zwischen 3 und 6 geometrisch, und die Antwort ist, 6 ist 2 mal größer als 3; eben so, wenn ich frage, wie vielmal ist 4 größer als 8, denn die Antwort ist $\frac{1}{2}$ mal, oder 4 zweimal kleiner als 8.

§. 95.

Erklärung.

Das arithmetische Verhältniß wird durch Subtraktion bestimmt, indem man das vorhergehende Glied vom folgenden abzieht. Darum ist das Zeichen desselben ein Querstrich zwischen dem ersten und zweiten Gliede, z. B. $8 - 5$ und $5 - 8$ sind Bezeichnungen arithmetischer Verhältnisse.

Das geometrische Verhältniß wird durch Division bestimmt, indem man das folgende Glied durch das erste dividirt, denn indem ich suche, wie vielmal das erste im zweiten Gliede enthalten ist, finde ich, wie vielmal das zweite Glied größer ist, als das erste. Darum ist die Bezeichnung dieses Verhältnisses ein Kolon zwischen beiden Gliedern, z. B. 6 : 3 und 3 : 6 sind Bezeichnungen geometrischer Verhältnisse.

Beide Zeichen, sowol der Querstrich als das Kolon, werden gelesen: verhält sich zu, oder bloß: zu, z. B. 8 — 5; 3 : 6 (8 verhält sich zu 5 oder 8 zu 5 und 3 verhält sich zu 6 oder 3 zu 6).

§. 96.

Erklärung.

Die Zahl, um wie viel Theile das folgende Glied größer ist, als das vorhergehende, heißt beim arithmetischen Verhältnisse der Unterschied, die Differenz, und ist entweder positiv oder negativ, je nachdem das folgende Glied größer oder kleiner ist, als das vorhergehende, z. B.:

Erstes Gl.	Zweit. Gl.		Differenz.
3	— 7	=	4.
8	— 4	=	— 3.

Die Zahl, welche beim geometrischen Verhältnisse anzeigt, wie vielmal das folgende Glied größer ist als das vorhergehende, heißt der Exponent des Verhältnisses oder der Verhältnißzeiger und ist entweder eine ganze Zahl, wenn das zweite Glied größer ist als das erste und die Division des zweiten Gliedes durch das erste gerade aufgeht, oder eine ganze Zahl und ein Bruch, d. h. ein uneigentlicher Bruch, wenn zwar auch das zweite Glied größer ist als das erste, aber die Division nicht aufgeht, oder ein uneigentlicher Bruch, wenn das folgende Glied kleiner ist, als das vorhergehende, z. B.:

Erstes Gl.		Zweit. Gl.		Exponent.
4	:	8	=	2.
9	:	24	=	$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.
12	:	4	=	$\frac{1}{3}$.

§. 97.

Zusatz.

Ist eins der beiden Glieder des geometrischen Verhältnisses irrational, so ist auch der Exponent irrational, z. B. in $3 : \sqrt{5}$

ist der Exponent $= \frac{\sqrt{5}}{3}$ und in $\sqrt{3} : 2$ der Exponent $= \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Sind aber beide Glieder irrational, so kann in dem Falle der Exponent rational werden, wenn gleiche Wurzeln aus gleichen Größen gezogen werden sollen, z. B. von $\sqrt{3} : \sqrt{3}$ ist der Exponent $= 1$; von $3\sqrt{3} : 2\sqrt{3}$ ist der Exponent $= \frac{3}{2}$; von $\sqrt[3]{5} : \sqrt[2]{5}$ ist der Exponent $= 3$.

§. 98.

Zusatz.

Da im arithmetischen Verhältnisse das erste Glied vom zweiten abgezogen wird, um die Differenz zu finden, so entsteht umgekehrt das zweite aus dem ersten, wenn man zu letzterem die Differenz addirt (§. 8., Grundsatz 20.) Es sei das erste Glied $= a$, das zweite $= b$, die Differenz $= d$. Ist nun b größer als a, so ist die Differenz $= +d$, und ist a größer als b, so ist die Differenz $= -d$, im ersten Falle also $b = a + d$, im zweiten $= a - d$. Überhaupt also kann man das zweite Glied durch die Formel $a \mp d$, und jedes arithmetischen Verhältnisses durch die Formel $a - (a \mp d)$ ausdrücken.

§. 99.

Zusatz.

Im geometrischen Verhältnisse wird der Exponent gefunden, wenn man das folgende durch das vorhergehende dividirt, also wird nach §. 8. Grundsatz 23. das folgende Glied aus dem vorhergehenden gefunden, wenn man das Letztere mit dem Exponenten multiplizirt. Es sei a das erste, b das zweite Glied, e der Exponent, so ist allemal $b = ae$ und also die allgemeine Formel für jedes geometrische Verhältniß $= a : ae$.

Wenn das erste und zweite Glied einerlei Zeichen haben, so ist der Exponent allemal positiv, und kann nie, wie beim arithmetischen Verhältnisse, negativ werden, a und b mögen übrigens beschaffen sein, wie sie wollen.

§. 100.

Erklärung.

Wenn zwei Verhältnisse einander gleich gesetzt werden, so entsteht eine Proportion, und zwar eine arithmetische, wenn die Verhältnisse arithmetisch, und eine geometrische, wenn

wenn die Verhältnisse geometrisch sind. Das Zeichen der Proportion ist das bekannte Gleichheitszeichen, welches hier: wie sich verhält, oder kurz: wie, gelesen wird. Es sind aber Verhältnisse einander gleich, wenn ihre Differenzen oder Exponenten einander gleich sind. So ist z. B. das arithmetische Verhältniß $3 — 5$ gleich dem Verhältnisse $7 — 9$, weil beider Differenz $= 2$ ist, also läßt sich aus diesen 4 Größen die Proportion bilden:

$$3 — 5 = 7 — 9,$$

welche man lieset: 3 verhält sich zu 5 wie 7 zu 9. Eben so ist auch das geometrische Verhältniß $6 : 12$ dem Verhältnisse $4 : 8$ gleich, weil beider Exponent $= 2$ ist, also kann man die Proportion bilden: $6 : 12 = 4 : 8$,

welche man lieset: 6 verhält sich zu 12 wie 4 zu 8.

Die erstere Proportion ist arithmetisch, die letztere geometrisch.

Eine allgemeine Formel für jede arithmetische Proportion ist:

$$a — (a \mp d) = c — (c \mp d),$$

und für jede geometrische:

$$a : ae = c : ce.$$

§. 101.

Erklärung.

In jeder Proportion nennt man das erste und vierte die äußern, das zweite und dritte die mittlern Glieder. Das erste und dritte Glied aber sind die vorhergehenden, das zweite und vierte die folgenden Glieder. Endlich nennt man auch das erste und dritte, so wie das zweite und vierte gleichliegende Glieder.

§. 102.

Erklärung.

Ein Verhältniß ist einfach, wenn zwei Größen unmittelbar mit einander verglichen werden, z. B. 3 thlr. mit 6 thlr.; zusammengesetzt aber, wenn zwei Größen vermittelst einer dritten verglichen werden. Man findet nämlich das Verhältniß der beiden Größen, wenn man die erste mit der dritten und dann die zweite auch mit der dritten vergleicht, so daß also das Verhältniß der beiden Größen zusammengesetzt ist aus dem Verhältnisse der ersten zur dritten und der dritten zur zweiten. Die Zusammensetzung wird durch das Zeichen $+$ angedeutet und die Glieder jedes

Verhältnisses werden in eine Klammer geschlossen. Sollen z. B. Thaler und Pfennige verglichen werden, so vergleicht man erst Thaler mit Groschen und dann Groschen mit Pfennigen, also ist das Verhältniß der Thaler zu den Pfennigen zusammengesetzt aus dem Verhältnisse der Thaler zu Groschen und dem Verhältnisse der Groschen zu Pfennigen. Z. B. wie verhalten sich 3 thlr. zu 3 pf.? Antwort: 3 thlr. verhalten sich zu 3 gr. wie 1 thlr. zu 24 gr. und 3 gr. zu 3 pf. wie 1 gr. zu 12 pf. Also 3 thlr. : 3 gr. = (1 thlr. : 24 gr.) + (1 gr. : 12 pf.)

Auch arithmetische Verhältnisse lassen sich zusammengesetzt denken; ihre Betrachtung ist aber von keiner besondern Wichtigkeit, daher wir sie übergehen.

§. 103.

Erklärung.

Wenn in einer Proportion das zweite Glied mit dem dritten einerlei ist, so heißt dieselbe eine stetige, z. B. $3-5=5-7$ oder $3:6=6:12$ und allgemein $a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$ oder $a:ae=ae:ae^2$. Das Glied, welches zweimal gesetzt wird, heißt das mittlere, und das vierte Glied das dritte.

§. 104.

Grundsätze.

1) Wenn zwei Verhältnisse einerlei drittem gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

Wenn	$a-b=p-q$	Wenn	$a:b=p:q$
und	$c-e=p-q$	und	$c:d=p:q$
so ist	$a-b=c-e.$	so ist	$a:b=c:d.$

In Zahlen.

Wenn	$3-5=7-9$	Wenn	$2:3=4:6$
und	$6-8=7-9$	und	$10:15=4:6$
so ist	$3-5=6-8.$	so ist	$2:3=10:15.$

2) Wenn zwei Größen zu einerlei dritten Größe dasselbe Verhältniß haben, so sind diese beiden Größen einander gleich. Z. B.

Wenn	$p-e=a-b$	Wenn	$r:a=b:c$
und	$q-e=a-b$	und	$m:a=b:c$
so ist	$p=q$	so ist	$r=m.$

In Zahlen.

Wenn	$8-5=1-4$	Wenn	$6:3=4:2$
und	$(6+2)-5=1-4$	und	$3.2:3=4:2$
so ist	$8=6+2.$	so ist	$6=3.2.$

Zweites Kapitel.

Von arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 105.
Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern.

Es sei die Proportion $a-b=c-f$, also soll $a+f=b+c$ sein. Es ist nämlich $b=a\mp d$ und $f=c\mp d$, $a+f=a+c\mp d$ und $b+c=a\mp d+c$, welche Werthe offenbar einander gleich sind. In Zahlen. Wenn $6-4=7-5$, so ist $6+5=7+4$.

§. 106.
Zusatz.

In der stetigen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittlern Gliede. Wenn in der Proportion $a-b=b-f$ die Summe $a+f=b+b$ ist, so ist auch $a+f=2b$. In Zahlen $4-6=6-8$, also $4+8=2.6$.

§. 107.
Zusatz.

In jeder arithmetischen Proportion lassen sich die Glieder verwechseln und so neue Proportionen bilden:

1) Die mittlern Glieder. Aus $a-b=c-f$ folgt $a-c=b-f$, denn es ist in dieser, wie in der ersten, $a+f=b+c$.

2) Die Glieder von einerlei Verhältniß. Wenn $a-b=c-f$, so ist auch $b-a=f-c$, denn in beiden Proportionen ist $a+f=b+c$.

Auf diese Art lassen sich aus jeder Proportion 4 andere bilden, und wenn man noch in Anschlag bringen will, daß die Verhältnisse auf der rechten Seite auf die linke und umgekehrt gesetzt werden können, so ergeben sich 8 Veränderungen, nämlich folgende:

In Buchstaben.	Differenz.	In Zahlen.	Differenz.
$a-b=c-f$	$b-a.$	$8-5=9-6$	$-3.$
$a-c=b-f$	$c-a.$	$8-9=5-6$	$+1.$
$b-a=f-c$	$a-b.$	$5-8=6-9$	$+3.$
$b-f=a-c$	$f-b.$	$5-6=8-9$	$+1.$
$c-f=a-b$	$f-c.$	$9-6=8-5$	$-3.$
$c-a=f-b$	$a-c.$	$9-8=6-5$	$-1.$
$f-c=b-a$	$c-f.$	$6-9=5-8$	$+3.$
$f-b=c-a$	$b-f.$	$6-5=9-8$	$-1.$

§. 108.

Zusatz.

Wenn die Summe zweier Zahlen der Summe zweier andern Zahlen gleich ist, so lassen sich diese 4 Zahlen in eine arithmetische Proportion ordnen, indem man die Zahlen der einen Summe zu den äußern, die Zahlen der andern Summe zu den mittlern Gliedern macht.

Wenn	$a+b=c+f$	Wenn	$6+3=4+5$
so ist	$a-c=f-b$	so ist	$6-4=5-3$
oder	$c-a=b-f$	oder	$4-6=3-5$

§. 109.

Aufgabe.

Zu drei Zahlen die vierte arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Ist die Art bestimmt, wie die Zahlen sich gegen einander verhalten sollen, so addire man die beiden mittlern Glieder und ziehe das erste von der Summe ab; der Rest ist das vierte Glied.

Es seien die Zahlen m, q, r gegeben und das gesuchte vierte Glied heiße x. Soll sich nun verhalten $m-q=r-x$, so ist $m+x=q+r$ (§. 105.), also $x=q+r-m$.

Soll sich verhalten $q-m=r-x$, so ist $x=m+r-q$ und soll sich verhalten $r-m=q-x$, so ist $x=m+q-r$.

Beispiele in Zahlen sind leicht selbst zu finden.

§. 110.

Aufgabe.

Zu zwei Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Man addire die beiden Zahlen und nehme von der Summe die Hälfte. Es seien die Zahlen a und b gegeben und x heiße das gesuchte mittlere Glied, so verhält sich

$$a - x = x - b$$

$$\text{also } a + b = 2x$$

$$\text{folglich } \frac{a+b}{2} = x.$$

Zwischen 8 und 14 ist die mittlere Proportionalzahl $= \frac{8+14}{2} = \frac{22}{2} = 11$, und es verhält sich $8 - 11 = 11 - 14$.

§. 111.

Zusatz.

Auf eben die Art läßt sich zwischen mehreren Größen ein mittleres Proportionalglied finden. Man addirt nämlich alle gegebene Größen zusammen und dividirt die Summe durch die Anzahl der Größen. Es werde z. B. ein Haus taxirt:

von	dem	einen	zu	1500 thlr.
"	"	andern	"	1280 "
"	"	dritten	"	1600 "
"	"	vierten	"	1620 "
"	"	fünften	"	1340 "
"	"	sechsten	"	1460 "
				8800

$$6) \quad 8800$$

$$1466\tfrac{2}{3}.$$

Es ist also $1466\frac{2}{3}$ thlr. der wahrscheinlichste Werth des Hauses.

Drittes Kapitel.

Von geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

A. Von einfachen Verhältnissen und Proportionen.

§. 112.

Erklärung.

In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittlern Glieder.

Es sei die Proportion $a : b = c : f$, so soll $af = bc$ sein. Es ist nämlich (§. 99.) $b = ae$ (wenn e den Exponenten der gleichen Verhältnisse bedeutet) und $f = ce$,

also	af	=	ace
und	bc	=	aec
aber	ace	=	aec
also auch	af	=	bc.

Beispiel in Zahlen.

$8 : 12 = 2 : 3$

also $8 . 3 = 12 . 2$.

§. 113.

Zusatz.

Ist die Proportion stetig, so ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern Gliedes. Wenn $a : b = b : c$, so ist nach §. 112. $ac = bb$, also $ac = b^2$. Wenn $6 : 12 = 12 : 24$, so ist $6 . 24 = 12^2$.

§. 114.

Lehrsatz.

In jeder geometrischen Proportion kann man die mittlern Glieder und auch die Glieder von einerlei Verhältniß verwechseln, ohne daß die Proportionalität der Glieder geändert wird.

Es sei $a : b = c : d$, so verhält sich

1) $a : c = b : d$, denn in der gegebenen Proportion ist $ad = bc$ und so auch in der neuen immer noch $ad = cb$. Wenn sich verhält $6 : 8 = 3 : 4$, so verhält sich auch $6 : 3 = 8 : 4$.

2) auch $b : a = d : c$, denn es ist wiederum $bc = ad$. Was in der gegebenen Proportion die äußern Glieder waren, sind jetzt die mittlern geworden, und umgekehrt, wodurch in der Gleichheit

der Produkte nichts geändert wird. Wenn $5 : 9 = 15 : 27$, so ist auch $9 : 5 = 27 : 15$.

Durch diese 2 Verwechslungsarten erhält man aus jeder Proportion 4 neue und wenn man noch in Anschlag bringen will, daß von jeder das letzte Verhältniß zuerst und das erste zuletzt gesetzt werden kann, so erhält man aus jeder Proportion 8 Verwechslungen, wie Folgendes zeigt.

In Buchstaben.					In Zahlen.				
Proportionen.				Exponent.	Proportionen.				Exponent.
$a : b$	$=$	$c : d$		$\frac{b}{a}$.	$6 : 8$	$=$	$12 : 16$		$\frac{4}{3}$.
$a : c$	$=$	$b : d$		$\frac{c}{a}$.	$6 : 12$	$=$	$8 : 16$		2.
$b : a$	$=$	$d : c$		$\frac{a}{b}$.	$8 : 6$	$=$	$16 : 12$		$\frac{3}{4}$.
$b : d$	$=$	$a : c$		$\frac{d}{b}$.	$8 : 16$	$=$	$6 : 12$		2.
$c : d$	$=$	$a : b$		$\frac{d}{c}$.	$12 : 16$	$=$	$6 : 8$		$\frac{4}{3}$.
$c : a$	$=$	$d : b$		$\frac{c}{a}$.	$12 : 6$	$=$	$16 : 8$		$\frac{1}{2}$.
$d : c$	$=$	$b : a$		$\frac{c}{d}$.	$16 : 12$	$=$	$8 : 6$		$\frac{3}{4}$.
$d : b$	$=$	$c : a$		$\frac{b}{d}$.	$16 : 8$	$=$	$12 : 6$		$\frac{1}{2}$.

§. 115.
Lehrsatz.

Wenn ein aus 2 Faktoren bestehendes Produkt einem andern Produkte aus 2 Faktoren gleich ist, so läßt sich aus diesen 4 Faktoren eine geometrische Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produkts zu den äußern, die Faktoren des andern zu den mittlern Gliedern macht.

Es sei $ab = cd$, so verhält sich $a : c = d : b$ oder $c : a = b : d$. In beiden Proportionen ist $ab = cd$, wie es nach der Angabe sein soll. Es sei $3 . 8 = 4 . 6$, so verhält sich $3 : 4 = 6 : 8$ und $4 : 8 = 3 : 6$.

Man schließt in diesen Proportionen so: Der erste Faktor des ersten Produkts verhält sich zum ersten Faktor des andern, wie der zweite Faktor des andern zum zweiten Faktor des ersten.

Eine solche Proportion, wo man vom Ersten auf das Zweite und vom Zweiten auf das Erste zurückschließt, heißt eine reciproke, und Größen, die einen solchen Schluß vorstellen, heißen einander reciprok. Also sind die 2 Faktoren zweier gleichen Produkte einander reciprok.

§. 116.

Aufgabe.

Zu drei Größen die vierte geometrische Proportionalgröße zu finden.

Es seien die 3 Größen p, m, q, die vierte unbekannte = x. Man bestimme, nach welcher Ordnung die gegebenen Größen einander proportional sein sollen, multiplizire dann die beiden mittlern und dividire das Produkt durch die erste, so ist der Quotient die gesuchte vierte Proportionalgröße.

Es seien die gegebenen Größen in folgender Ordnung proportional:

$$m : p = q : x$$

so ist nach §. 112. $mx = pq$

also $x = \frac{pq}{m}$.

Wäre die Ordnung gewesen $p : m = q : x$,

so käme $x = \frac{mq}{p}$.

Auf dieser Aufgabe beruhet die ganze sogenannte Regel de tri. Wenn man fragt: Was kosten 8 Ellen, wenn 3 Ellen 5 thlr. kosten, so heißt das: 3 Ellen sollen sich zu 8 Ellen eben so verhalten, wie 5 thlr. zu dem noch unbekannten Preise der 8 Ellen, also:

3 Ell. : 8 Ell. = 5 thlr. : x thlr.

Oder, da man die mittlern Glieder verwechseln kann, so kann man auch aufsetzen:

3 Ell. : 5 thlr. = 8 Ell. : x thlr.

Wäre die Frage: wie viel Ellen erhält man für 10 thlr., wenn 2 Ellen 4 thlr. kosten? so wäre die Ordnung der Proportion:

4 thlr. : 10 thlr. = 2 Ell. : x Ell.

oder wegen Verwechslung der mittlern Glieder,

4 thlr. : 2 Ell. = 10 thlr. : x Ell.

§. 117.

Zusatz.

In diesen Beispielen ist allemal das vierte Glied so vielmal größer als das dritte, so vielmal das zweite Glied größer ist als das erste. Es gibt aber auch Fälle, wo das vierte Glied so vielmal kleiner ist, als das dritte, so vielmal das zweite größer ist als das erste. Daraus entsteht die sogenannte verkehrte Regel de tri, weil man die Verhältnisse umkehren muß, um den richtigen Betrag zu erhalten. Z. B. Von $\frac{7}{4}$ Ellen breitem Tuche braucht man 4 Ellen zum Kleide, wie viel von $\frac{2}{4}$ Ellen breitem. Hier kann ich nicht schließen: je breiter das Tuch, desto mehr Ellen gehören zum Kleide, sondern umgekehrt, desto weniger Ellen. Also kann ich auch die Proportion nicht so bilden:

$$\frac{7}{4} \text{ Ell.} : \frac{2}{4} \text{ Ell.} = 4 \text{ Ell.} : x \text{ Ell.},$$

sondern umgekehrt:

$$\frac{2}{4} \text{ Ell.} : \frac{7}{4} \text{ Ell.} = 4 \text{ Ell.} : x \text{ Ell.}$$

Die Mengen der Ellen verhalten sich umgekehrt, wie die Breiten des Tuchs.

Mehrere Beispiele werden wir in der Exempelsammlung geben.

§. 118.

Zusatz.

Wenn das erste und zweite, oder das erste und dritte Glied in der Größe nicht sehr von einander unterschieden sind, so kann man sich einen bedeutenden Vortheil im Rechnen stiften, wenn man nur das sucht, was zum dritten Gliede addirt oder davon abgezogen werden muß, um das vierte Glied zu erhalten.

Es sei die Proportion: $a : b = c : d$ und b sei von a um die Größe f unterschieden, also $b = a \pm f$ oder $a \mp f$, eben so d von c um die Größe g, also $d = c \pm g$ oder $c \mp g$, so heißt obige Proportion so:

$$a : a \mp f = c : c \pm g.$$

Also ist $ac \pm ag = ac \pm cf$, folglich $\pm ag = \pm cf$, wenn man das gleiche ac auf beiden Seiten wegnimmt. Sucht man also g, so hat man aus $\pm ag = \pm cf$, $g = \frac{\pm cf}{a}$ also g entweder $= +\frac{cf}{a}$ oder $-\frac{cf}{a}$ und folglich das vierte Glied $d = c + \frac{cf}{a}$ oder $c - \frac{cf}{a}$.

Erstes Beispiel, wo f oder g positiv kommt.

70 Ztn. 80 Pfd. kosten 8094 thlr. 16 gr., was kosten 70 Ztn. 91 Pfd.? Die Proportion ist:

70 Ztn. 80 Pfd. : 70 Ztn. 91 Pfd. = 8094 thlr. 16 gr. : x thlr.

Also a = 70 Ztn. 80 Pfd., b = a + f = 70 Ztn. 91 Pfd., folglich f = 11 Pfd. Daher $x = c + g$ und $g = \frac{cf}{a}$

$= \frac{8094\frac{1}{3}\text{ thlr.} \cdot 11\text{ Pfd.}}{70\text{ Ztn. }80\text{ Pfd.}} = \frac{\frac{24284 \cdot 11}{3}}{7780\text{ Pfd.}} = \frac{24284 \cdot 11}{3 \cdot 7780}$

$= \frac{267124}{23340} = 11\text{ thlr. }\frac{10384}{1945}\text{ gr.} = 11\text{ thlr. }10\text{ gr. }8\frac{256}{1945}\text{ pf.}$

Folglich x = c + g = 8094 thlr. 16 gr. + 11 thlr. 10 gr. $8\frac{256}{1945}$ pf. = 8106 thlr. 2 gr. $8\frac{256}{1945}$ pf.

Die gewöhnliche Rechnung wäre unstreitig mühsamer:

70 Ztn. 80 Pfd. : 70 Ztn. 91 Pfd. = 8094 thlr. 16 gr.

110	110	24
7780	7791	32392
		16188
		194272
		7791
		194272
		1748448
		1359904
		1359994 | 24
		7780 | 151357352 | 194546
		7780 | 8106 thlr. 2 gr.
		73557
		70020
		35373
		31120
		42531
		38900
		36315
		31120
		5952
		46680
		5272
		12
		7780 | 63264 | 8 pf.
		62240
		1024 | 256
		7780 | 1945 pf.

Zweites Beispiel, wo f oder g negativ kommt.

74 Wspl. 18 Schfl. kosten 3498 thlr. 18 gr., was kosten 74 Wspl. 9 Schfl.? Die Proportion ist:

74 W. 18 Schfl. : 74 W. 9 Schfl. = 3498 thlr. 18 gr. : x thlr.

Also $a = 74$ Wspl. 18 Schfl., $b = a - f = 74$ Wspl. 9 Schfl, folglich $f = -9$. Daher $x = c - g$ und $g = \frac{cf}{a}$

$= \frac{3498\frac{3}{4}\text{ thlr.} \cdot 9}{74\text{ Wspl. }18\text{ Schfl.}} = \frac{\frac{13995 \cdot 9}{4}}{1794} = \frac{125955}{7176} = 17$ thlr. 13 gr. $3\frac{215}{299}$ pf.

Dieser Werth von g wird nun, weil er negativ ist, von c oder von 3498 thlr. 18 gr. abgezogen, so kommt $x = 3481$ thlr. 4 gr. $8\frac{284}{299}$ pf.

§. 119.

Zusatz.

Da man die mittlern Glieder verwechseln kann, so ist die Regel auch anwendbar, wenn das dritte Glied, nachdem alles unter Eine Einheit gebracht worden, von dem ersten wenig unterschieden ist, z. B. 35 Ztn. 87 Pfd. kosten 3985 thlr., was kosten 112 Ztn. 85 Pfd.? Die Proportion ist eigentlich:

35 Ztn. 87 Pfd. : 112 Ztn. 58 Pfd. = 3985 thlr. : x thlr.

Aber da 35 Ztn. 87 Pfd. = 3937 Pfd. sind, so kann man auch aufsetzen:

3937 Pfd. : 3985 thlr. = 112 Ztn. 58 Pfd. : x thlr.

und man hat $f = 48$, also $g = \frac{cf}{a} = \frac{(113\text{ Ztn. }58\text{ Pfd.}) \cdot 48}{3937}$

$= \frac{12378 \cdot 48}{3937} = 150$ thlr. 21 gr. $10\frac{3098}{3937}$ pf.

Also $x = c + g = 12378 + 150$ thlr. 21 gr. $10\frac{3098}{3937}$ pf. $= 12528$ thlr. 21 gr. $10\frac{3098}{3937}$ pf.

§. 120.

Aufgabe.

Zwischen 2 Größen die mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.

Es seien a und b die gegebenen Größen und x die gesuchte mittlere, so soll sich verhalten:

$$a : x = x : b$$

also $x^2 = ab$

und $x = \sqrt{ab}$

d. h. man multiplizire die beiden Größen und ziehe aus dem Produkte die Quadratwurzel. Z. B. Man suche eine Zahl,

zu der sich 81 eben so verhält, wie jene Zahl zu 144. Es soll also sein $81 : x = x : 144$,

also $x = \sqrt{81 \cdot 144}$

$= \sqrt{81} \cdot \sqrt{144} = 9 \cdot 12 = 108$

und wirklich verhält sich:

$81 : 108 = 108 : 144$.

§. 121.

Lehrsatz.

Aus jeder Proportion lassen sich durch Addition und Subtraktion gewisser Glieder neue Proportionen bilden:

1) Man kann die gleichliegenden Glieder addiren oder von einander abziehen; ihre Summen oder Unterschiede verhalten sich zu einander, wie die Glieder von einerlei Verhältniß.

a) Wenn sich verhält $a : b = c : d$,

so soll sich auch verhalten $a + c : b + d = a : b = c : d$. Die Richtigkeit erhellet aus der Gleichheit der Exponenten. In der gegebenen Proportion ist der Exponent $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. In der neuen ist der Exponent $\frac{b+d}{a+c}$, welcher $= \frac{b}{a}$ sein soll. Man bringe beide Brüche $\frac{b+d}{a+c}$ und $\frac{b}{a}$ auf einerlei Nenner. Dann ist $\frac{b+d}{a+c} = \frac{ab+ad}{aa+ac}$ und $\frac{b}{a} = \frac{ab+bc}{aa+ac}$. Nun haben die Brüche $\frac{ab+ad}{aa+ac}$ und $\frac{ab+bc}{aa+ac}$ gleiche Nenner; beide werden also einander gleich sein, wenn auch ihre Zähler sich gleich sind. Es ist aber $ab = ab$ und $ad = bc$ vermöge der ersten Proportion, also auch $ab + ad = ab + bc$, und folglich auch $\frac{ab+ad}{aa+ac} = \frac{ab+bc}{aa+ac}$, d. h. $\frac{b+d}{a+c} = \frac{b}{a}$ und also auch $= \frac{d}{c}$.

b) Wenn sich verhält $a : b = c : d$,

so soll sich auch verhalten $a - c : b - d = a : b = c : d$. Der Beweis ist ganz wie der vorige, man darf nur $+$ mit $-$ vertauschen.

c) Aus den Proportionen in a und b folgt eine dritte, wenn man sie unter einander schreibt.

Wenn nämlich $a + c : b + d = a : b$

und $a - c : b - d = a : b$

so verhält sich auch $a + c : b + d = a - c : b - d$ (§. 104. Grundsatz 1.)

d. h. in jeder geometrischen Proportion verhalten sich die Summen der gleichliegenden Glieder zu einander, wie die Differenzen eben dieser Glieder.

2) Man kann die Glieder von einerlei Verhältniß addiren, oder von einander abziehen; ihre Summen oder Differenzen verhalten sich zu einander, wie die gleichliegenden Glieder.

a) Wenn sich verhält $a : b = c : d$,
so soll sich verhalten $a+b : c+d = a : c = b : d$
und $a-b : c-d = a : c = b : d$.

Die Richtigkeit beider Proportionen erhellet, weil man statt $a : b = c : d$ auch sagen kann $a : c = b : d$, wo also a und b, so wie c und d die gleichliegenden Glieder werden, für welche beide Proportionen schon bewiesen sind.

b) Wenn sich verhält $a+b : c+d = a : c$
und $a-b : c-d = a : c$
so verhält sich auch $a+b : c+d = a-b : c-d$

d. h. die Summen der Glieder von einerlei Verhältniß verhalten sich zu einander, wie die Differenzen eben dieser Glieder sich verhalten.

Beispiele in Zahlen zu obigen Veränderungen.

Wenn $6:4 = 3:2$, so ist auch $6+3:4+2 = 6:4 = 3:2$
oder $9 : 6 = 6:4 = 3:2$
und auch $6-3:4-2 = 6:4 = 3:2$
oder $3 : 2 = 6:4 = 3:2$
Desgleichen $6+3:4+2 = 6-3:4-2$ oder $9:6 = 3:2$

Wenn
$24:18 = 12:9$, so ist auch $24+18:12+9 = 24:12 = 18:9$
oder $42 : 21 = 24:12 = 18:9$
und auch $24-18:12-9 = 24:12 = 18:9$
oder $6 : 3 = 24:12 = 18:9$
Desgl. $24+18:12+9 = 24-18:12-9$ oder $42:21 = 6:3$.

§. 122.

Lehrsatz.

Wenn man in einer Proportion alle Glieder, oder die Glieder von einerlei Verhältniß, oder die gleichliegenden Glieder, mit einerlei Zahl multiplizirt oder dadurch dividirt, so bleiben die entstandenen neuen Glieder unter sich in Proportion.

1) Wenn $a : b = c : d$, so soll sein $ma : mb = mc : md$. Die neue Proportion ist richtig, wenn $\frac{mb}{ma} = \frac{md}{mc}$ ist; dies ist aber der Fall, weil in der ersten Proportion $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ist und Gleiches mit Gleichem multiplizirt, gleiche Produkte gibt.

2) Wenn $a : b = c : d$, so soll auch sein $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$, denn es ist wiederum $\frac{\frac{b}{m}}{\frac{a}{m}} = \frac{\frac{d}{m}}{\frac{c}{m}}$ oder $\frac{b}{m} \cdot \frac{m}{a} = \frac{d}{m} \cdot \frac{m}{c}$, d. h. $\frac{bm}{ma} = \frac{dm}{cm}$, d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, welches vermöge der gegebenen Proportion richtig ist.

3) Wenn $a : b = c : d$, so soll auch sein $am : bm = cq : dq$, denn es ist $\frac{bm}{am} = \frac{dq}{cq}$, d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ und dieses vermöge der ersten Proportion.

Da man $q = 1$ setzen kann, so ist auch $am : bm = c : d$ und $m = 1$ gesetzt, ist $a : b = cq : dq$.

4) Wenn $a : b = c : d$, so soll auch sein $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{q} : \frac{d}{q}$, denn es ist $\frac{\frac{b}{m}}{\frac{a}{m}} = \frac{\frac{d}{q}}{\frac{c}{q}}$ oder $\frac{b}{m} \cdot \frac{m}{a} = \frac{d}{q} \cdot \frac{q}{c}$, d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, welches nach der ersten Proportion richtig ist.

Da man q auch $= 1$ setzen kann, so ist auch $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$ und setzt man $m = 1$, so ist $a : b = \frac{c}{q} : \frac{d}{q}$.

5) Wenn $a : b = c : d$, so soll auch sein $am : bq = cm : dq$, denn es ist $\frac{bq}{am} = \frac{dq}{cm}$, weil $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ und $\frac{q}{m} = \frac{q}{m}$ ist.

Da man $q = 1$ setzen kann, so ist auch $am : b = cm : d$ oder wenn $m = 1$ gesetzt wird, so ist auch $a : bq = c : dq$.

6) Wenn $a : b = c : d$, so soll auch sein $\frac{a}{m} : \frac{b}{q} = \frac{c}{m} : \frac{d}{q}$,

denn es ist $\frac{\frac{b}{q}}{\frac{a}{m}} = \frac{\frac{d}{q}}{\frac{c}{m}}$ oder $\frac{b}{q} \cdot \frac{m}{a} = \frac{d}{q} \cdot \frac{m}{c}$ oder $\frac{bm}{qa} = \frac{dm}{qc}$, weil $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ und $\frac{m}{q} = \frac{m}{q}$ ist.

Setzt man $q = 1$, so ist $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$ und setzt man $m = 1$, so ist $a : \frac{b}{q} = c : \frac{d}{q}$.

Beispiele in Zahlen.

Wenn				so ist			
1)	$3 \cdot 6 : 4 \cdot 6 = 6 \cdot 6 : 8 \cdot 6$			oder	$18 : 24 = 36 : 48.$		
2)	$\frac{1}{2} : \frac{4}{2} = \frac{6}{2} : \frac{8}{2}$			oder	$\frac{3}{2} : 2 = 3 : 4.$		
3)	$3 \cdot 5 : 4 \cdot 5 = 6 \cdot 3 : 8 \cdot 3$			oder	$15 : 20 = 18 : 24.$		
				Auch	$15 : 20 = 6 : 8,$		
				oder	$3 : 4 = 18 : 24.$		
4)	$\frac{3}{4} : \frac{4}{4} = \frac{6}{3} : \frac{8}{3}$			oder	$\frac{3}{4} : 1 = 2 : 2\frac{2}{3}.$		
				Auch	$\frac{3}{4} : 1 = 6 : 8.$		
				oder	$3 : 4 = 2 : 2\frac{2}{3}.$		
5)	$3 \cdot 4 : 4 \cdot 7 = 6 \cdot 4 : 8 \cdot 7$			oder	$12 : 28 = 24 : 56.$		
				Auch	$12 : 4 = 24 : 8,$		
				oder	$3 : 28 = 6 : 56.$		
6)	$\frac{3}{8} : \frac{4}{9} = \frac{6}{8} : \frac{8}{9}$			oder	$\frac{3}{8} : \frac{4}{9} = \frac{3}{4} : \frac{8}{9}.$		
				Auch	$\frac{3}{8} : 4 = \frac{3}{4} : 8.$		
				oder	$3 : \frac{4}{9} = 6 : \frac{8}{9}.$		

§. 123.
Zusatz.

Man sieht, wie auf diesen Sätzen das Aufheben der Glieder in der Regel de tri beruhet, daß man nämlich das erste und zweite, oder das erste und dritte gegen einander aufheben kann, nicht aber das zweite und dritte.

§. 124.
Lehrsatz.

Wenn man zwei geometrische Proportionen unter einander schreibt und die unter einander stehenden Glieder mit einander multiplizirt, so bilden die Produkte auch eine geometrische Proportion.

Wenn $a : b = c : d$
und $m : r = p : q$
so soll sein $am : br = cp : dq$.

In der ersten Proportion ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ und in der zweiten $\frac{r}{m} = \frac{q}{p}$, also $\frac{b}{a} \cdot \frac{r}{m} = \frac{d}{c} \cdot \frac{q}{p}$ oder $\frac{br}{am} = \frac{dq}{cp}$, aber diese gleichen Quotienten sind die Exponenten der Proportion der Produkte, und folglich diese Proportion richtig. Auch erhellet, daß der Exponent der letztern Proportion das Produkt aus den Exponenten der gegebenen sei.

Beispiel in Zahlen.

Wenn $5 : 12 = 10 : 24$
und $6 : 10 = 9 : 15$
so ist $30 : 120 = 90 : 360$.

§. 125.

Zusatz.

So können auch drei und mehr Proportionen unter einander geschrieben und die unter einander stehenden Glieder mit einander multiplizirt werden; die Produkte bilden immer wieder eine Proportion. Denn hat man aus 2 Proportionen die Produkte gefunden, so kann man darunter wieder die dritte Proportion schreiben und multipliziren, darunter wieder die vierte und so immer weiter. Z. B.

$2 : 3 = 4 : 6$
$5 : 4 = 10 : 8$
$6 : 9 = 8 : 12$
$4 : 3 = 12 : 9$
$7 : 11 = 21 : 33$

$2.5.6.4.7 : 3.4.9.3.11 = 4.10.8.12.21 : 6.8.12.9.33$
oder $1680 : 3564 = 80640 : 171072$.

Denn aus $2 : 3 = 4 : 6$
und $5 : 4 = 10 : 8$
folgt $10 : 12 = 40 : 48$
schreibt man nun darunter $6 : 9 = 8 : 12$
so folgt $60 : 108 = 320 : 576$
und setzt man darunter $4 : 3 = 12 : 9$
so folgt $240 : 324 = 3840 : 5184$
endlich hierunter $7 : 11 = 21 : 33$
so kommt $1680 : 3564 = 80640 : 171072$.

Der

Der Exponent der letzten Proportion ist auch hier ein Produkt aus den Exponenten aller gegebenen Proportionen, nämlich $\frac{3564}{1680} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{7} = \frac{3564}{1680} = \frac{297}{140} = 2\frac{17}{140}$.

§. 126.

Zusatz.

Auch wenn man die Glieder zweier unter einander geschriebenen Proportionen durch einander dividirt, so bilden die Quotienten eine Proportion.

Wenn $a : b = c : d$
und $p : q = m : r$
so ist $\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{m} : \frac{d}{r}$
oder auch $\frac{p}{a} : \frac{q}{b} = \frac{m}{c} : \frac{r}{d}$.

Denn die Exponenten der neuen Proportion sind einander gleich, nämlich $\frac{\frac{b}{q}}{\frac{a}{p}} = \frac{\frac{d}{r}}{\frac{c}{m}}$ oder $\frac{b}{q} \cdot \frac{p}{a} = \frac{d}{r} \cdot \frac{m}{c}$ oder $\frac{bp}{qa} = \frac{dm}{rc}$ oder $\frac{b}{a} \cdot \frac{p}{q} = \frac{d}{c} \cdot \frac{m}{r}$, welche Produkte gleich sein müssen, da die Faktoren gleich sind, nämlich $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ und $\frac{p}{q} = \frac{m}{r}$.

Eigentlich ist in der zweiten gegebenen Proportion $\frac{q}{p} = \frac{r}{m}$, aber da man aus der zweiten auch machen kann $q : p = r : m$, so ist auch $\frac{p}{q} = \frac{m}{r}$. Eben so ist der Beweis für die Proportion $\frac{p}{a} : \frac{q}{b} = \frac{m}{c} : \frac{r}{d}$.

Beispiel in Zahlen.

Wenn $12 : 18 = 16 : 24$
und $9 : 15 = 3 : 5$
so ist auch $\frac{4}{3} : \frac{6}{5} = \frac{16}{3} : \frac{24}{5}$.

Der Exponent der neuen Proportion ist der Quotient aus der Division der Exponenten der gegebenen Proportionen, nämlich:

$\frac{\frac{b}{q}}{\frac{a}{p}} = \frac{b}{a} : \frac{q}{p}$; denn $\frac{\frac{b}{q}}{\frac{a}{p}} = \frac{b}{q} \cdot \frac{p}{a} = \frac{bp}{qa} = \frac{bp}{aq} = \frac{b}{a} : \frac{q}{p}$.

§. 127.

Zusatz.

Auch wenn man alle 4 Glieder einer Proportion auf einerlei Potenz erhebt, oder aus allen die Wurzel von einerlei Grad zieht, so bleiben die Glieder in Proportion.

Denn in $a : b = c : d$ ist $ad = bc$, also auch $(ad)^m = (bc)^m$ oder $a^m d^m = b^m c^m$, folglich $a^m : b^m = c^m : d^m$.

Eben so wenn $ad = bc$ ist $\sqrt[m]{ad} = \sqrt[m]{bc}$ oder $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}$, also $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

§. 128.

Lehrsatz.

Wenn in den zwei unter einander geschriebenen Proportionen gleiche Glieder vorkommen, so kann man diese wegstreichen und dann aus den übrigen eine Proportion bilden. Es finden folgende Fälle Statt:

1) Die zweiten Glieder der Verhältnisse in der ersten Proportion können den ersten Gliedern in der zweiten gleich sein; dann sind die ersten Glieder der ersten Proportion den zweiten der andern proportional.

Wenn	a	: b	=	c	: d
und	b	: f	=	d	: g
so ist	ab	: bf	=	cd	: dg
also auch	$\frac{ab}{b}$	: $\frac{bf}{b}$	=	$\frac{cd}{d}$	: $\frac{dg}{d}$ (§. 122. Nr. 4.),
d. h.	a	: f	=	c	: g.
Es sei	10	: 15	=	4	: 6
und	15	: 30	=	6	: 12
so ist	10	: 30	=	4	: 12.

2) Die mittleren Glieder der ersten Proportion sind einerlei mit den äußern Gliedern der zweiten; dann stehen die äußern Glieder der ersten mit den mittlern der zweiten in reciproken (§. 115.) Verhältnissen.

Wenn	a	: b	=	c	: d
und	b	: f	=	g	: c
so ist	ab	: bf	=	cg	: dc
also auch	$\frac{ab}{b}$	: $\frac{bf}{b}$	=	$\frac{cg}{c}$	: $\frac{dc}{c}$
d. h.	a	: f	=	g	: d.

In Zahlen.

Wenn	8	: 12	=	20	: 30
und	12	: 9	=	$26\frac{2}{3}$	: 20
so ist	8	: 9	=	$26\frac{2}{3}$	: 30.

3) Die zweiten Glieder der Verhältnisse sind in beiden Proportionen einander gleich; dann sind die ersten Glieder in beiden einander proportional.

Wenn a : b = c : d
und f : b = g : d
so soll sein a : f = c : g.

Denn man kann in der letzten Proportion die Glieder verwechseln und setzen:

a : b = c : d
b : f = d : g
so ist nach Nr. 1. a : f = c : g.

Beispiel in Zahlen.

Wenn 6 : 8 = 9 : 12
und 4 : 8 = 6 : 12
so ist 6 : 4 = 9 : 6.

4) Die mittlern Glieder in beiden Proportionen können einander gleich sein; dann stehen die äußern Glieder in beiden in reciproken (§. 115.) Verhältnissen.

Wenn a : b = c : d
und f : b = g : c
so soll sein a : f = g : d.

Denn man kann in der letzten Proportion die Glieder von einerlei Verhältniß verwechseln und setzen:

a : b = c : d
b : f = g : c
so ist nach Nr. 2. a : b = g : d.

Beispiel in Zahlen.

Wenn 12 : 15 = 24 : 30
und 10 : 15 = 24 : 36
so ist 12 : 10 = 36 : 30.

§. 129.

Zusatz.

Wenn die beiden unter einander stehenden Proportionen einerlei Exponenten haben, so kann man ihre Glieder, so wie sie unter einander stehen, addiren oder subtrahiren; die Summen oder Unterschiede bilden wieder eine Proportion.

Wenn $a : b = c : d$
und $f : g = h : k$

und in beiden Proportionen der Exponent $= e$ ist, so kann man für beide setzen:

$$\begin{array}{rcl} a : ae & = & c : ce \\ \text{und } f : fe & = & h : he \end{array}$$

also soll sein $a+f : ae+fe = c+h : ce+he.$

Im zweiten und vierten Gliede ist ein gemeinschaftlicher Faktor e, den man allein setzen und die ungleichen in eine Klammer daneben schreiben kann (§. 24.), also heißt die letzte Proportion so:

$$a+f : (a+f)\,e = c+h : (c+h)\,e.$$

In dieser letztern Proportion ist der Exponent wieder $= e$ und dieselbe also richtig.

Daß der Satz auch für die Subtraktion gilt, erhellet von selbst, denn man darf nur das $+$ mit $-$ vertauschen.

Beispiel in Zahlen.

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{Wenn} & 12 & : & 8 & = & 15 : 10 \\ \text{und} & 6 & : & 4 & = & 24 : 16 \\ \hline \text{so ist} & 18 & : & 12 & = & 39 : 26 \\ \text{oder} & 6 & : & 4 & = & -9 : -6. \end{array}$$

§. 130.

Aufgabe.

Eine Zahl so in 2 Theile zu theilen, daß die beiden Theile sich wie zwei gegebene Zahlen zu einander verhalten.

Es seien p und q die gegebenen Verhältnißzahlen, a die Zahl, welche getheilt werden soll und x und y ihre beiden Theile, so soll sich verhalten:

$$p : q = x : y$$

also nach §. 121., a) $p+q : p = x+y : x$

und da $x+y = a$ ist, so kann man setzen:

$$p+q : p = a : x.$$

$$\text{Also } x = \frac{ap}{p+q}.$$

Eben so ist auch $p+q : q = x+y : y$

oder $p+q : q = a : y.$

$$\text{Also } y = \frac{aq}{p+q}.$$

Man findet also die beiden Theile, wenn man die gegebenen Verhältnißzahlen addirt und zwei Exempel nach der Regel de tri aufsetzt:

1) Die Summe der Verhältnißzahlen $(p+q)$ verhält sich zu der ersten Verhältnißzahl (p), wie die ganze zu theilende Zahl (a) zum ersten Theile (x).

2) Die Summe der Verhältnißzahlen $(p+q)$ verhält sich zu der zweiten Verhältnißzahl (q), wie die ganze zu theilende Zahl (a) zum zweiten Theile (y).

Beispiel.

Man soll 80 so in 2 Theile theilen, daß sich dieselben wie 4 und 6 zu einander verhalten. Also:

$4+6 : 4 = 80 : x$ und $4+6 : 6 = 80 : y$

oder $10 : 4 = 80 : x$ und $10 : 6 = 80 : y$

$x = 32$ $\qquad$ $y = 48$.

§. 131.

Zusatz.

Auf gleiche Art läßt sich auch eine Zahl in mehrere Theile theilen, die sich wie eben so viel gegebene Verhältnißzahlen zu einander verhalten.

Es werde z. B. a in drei Theile (x, y, z) getheilt, die sich wie p, q, r zu einander verhalten.

Zuerst hat man:

$$\begin{array}{rrcl} & p : q & = & x : y \\ \text{also} & p+q : q & = & x+y : y \\ \text{aber auch} & q : r & = & y : z \\ \hline \text{also nach §. 128., Nr. 1.} & p+q : r & = & x+y : z. \end{array}$$

Folglich nach §. 121., a) $p+q+r : x+y+z = r : z$ oder auch $= p : x = q : y$ und da $x+y+z = a$ ist, so kann man setzen:

$$p+q+r : a = r : z = p : x = q : y.$$

Daraus ergibt sich wieder die Regel: Man setze drei Exempel nach der Regel de tri auf, indem man die Proportionen macht:

1) Die Summe der Verhältnißzahlen $(p+q+r)$ verhält sich zu der ganzen zu theilenden Zahl (a), wie die erste Verhältnißzahl (p) zum ersten Theile (x).

2) Die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zu der ganzen zu theilenden Zahl, wie die zweite Verhältnißzahl (q) zum zweiten Theile (y).

3) Die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zu der ganzen zu theilenden Zahl, wie die dritte Verhältnißzahl (r) zum dritten Theile (z).

So verfährt man denn auch bei 4 und mehr Theilen. Immer addirt man alle Verhältnißzahlen und macht Proportionen aus dieser Summe, der ganzen zu theilenden Zahl, und jeder einzelnen Verhältnißzahl.

§. 132.

Zusatz.

Auf diesen wichtigen Satz beruhet in der praktischen Rechenkunst die Gesellschafts- und Vermischungsrechnung. Beispiele werden unten vorkommen. Hier nur eins zur Erläuterung.

Es nehmen 4 Personen ein Loos in der Lotterie gemeinschaftlich. A gibt zum Loose 5 thlr., B gibt 7 thlr., C gibt 4 thlr., D aber 9 thlr. Der Gewinn beträgt 8000 thlr., wie viel bekommt jeder in Verhältniß zu seiner Einlage?

Hier ist $a = 8000$ thlr., $p = 5$ thlr., $q = 7$ thlr., $r = 4$ thlr., $s = 9$ thlr., also $p+q+r+s = 25$ thlr., und die Rechnung folgende:

$25 : 8000 = 5 : w$	$25 : 8000 = 7 : x$
Also $w = 1600$ thlr.	Also $x = 2240$ thlr.
$25 : 8000 = 4 : y$	$25 : 8000 = 9 : z$
Also $y = 1280$ thlr.	Also $z = 2880$ thlr.

Es ist $w = 1600$ thlr.
$x = 2240$ »
$y = 1280$ »
$z = 2880$ »

Also $w+x+y+z = a = 8000$ thlr.

B. Von zusammengesetzten Verhältnissen und Proportionen.

§. 133.

Erklärung.

Was zusammengesetzte Verhältnisse sind, haben wir §. 102. erklärt. Es kann aber ein Verhältniß nicht bloß aus zwei andern, sondern auch aus dreien und mehrern zusammengesetzt sein. Will man z. B. Zentner und Quentchen mit einander vergleichen, so muß man zuerst Zentner mit Pfund, dann Pfund mit Loth, endlich Loth mit Quentchen vergleichen, also ist das Verhältniß des Zentners zum Quentchen zusammengesetzt aus dem Verhältnisse des Zentners zum Pfunde, des Pfundes zum Lothe, des Lothes

zum Quentchen, und die Proportion ist: 1 Zentner : 1 Quentchen = (110 : 1) + (32 : 1) + (4 : 1). Wie nun solche zusammengesetzte Verhältnisse sich behandeln und auf einfache reduziren lassen, lehren die folgenden Paragraphen.

§. 134.

Lehrsatz.

Das Verhältniß zweier Produkte ist aus den Verhältnissen ihrer Faktoren zusammengesetzt, d. h. zwei Produkte verhalten sich zu einander, wie der erste Faktor des ersten Produkts zum ersten Faktor des andern und wie der zweite Faktor des ersten zum zweiten Faktor des andern.

Es seien die Produkte ab und cd, so soll sich verhalten $ab : cd = (a : c) + (b : d)$.

Um dies zu beweisen, verwandle man das Verhältniß b : d in ein anderes, dessen erstes Glied c ist, d. h. man suche zu b, d und c die vierte Proportionalzahl, also:

$$b : d = c : x$$

$$\text{und } x = \frac{cd}{b}$$

$$\text{folglich } b : d = c : \frac{cd}{b}$$

und das Verhältniß $c : \frac{cd}{b}$ ist also einerlei mit dem Verhältnisse b : d. Man setze der Kürze wegen $\frac{cd}{b} = f$, so ist $b : d = c : f$. Nun ist offenbar

$$\begin{array}{rrcl} & a : & c & = a : c \\ \text{und} & b : & d & = c : f \\ \hline \text{folglich nach §. 121. und 128.} & ab : & cd & = a : f. \end{array}$$

Es werden also hier die Größen a und f mit einander verglichen und zwar so, daß man zuerst a mit c und dann c mit f vergleicht, also ist das Verhältniß a : f zusammengesetzt aus den Verhältnissen a : c und c : f, folglich auch das Verhältniß ab : cd, weil es dem Verhältnisse a : f gleich ist, zusammengesetzt aus den Verhältnissen a : c und c : f; aber statt c : f kann man auch das gleiche b : d setzen, folglich ist das Verhältniß ab : cd zusammengesetzt aus den Verhältnissen a : c und b : d, d. h. das Verhältniß zweier Produkte ist aus den Verhältnissen ihrer Faktoren zusammengesetzt. Beispiel:

$24 = 3 \cdot 8$ und $36 = 4 \cdot 9$, also $24 : 36 = (3 : 4) + (8 : 9)$.

§. 135.

Zusatz.

Umgekehrt, wenn $ab : cd = (a : c) + (b : d)$, so ist auch $(a : c) + (b : d) = ab : cd$, d. h. ein zusammengesetztes Verhältniß wird in ein einfaches verwandelt, wenn man die gleichliegenden Glieder mit einander multiplizirt. Wenn also gegeben ist $A : B = (p : q) + (r : s)$, so folgt daraus $A : B = pr : qs$.

§. 136.

Zusatz.

Das Verhältniß von Produkten aus drei und mehrern Faktoren ist aus so viel Verhältnissen zusammengesetzt, als Faktoren da sind, also:

$abcd : efgh = (a : e) + (b : f) + (c : g) + (d : h)$.

Denn es ist 1) $ab : ef = (a : e) + (b : f)$. Nun sehe man ab und ef, jedes als Einen Faktor an, so ist

2) $abc : efg = (ab : ef) + (c : g)$, aber $ab : ef = (a : e) + (b : f)$, also $abc : efg = (a : e) + (b : f) + (c : g)$.

Nun sehe man wieder abc und efg, jedes als Einen Faktor an, so ist

3) $abcd : efgh = (abc : efg) + (d : h)$, aber $abc : efg = (a : e) + (b : f) + (c : g)$, also:

$abcd : efgh = (a : e) + (b : f) + (c : g) + (d : h)$

u. s. w. auch bei mehrern Faktoren.

§. 137.

Der Exponent des zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Produkte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse, woraus jenes besteht. Denn wenn $ab : cd = (a : c) + (b : d)$, so ist offenbar $\frac{cd}{ab} = \frac{c}{a} \cdot \frac{d}{b}$. Das Zeichen + zwischen den einfachen Verhältnissen zeigt daher keinesweges eine Addition an, sondern nur den Begriff der Zusammensetzung.

§. 138.

Zusatz.

Zusammengesetzte Verhältnisse kommen in der praktischen Rechenkunst sehr häufig vor. Schon in der gemeinen Regel de tri muß man Anwendung davon machen, wenn die Verhältnißglieder nicht in einerlei Einheit gegeben sind. Hat man z. B. das

Exempel: 2 Qt. kosten 9 pf., was kosten 8 Ztn., so ist das Verhältniß der Quentchen zu den Zentnern, so wie das der Pfennige zu den herauskommenden Thalern zusammengesetzt und die Proportion:

$$2\text{ Qt.} : 8\text{ Ztn.} = 9\text{ pf.} : x\text{ thlr.}$$

kann so aufgelöst werden:

1) Es verhalten sich

$$2\text{ Qt.} : 8\text{ Ztn.} = (2:8) + (1:110) + (1:32) + (1:4)$$
$$= 2.1 : 8.110.32.4 \text{ oder } 2 : 8.110.32.4.$$

2) $9\text{ pf.} : x\text{ thlr.} = (9:x) + (1:12) + (1:24)$
$= 9.1 : x.12.24.$

Also statt des Verhältnisses 2 Qt. : 8 Ztn. setzt man das Gleiche $(2:8)+(1:110)+(1:32)+(1:4)$ oder $2:8.110.32.4$ und statt 9 pf. : x thlr. das Gleiche $(9:x) + (1:12) + (1:24)$ oder $9 : x.12.24.$ Folglich heißt nun die Proportion:

$$2 : 8.110.32.4 = 9 : x.12.24.$$

Nimmt man nun die Produkte der äußern und mittlern Glieder, so ist $2.x.12.24 = 9.8.110.32.4$

und folglich $x = \frac{9 \cdot 8 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}{2 \cdot 12 \cdot 24}$.

Darin liegt also der Grund, warum man in solchen Exempeln durch Multiplikation mit 110, 32, 4 die Zentner zu Quentchen und nachher, wenn man das Produkt der mittlern Glieder durch das erste dividirt hat, noch den gefundenen Quotienten durch die Division mit 12 und 24 zu Thalern machen muß.

§. 139.

Zusatz.

Außerdem aber kommen zusammengesetzte Verhältnisse in allen den Exempeln vor, die nach der sogenannten Regula Quinque, nach der Reesischen und Kettenregel gerechnet werden.

Wenn nämlich durch irgend eine Ursache eine Wirkung erzeugt wird, so hängt diese letztere ab, theils von der Größe der Ursache, theils von der Länge der Zeit, in der die Ursache wirkt. So hängt die Menge des Wassers, welche beim Regen herunterfällt, theils von der Menge und Größe der Regentropfen, theils von der Länge der Zeit ab, in der es regnet. So hängen auch Zinsen ab von der Größe der Kapitale und von der Länge der Zeit, in der sie ausstehen. Bezeichnet man nun zweierlei Wirkungen überhaupt durch E und e, ihre Ursachen durch C und c und die Zeiten, welche gebraucht werden, durch T und t, so verhält sich:

$$E : e = (C : c) + (T : t)$$
$$= CT : ct$$

d. h. die Wirkungen verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Ursachen in die Zeiten; Zinsen also z. B. wie die Produkte aus den Kapitalen in die Zeiten; Längen der Wege, die zwei Körper durchlaufen, wie die Produkte aus den Geschwindigkeiten in die Zeiten, welche die Körper brauchen; die Wirkungen, welche zwei abgeschossene Kugeln auf einen Gegenstand ausüben, wie die Produkte aus den Gewichten der Kugeln in ihre Geschwindigkeiten; die Arbeiten, welche von Personen in gewissen Zeiten verrichtet werden, wie die Produkte aus der Menge der Personen in die Zeit, welche sie brauchen; die Frachtpreise wie die Produkte aus dem Gewicht der Last in die Länge des Weges u. s. w. In allen diesen Fällen werden also zusammengesetzte Verhältnisse angewendet.

§. 140.

Zusatz.

Wenn man in der Proportion

$$E : e = CT : ct$$

die vorhergehenden Glieder durch T und die folgenden durch t dividirt, wodurch die Proportion nach §. 122. Nr. 6. nicht verändert wird, so kommt

$$\frac{E}{T} : \frac{e}{t} = \frac{CT}{T} : \frac{ct}{t}$$

oder

$$\frac{E}{T} : \frac{e}{t} = C : c$$

d. h. die Ursachen verhalten sich, wie die Wirkungen durch die Zeiten dividirt, also z. B. Kapitale, wie die Zinsen durch die Zeiten dividirt; Arbeiter, wie die Arbeiten, welche sie vollenden, durch die Zeiten dividirt; Geschwindigkeiten, wie die Längen der Wege durch die Zeiten dividirt; Geschwindigkeiten abgeschossener Kugeln, wie ihre Wirkungen durch die Gewichte der Kugeln dividirt.

§. 141.

Zusatz.

Dividirt man in der Proportion

$$E : e = CT : ct$$

die vorhergehenden Glieder durch C und die folgenden durch c, so erhält man

$$\frac{E}{C} : \frac{e}{c} = T : t$$

d. h. die Zeiten verhalten sich, wie die Wirkungen durch die Ursachen dividirt. Also in der Zinsrechnung die Zeiten, welche Kapitale

ausstehen, wie die Zinsen durch die Kapitale dividirt. Ferner die Zeiten, welche zwei bewegte Körper brauchen, wie die Längen der Wege durch die Geschwindigkeiten dividirt; die Zeiten, welche Arbeiter brauchen, wie die Arbeiten, die sie vollenden, durch die Menge der Arbeiter dividirt u. s. w.

§. 142.

Zusatz.

Oft ist es der Fall, daß die Glieder E, e, T, t selbst wieder zusammengesetzte Verhältnisse enthalten, in die sie aufgelöst werden müssen. Bedeuten z. B. E und e Mauern, welche aufgeführt, Graben, welche gezogen werden sollen, so werden beide Wirkungen durch die Länge, Breite und Höhe oder Tiefe bestimmt. Es bedeute E eine Mauer von 6′ Höhe, 2′ Dicke und 100′ Länge und e eine andere von 8′ Höhe, 3′ Dicke und 80′ Länge, so verhält sich $E : e = (6 : 8) + (2 : 3) + (100 : 80) = 6.2.100 : 8.3.80$ und man kann also dieses letztere Verhältniß statt E : e setzen. Wenn an einem Baue oder dergleichen gearbeitet wird, so ist die Zeit der Arbeiter zusammengesetzt aus der Menge der Tage, welche sie brauchen und aus der Zahl der Tagesstunden, die sie arbeiten, also werden T und t zusammengesetzte Verhältnisse enthalten. Gesetzt, an einem Baue E würde 60 Tage lang, täglich 8 Stunden und an einem andern e 100 Tage lang, täglich 10 Stunden gearbeitet, so verhielte sich $T : t = (60 : 100) + (8 : 10) = 60.8 : 100.10$, und man kann also statt T : t dies letztere Verhältniß 60.8 : 100.10 setzen.

§. 143.

Zusatz.

Aus diesen Betrachtungen wird sich erklären, warum in der Zinsrechnung, überhaupt in der Reesischen Regel, gewisse Glieder mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt, überhaupt, warum die Aufsätze so und nicht anders gemacht werden müssen. Wir wollen zuerst Beispiele aus der Zinsrechnung wählen.

Ein Kapital von 8000 thlrn. ist auf $3\frac{3}{4}$ Jahr zu $4\frac{1}{2}$ Prozent verliehen, wie viel Zinsen trägt es?

Der Ausdruck zu $4\frac{1}{2}$ Prozent heißt: ein Kapital von 100 thlrn. trägt in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ thlr. Zinsen. Man setze nun die jährlichen Zinsen von 100 thlrn. = E, die gesuchten Zinsen von 8000 thlrn.

Wenn $a : b = c : d$
und $f : g = h : k$

und in beiden Proportionen der Exponent $= e$ ist, so kann man für beide setzen:

$$\begin{array}{rrcrr} & a & : & ae & = & c & : & ce \\ \text{und} & f & : & fe & = & h & : & he \end{array}$$

also soll sein $a+f : ae+fe = c+h : ce+he$.

Im zweiten und vierten Gliede ist ein gemeinschaftlicher Faktor e, den man allein setzen und die ungleichen in eine Klammer daneben schreiben kann (§. 24.), also heißt die letzte Proportion so:

$$a+f : (a+f)\,e = c+h : (c+h)\,e.$$

In dieser letztern Proportion ist der Exponent wieder $= e$ und dieselbe also richtig.

Daß der Satz auch für die Subtraktion gilt, erhellet von selbst, denn man darf nur das $+$ mit $-$ vertauschen.

Beispiel in Zahlen.

$$\begin{array}{rrcrr} \text{Wenn} & 12 & : & 8 & = & 15 & : & 10 \\ \text{und} & 6 & : & 4 & = & 24 & : & 16 \\ \hline \text{so ist} & 18 & : & 12 & = & 39 & : & 26 \\ \text{oder} & 6 & : & 4 & = & -9 & : & -6. \end{array}$$

§. 130.

Aufgabe.

Eine Zahl so in 2 Theile zu theilen, daß die beiden Theile sich wie zwei gegebene Zahlen zu einander verhalten.

Es seien p und q die gegebenen Verhältnißzahlen, a die Zahl, welche getheilt werden soll und x und y ihre beiden Theile, so soll sich verhalten:

$$p : q = x : y$$

also nach §. 121., a) $p+q : p = x+y : x$

und da $x+y = a$ ist, so kann man setzen:

$$p+q : p = a : x.$$

$$\text{Also } x = \frac{ap}{p+q}.$$

Eben so ist auch $p+q : q = x+y : y$

oder $p+q : q = a : y.$

$$\text{Also } y = \frac{aq}{p+q}.$$

Man findet also die beiden Theile, wenn man die gegebenen Verhältnißzahlen addirt und zwei Exempel nach der Regel de tri aufsetzt:

1) Die Summe der Verhältnißzahlen $(p+q)$ verhält sich zu der ersten Verhältnißzahl (p), wie die ganze zu theilende Zahl (a) zum ersten Theile (x).

2) Die Summe der Verhältnißzahlen $(p+q)$ verhält sich zu der zweiten Verhältnißzahl (q), wie die ganze zu theilende Zahl (a) zum zweiten Theile (y).

Beispiel.

Man soll 80 so in 2 Theile theilen, daß sich dieselben wie 4 und 6 zu einander verhalten. Also:

$4+6 : 4 = 80 : x$ und $4+6 : 6 = 80 : y$

oder $10 : 4 = 80 : x$ und $10 : 6 = 80 : y$

$x = 32$ $\qquad$ $y = 48$.

§. 131.

Zusatz.

Auf gleiche Art läßt sich auch eine Zahl in mehrere Theile theilen, die sich wie eben so viel gegebene Verhältnißzahlen zu einander verhalten.

Es werde z. B. a in drei Theile (x, y, z) getheilt, die sich wie p, q, r zu einander verhalten.

Zuerst hat man:

$$\begin{array}{rrcl} & p : q & = & x : y \\ \text{also} & p+q : q & = & x+y : y \\ \text{aber auch} & q : r & = & y : z \\ \hline \text{also nach §. 128., Nr. 1.} & p+q : r & = & x+y : z. \end{array}$$

Folglich nach §. 121., a) $p+q+r : x+y+z = r : z$ oder auch $= p : x = q : y$ und da $x+y+z = a$ ist, so kann man setzen:

$$p+q+r : a = r : z = p : x = q : y.$$

Daraus ergibt sich wieder die Regel: Man setze drei Exempel nach der Regel de tri auf, indem man die Proportionen macht:

1) Die Summe der Verhältnißzahlen $(p+q+r)$ verhält sich zu der ganzen zu theilenden Zahl (a), wie die erste Verhältnißzahl (p) zum ersten Theile (x).

2) Die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zu der ganzen zu theilenden Zahl, wie die zweite Verhältnißzahl (q) zum zweiten Theile (y).

3) Die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zu der ganzen zu theilenden Zahl, wie die dritte Verhältnißzahl (r) zum dritten Theile (z).

So verfährt man denn auch bei 4 und mehr Theilen. Immer addirt man alle Verhältnißzahlen und macht Proportionen aus dieser Summe, der ganzen zu theilenden Zahl, und jede einzelnen Verhältnißzahl.

§. 132.

Zusatz.

Auf diesen wichtigen Satz beruhet in der praktischen Rechenkunst die Gesellschafts- und Vermischungsrechnung. Beispiele werden unten vorkommen. Hier nur eins zur Erläuterung.

Es nehmen 4 Personen ein Loos in der Lotterie gemeinschaftlich. A gibt zum Loose 5 thlr., B gibt 7 thlr., C gibt 4 thlr., D aber 9 thlr. Der Gewinn beträgt 8000 thlr., wie viel bekommt jeder in Verhältniß zu seiner Einlage?

Hier ist $a = 8000$ thlr., $p = 5$ thlr., $q = 7$ thlr., $r = 4$ thlr., $s = 9$ thlr., also $p+q+r+s = 25$ thlr., und die Rechnung folgende:

$25 : 8000 = 5 : w$	$25 : 8000 = 7 : x$
Also $w = 1600$ thlr.	Also $x = 2240$ thlr.
$25 : 8000 = 4 : y$	$25 : 8000 = 9 : z$
Also $y = 1280$ thlr.	Also $z = 2880$ thlr.

Es ist $w = 1600$ thlr.
$x = 2240$ "
$y = 1280$ "
$z = 2880$ "

Also $w+x+y+z = a = 8000$ thlr.

B. Von zusammengesetzten Verhältnissen und Proportionen.

§. 133.

Erklärung.

Was zusammengesetzte Verhältnisse sind, haben wir §. 102. erklärt. Es kann aber ein Verhältniß nicht bloß aus zwei andern, sondern auch aus dreien und mehrern zusammengesetzt sein. Will man z. B. Zentner und Quentchen mit einander vergleichen, so muß man zuerst Zentner mit Pfund, dann Pfund mit Loth, endlich Loth mit Quentchen vergleichen, also ist das Verhältniß des Zentners zum Quentchen zusammengesetzt aus dem Verhältnisse des Zentners zum Pfunde, des Pfundes zum Lothe, des Lothes

zum Quentchen, und die Proportion ist: 1 Zentner : 1 Quentchen = (110 : 1) + (32 : 1) + (4 : 1). Wie nun solche zusammengesetzte Verhältnisse sich behandeln und auf einfache reduziren lassen, lehren die folgenden Paragraphen.

§. 134.

Lehrsatz.

Das Verhältniß zweier Produkte ist aus den Verhältnissen ihrer Faktoren zusammengesetzt, d. h. zwei Produkte verhalten sich zu einander, wie der erste Faktor des ersten Produkts zum ersten Faktor des andern und wie der zweite Faktor des ersten zum zweiten Faktor des andern.

Es seien die Produkte ab und cd, so soll sich verhalten ab : cd = (a : c) + (b : d).

Um dies zu beweisen, verwandle man das Verhältniß b : d in ein anderes, dessen erstes Glied c ist, d. h. man suche zu b, d und c die vierte Proportionalzahl, also:

$$b : d = c : x$$

$$\text{und } x = \frac{cd}{b}$$

$$\text{folglich } b : d = c : \frac{cd}{b}$$

und das Verhältniß $c : \frac{cd}{b}$ ist also einerlei mit dem Verhältnisse b : d. Man setze der Kürze wegen $\frac{cd}{b} = f$, so ist b : d = c : f. Nun ist offenbar

$$\begin{array}{rrcl} & a : & c & = a : c \\ \text{und} & b : & d & = c : f \\ \hline \text{folglich nach §. 121. und 128.} & ab : & cd & = a : f. \end{array}$$

Es werden also hier die Größen a und f mit einander verglichen und zwar so, daß man zuerst a mit c und dann c mit f vergleicht, also ist das Verhältniß a : f zusammengesetzt aus den Verhältnissen a : c und c : f, folglich auch das Verhältniß ab : cd, weil es dem Verhältnisse a : f gleich ist, zusammengesetzt aus den Verhältnissen a : c und c : f; aber statt c : f kann man auch das gleiche b : d setzen, folglich ist das Verhältniß ab : cd zusammengesetzt aus den Verhältnissen a : c und b : d, d. h. das Verhältniß zweier Produkte ist aus den Verhältnissen ihrer Faktoren zusammengesetzt. Beispiel:

24 = 3 . 8 und 36 = 4 . 9, also 24 : 36 = (3 : 4) + (8 : 9).

§. 135.

Zusatz.

Umgekehrt, wenn $ab : cd = (a : c) + (b : d)$, so ist auch $(a : c) + (b : d) = ab : cd$, d. h. ein zusammengesetztes Verhältniß wird in ein einfaches verwandelt, wenn man die gleichliegenden Glieder mit einander multiplizirt. Wenn also gegeben ist $A : B = (p : q) + (r : s)$, so folgt daraus $A : B = pr : qs$.

§. 136.

Zusatz.

Das Verhältniß von Produkten aus drei und mehrern Faktoren ist aus so viel Verhältnissen zusammengesetzt, als Faktoren da sind, also:

$abcd : efgh = (a : e) + (b : f) + (c : g) + (d : h)$.

Denn es ist 1) $ab : ef = (a : e) + (b : f)$. Nun sehe man ab und ef, jedes als Einen Faktor an, so ist

2) $abc : efg = (ab : ef) + (c : g)$, aber $ab : ef = (a : e) + (b : f)$, also $abc : efg = (a : e) + (b : f) + (c : g)$.

Nun sehe man wieder abc und efg, jedes als Einen Faktor an, so ist

3) $abcd : efgh = (abc : efg) + (d : h)$, aber $abc : efg = (a : e) + (b : f) + (c : g)$, also:

$abcd : efgh = (a : e) + (b : f) + (c : g) + (d : h)$

u. s. w. auch bei mehrern Faktoren.

§. 137.

Der Exponent des zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Produkte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse, woraus jenes besteht. Denn wenn $ab : cd = (a : c) + (b : d)$, so ist offenbar $\frac{cd}{ab} = \frac{c}{a} \cdot \frac{d}{b}$. Das Zeichen + zwischen den einfachen Verhältnissen zeigt daher keinesweges eine Addition an, sondern nur den Begriff der Zusammensetzung.

§. 138.

Zusatz.

Zusammengesetzte Verhältnisse kommen in der praktischen Rechenkunst sehr häufig vor. Schon in der gemeinen Regel de tri muß man Anwendung davon machen, wenn die Verhältnißglieder nicht in einerlei Einheit gegeben sind. Hat man z. B. das

Exempel: 2 Qt. kosten 9 pf., was kosten 8 Ztn., so ist das Verhältniß der Quentchen zu den Zentnern, so wie das der Pfennige zu den herauskommenden Thalern zusammengesetzt und die Proportion:

$$2\text{ Qt.} : 8\text{ Ztn.} = 9\text{ pf.} : x\text{ thlr.}$$

kann so aufgelöst werden:

1) Es verhalten sich

$$2\text{ Qt.} : 8\text{ Ztn.} = (2:8) + (1:110) + (1:32) + (1:4)$$
$$= 2.1 : 8.110.32.4 \text{ oder } 2 : 8.110.32.4.$$

2) $9\text{ pf.} : x\text{ thlr.} = (9:x) + (1:12) + (1:24)$
$= 9.1 : x.12.24.$

Also statt des Verhältnisses 2 Qt. : 8 Ztn. setzt man das Gleiche $(2:8)+(1:110)+(1:32)+(1:4)$ oder $2:8.110.32.4$ und statt 9 pf. : x thlr. das Gleiche $(9:x) + (1:12) + (1:24)$ oder $9 : x.12.24$. Folglich heißt nun die Proportion:

$$2 : 8.110.32.4 = 9 : x.12.24.$$

Nimmt man nun die Produkte der äußern und mittlern Glieder, so ist $2.x.12.24 = 9.8.110.32.4$

und folglich $x = \frac{9 \cdot 8 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}{2 \cdot 12 \cdot 24}$.

Darin liegt also der Grund, warum man in solchen Exempeln durch Multiplikation mit 110, 32, 4 die Zentner zu Quentchen und nachher, wenn man das Produkt der mittlern Glieder durch das erste dividirt hat, noch den gefundenen Quotienten durch die Division mit 12 und 24 zu Thalern machen muß.

§. 139.

Zusatz.

Außerdem aber kommen zusammengesetzte Verhältnisse in allen den Exempeln vor, die nach der sogenannten Regula Quinque, nach der Reesischen und Kettenregel gerechnet werden.

Wenn nämlich durch irgend eine Ursache eine Wirkung erzeugt wird, so hängt diese letztere ab, theils von der Größe der Ursache, theils von der Länge der Zeit, in der die Ursache wirkt. So hängt die Menge des Wassers, welche beim Regen herunterfällt, theils von der Menge und Größe der Regentropfen, theils von der Länge der Zeit ab, in der es regnet. So hängen auch Zinsen ab von der Größe der Kapitale und von der Länge der Zeit, in der sie ausstehen. Bezeichnet man nun zweierlei Wirkungen überhaupt durch E und e, ihre Ursachen durch C und c und die Zeiten, welche gebraucht werden, durch T und t, so verhält sich:

$$E : e = (C : c) + (T : t)$$
$$= CT : ct$$

d. h. die Wirkungen verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Ursachen in die Zeiten; Zinsen also z. B. wie die Produkte aus den Kapitalen in die Zeiten; Längen der Wege, die zwei Körper durchlaufen, wie die Produkte aus den Geschwindigkeiten in die Zeiten, welche die Körper brauchen; die Wirkungen, welche zwei abgeschossene Kugeln auf einen Gegenstand ausüben, wie die Produkte aus den Gewichten der Kugeln in ihre Geschwindigkeiten; die Arbeiten, welche von Personen in gewissen Zeiten verrichtet werden, wie die Produkte aus der Menge der Personen in die Zeit, welche sie brauchen; die Frachtpreise wie die Produkte aus dem Gewicht der Last in die Länge des Weges u. s. w. In allen diesen Fällen werden also zusammengesetzte Verhältnisse angewendet.

§. 140.

Zusatz.

Wenn man in der Proportion

$$E : e = CT : ct$$

die vorhergehenden Glieder durch T und die folgenden durch t dividirt, wodurch die Proportion nach §. 122. Nr. 6. nicht verändert wird, so kommt

$$\frac{E}{T} : \frac{e}{t} = \frac{CT}{T} : \frac{ct}{t}$$

oder

$$\frac{E}{T} : \frac{e}{t} = C : c$$

d. h. die Ursachen verhalten sich, wie die Wirkungen durch die Zeiten dividirt, also z. B. Kapitale, wie die Zinsen durch die Zeiten dividirt; Arbeiter, wie die Arbeiten, welche sie vollenden, durch die Zeiten dividirt; Geschwindigkeiten, wie die Längen der Wege durch die Zeiten dividirt; Geschwindigkeiten abgeschossener Kugeln, wie ihre Wirkungen durch die Gewichte der Kugeln dividirt.

§. 141.

Zusatz.

Dividirt man in der Proportion

$$E : e = CT : ct$$

die vorhergehenden Glieder durch C und die folgenden durch c, so erhält man

$$\frac{E}{C} : \frac{e}{c} = T : t$$

d. h. die Zeiten verhalten sich, wie die Wirkungen durch die Ursachen dividirt. Also in der Zinsrechnung die Zeiten, welche Kapitale

ausstehen, wie die Zinsen durch die Kapitale dividirt. Ferner die Zeiten, welche zwei bewegte Körper brauchen, wie die Längen der Wege durch die Geschwindigkeiten dividirt; die Zeiten, welche Arbeiter brauchen, wie die Arbeiten, die sie vollenden, durch die Menge der Arbeiter dividirt u. s. w.

§. 142.

Zusatz.

Oft ist es der Fall, daß die Glieder E, e, T, t selbst wieder zusammengesetzte Verhältnisse enthalten, in die sie aufgelöst werden müssen. Bedeuten z. B. E und e Mauern, welche aufgeführt, Graben, welche gezogen werden sollen, so werden beide Wirkungen durch die Länge, Breite und Höhe oder Tiefe bestimmt. Es bedeute E eine Mauer von 6′ Höhe, 2′ Dicke und 100′ Länge und e eine andere von 8′ Höhe, 3′ Dicke und 80′ Länge, so verhält sich $E : e = (6 : 8) + (2 : 3) + (100 : 80) = 6.2.100 : 8.3.80$ und man kann also dieses letztere Verhältniß statt E : e setzen. Wenn an einem Baue oder dergleichen gearbeitet wird, so ist die Zeit der Arbeiter zusammengesetzt aus der Menge der Tage, welche sie brauchen und aus der Zahl der Tagesstunden, die sie arbeiten, also werden T und t zusammengesetzte Verhältnisse enthalten. Gesetzt, an einem Baue E würde 60 Tage lang, täglich 8 Stunden und an einem andern e 100 Tage lang, täglich 10 Stunden gearbeitet, so verhielte sich $T : t = (60 : 100) + (8 : 10) = 60.8 : 100.10$, und man kann also statt T : t dies letztere Verhältniß 60.8 : 100.10 setzen.

§. 143.

Zusatz.

Aus diesen Betrachtungen wird sich erklären, warum in der Zinsrechnung, überhaupt in der Reesischen Regel, gewisse Glieder mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt, überhaupt, warum die Aufsätze so und nicht anders gemacht werden müssen. Wir wollen zuerst Beispiele aus der Zinsrechnung wählen.

Ein Kapital von 8000 thlrn. ist auf $3\frac{3}{4}$ Jahr zu $4\frac{1}{2}$ Prozent verliehen, wie viel Zinsen trägt es?

Der Ausdruck zu $4\frac{1}{2}$ Prozent heißt: ein Kapital von 100 thlrn. trägt in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ thlr. Zinsen. Man setze nun die jährlichen Zinsen von 100 thlrn. = E, die gesuchten Zinsen von 8000 thlrn.

in $3\frac{3}{4}$ Jahren = e, das Kapital 100 thlr. = C, die Zeit von 1 Jahre = T, das Kapital 8000 thlr. = c und die Zeit von $3\frac{3}{4}$ Jahren = t, so kann man nach der Proportion rechnen

$$E : e = CT : ct$$

und diese Proportion so ordnen, daß e das letzte Glied wird, also $CT : ct = E : e$, d. h. in Zahlen:

$$100 . 1 : 8000 . 3\tfrac{3}{4} = 4\tfrac{1}{2} : e,$$

und daher die Regel, daß bei der Zinsrechnung Kapital und Zeit multiplizirt werden müssen.

Setzt man nach Form der Kettenregel auf, so müssen Kapital und Zeit unter einander auf Einer Seite stehen, weil das, was auf Einer Seite steht, mit einander multiplizirt wird. Also:

? thlr. Zins.	8000 thlr. Kap.
	$3\frac{3}{4}$ Jahren
100 thlr. Kap.	
1 Jahre	$4\frac{1}{2}$ thlr. Zins.

In der Proportion $CT : ct = E : e$ bilden ct und E das Produkt der mittlern Glieder, deswegen kommen sie auf Eine, auf die rechte Seite, weil sie den Dividendus ausmachen; die Glieder CT und e bilden das Produkt der äußern Glieder und kommen daher auf die linke Seite. Es enthält aber dies Produkt den Divisor (100 thlr. Kapital und 1 Jahr) und den Quotienten [das Frageglied (? thlr. Zinsen)], darum wird mit dem Produkte der Glieder auf der linken Seite in das Produkt der Glieder auf der rechten dividirt und was herauskommt, ist der gesuchte Quotient.

Nun kann man auch nach Kapital, Zeit und Prozenten fragen; dies gibt folgende Aufsätze:

I.

? thlr. Kap.	1350 thlr. Zins.
$3\frac{3}{4}$ Jahren	
$4\frac{1}{2}$ thlr. Zins.	100 thlr. Kap.
	1 Jahre.

II.

? Jahre	1350 thlr. Zins.
8000 thlr. Kap.	
$4\frac{1}{2}$ thlr. Zins.	100 thlr. Kap.
	1 Jahre.

III.

? thlr. Zins.	100 thlr. Kap.
	1 Jahre
8000 thlr. Kap.	
$3\frac{3}{4}$ Jahren	1350 thlr. Zins.

Der Aufsatz in I. gründet sich auf die Proportion $E : e = CT : ct$. Die mittlern Glieder dieser Proportion sind e und CT, darum müssen diese Glieder auf die rechte Seite kommen;

die Glieder E und ct bilden das Produkt der äußern Glieder und kommen darum auf die linke Seite. Von diesen ist c das Frageglied (? thlr. Kapital) und weil c mit t multiplizirt wird, so muß t ($3\frac{3}{4}$ Jahre) unter dem Frageglied stehen. E und t bilden nun den Divisor und der Quotient ist das gesuchte c.

Der Aufsatz in II. gründet sich auf die nämliche Proportion E : e = CT : ct. Es kommen also auf die rechte Seite die nämlichen Glieder, auf der linken aber ist der Unterschied, daß, weil jetzt t das Frageglied ist, das Kapital c nebst E den Divisor bildet.

Der Aufsatz in III. gründet sich auf die Proportion ct : CT = e : E, weil die Zinsen (E) von dem Kapitale C (100 thlr.) in der Zeit T (1 Jahr) gesucht werden. Auf die rechte Seite kommen also die Glieder e und CT und auf die linke die Glieder E und ct, von denen ct der Divisor und E der gesuchte Quotient (das Frageglied) ist.

§. 144.

Zusatz.

Folgendes Exempel aus der Reesischen Regel enthält mehrere zusammengesetzte Verhältnisse:

Wie lang ist eine Mauer von 10′ Höhe und 4′ Dicke, wenn sie von 50 Arbeitern in 30 Tagen, täglich 10 Stunden, vollendet wird; man weiß, daß 6 Arbeiter in 8 Tagen, täglich 8 Stunden, eine Mauer von 100′ Länge, 9′ Höhe und 3′ Dicke verfertigen können.

E und e sind hier die beiden Mauern, C und c die Arbeiter, T und t die Zeiten, welche sie brauchen; E und e aber, so wie T und t, sind zusammengesetzt. Es wird von E die Länge, welche wir x nennen wollen, gesucht, also ist die Proportion ct : CT = e : E.

Nun verhält sich t : T = (8 T. : 30 T.) + (8 St. : 10 St.) = 8 . 8 : 30 . 10; ferner e : E = (100′ : x′) + (9′ : 10′) + (3′ : 4′) = 100′ . 9′ . 3′ : x′ . 10′ . 4′. Endlich ist C = 50, c = 6 Arbeiter. Also heißt die Proportion:

ct : CT = e : E

in Zahlen so:

6 . 8 . 8 : 50 . 30 . 10 = 100 . 9 . 3 : x . 10 . 4,

wonach sich der Aufsatz nach der Reesischen Regel beurtheilen läßt.

? Länge der Mauer	50 Arbeiter
10′ Höhe	30 Tagen
4′ Dicke	10 Stunden
6 Arbeiter	100′ Länge
8 Tage	9′ Höhe
8 Stunden	3′ Dicke.

Die Glieder, nämlich 50.30.10 und 100.9.3, bilden das Produkt der mittlern Glieder und kommen also auf die rechte Seite; auch sieht man, warum Arbeiter, Tage, Tagesstunden, so wie Länge, Höhe und Dicke der Mauer als zusammengehörig zu betrachten sind. Die Glieder x.10.4 und 6.8.8 bilden das Produkt der äußern Glieder und kommen also auf die linke Seite; der Faktor x bildet das Frageglied und ist der gesuchte Quotient, die übrigen Glieder machen den Divisor, so wie alle Glieder der rechten Seite den Dividendus aus.

§. 145.
Zusatz.

Es kann jedes Glied der Aufgabe zum Frageglied gemacht, oder als unbekannt angesehen werden, daraus bilden sich denn so viele verschiedene Aufgaben und Aufsätze, als Glieder vorhanden sind. Doch gibt es in den Aufsätzen nur vier Hauptverschiedenheiten, je nachdem nämlich das unbekannte Glied zu CT oder zu ct, oder zu E oder e gehört.

Wir wollen jetzt die Aufsätze von allen möglichen Fällen bilden.

1) Frage nach der Länge der Mauer E.

? Länge der Mauer	50 Arbeiter
10′ Höhe	30 Tage
4′ Dicke	10 Stunden
6 Arbeiter	100′ Länge
8 Tage	9′ Höhe
8 Stunden	3′ Dicke.

Es kommt durch die Rechnung $x = 2636\frac{2}{3}\frac{1}{2}$ Fuß.

2) Frage nach der Höhe der Mauer E.

? Höhe der Mauer	50 Arbeiter
$2636\frac{2}{3}\frac{1}{2}$′ Länge	30 Tage
4′ Dicke	10 Stunden
6 Arbeiter	100′ Länge
8 Tage	9′ Höhe
8 Stunden	3′ Dicke.

3) Frage nach der Dicke der Mauer E.

? Dicke der Mauer	50 Arbeiter
$2636\frac{2}{3}\frac{1}{2}$′ Länge	30 Tage
10′ Höhe	10 Stunden
6 Arbeiter	100′ Länge
8 Tage	9′ Höhe
8 Stunden	3′ Dicke.

Diese drei Aufsätze sind nicht wesentlich von einander verschieden, da das Frageglied x immer unter den Bestimmungen von E liegt und die übrigen Produkte ct, CT und e an ihren Stellen bleiben.

4) Frage nach den Arbeitern C.

? Arbeiter	$2636\frac{2}{3}\frac{1}{2}$′ Länge
30 Tage	10′ Höhe
10 Stunden	4′ Dicke
100′ Länge	6 Arbeiter
9′ Höhe	8 Tage
3′ Dicke	8 Stunden.

Der Aufsatz ist nach der Proportion e : E = ct : CT gebildet, darum kommen die Glieder E und ct auf die rechte und die Glieder e und CT auf die linke Seite; das Unbekannte ist C selbst, und folglich bilden die Bestimmungen von e und T die Divisoren.

5) Frage nach der Zeit, welche die Arbeiter C brauchen.

? Tage	$2636\frac{2}{3}\frac{1}{2}$′ Länge
50 Arbeiter	10′ Höhe
10 Stunden	4′ Dicke
100′ Länge	6 Arbeiter
9′ Höhe	8 Tage
3′ Dicke	8 Stunden.

6) Frage nach den Stunden, welche die C Arbeiter täglich arbeiten.

? Stunden	$2636\frac{2}{3}\frac{1}{2}$′ Länge
30 Tage	10′ Höhe
50 Arbeiter	4′ Dicke
100′ Länge	6 Arbeiter
9′ Höhe	8 Tage
3′ Dicke	8 Stunden.

Diese drei Aufsätze sind wieder im Wesentlichen einerlei, da das Frageglied x unter den Bestimmungen des Produkts CT bleibt und die übrigen Glieder also ihre Stelle nicht verändern.

7) Frage nach der Länge der Mauer e.

? Länge der Mauer	6 Arbeiter
9′ Höhe	8 Tage
3′ Dicke	8 Stunden
50 Arbeiter	$2636\frac{2}{3}\frac{1}{2}$′ Länge
30 Tage	10′ Höhe
10 Stunden	4′ Dicke.

Der Aufsatz ist nach der Proportion CT : ct = E : e gemacht, darum kommen die Glieder, welche zu ct und E gehören, auf die rechte und die zu CT und e gehörigen Glieder auf die linke Seite. Das unbekannte Glied liegt unter den Bestimmungen von e.

8) Frage nach der Höhe der Mauer e.

? Höhe der Mauer	6 Arbeiter
100′ Länge	8 Tage
3′ Dicke	8 Stunden
50 Arbeiter	$2636\frac{2}{3}{}'$ Länge
30 Tage	10′ Höhe
10 Stunden	4′ Dicke.

9) Frage nach der Dicke der Mauer e.

? Dicke der Mauer	6 Arbeiter
100′ Länge	8 Tage
9′ Höhe	8 Stunden
50 Arbeiter	$2636\frac{2}{3}{}'$ Länge
30 Tage	10′ Höhe
10 Stunden	4′ Dicke.

Diese drei Aufsätze sind wiederum nicht wesentlich verschieden, da das unbekannte Glied x immer unter den Bestimmungen von e bleibt.

10) Frage nach den Arbeitern c, welche die Mauer e vollenden.

? Arbeiter	100′ Länge
8 Tage	9′ Höhe
8 Stunden	3′ Dicke
$2636\frac{2}{3}{}'$ Länge	50 Arbeiter
10′ Höhe	30 Tage
4′ Dicke	10 Stunden.

Der Aufsatz ist nach der Proportion E : e = CT : ct gemacht, darum kommen die zu e und CT gehörigen Glieder auf die rechte, die zu E und ct gehörigen auf die linke Seite. Das Frageglied x ist c selbst.

11) Frage nach der Zeit in Tagen (t), welche die c Arbeiter brauchen.

? Tage	100′ Länge
10 Stunden	9′ Höhe
6 Arbeiter	3′ Dicke
$2636\frac{2}{3}{}'$ Länge	50 Arbeiter
10′ Höhe	30 Tage
4′ Dicke	10 Stunden.

12) Frage

12) Frage nach den Stunden, welche die c Arbeiter täglich anwenden.

? Stunden	100′ Länge
8 Tage	9′ Höhe
6 Arbeiter	3′ Dicke
2636$\frac{2}{12}$′ Länge	50 Arbeiter
10′ Höhe	30 Tage
4′ Dicke	10 Stunden.

Auch diese letzten drei Aufsätze sind nicht wesentlich von einander verschieden, weil das Frageglied x in allen dreien unter den Bestimmungen von ct bleibt.

§. 146.

Zusatz.

Auch bei der Gesellschaftsrechnung kommen zusammengesetzte Verhältnisse vor, wenn nämlich auf die Zeit, wie lange die Kapitale benutzt werden, Rücksicht genommen wird.

Es sei folgendes Exempel gegeben:

Drei Personen legen zu verschiedenen Zeiten Geld zusammen in eine Handlung. A zuerst 2000 thlr., B 6 Monate später 1500 thlr., C 4000 thlr. aber 8 Monate später noch als B. Sie gewinnen zusammen 3000 thlr., nachdem seit der ersten Einlage 3$\frac{3}{4}$ Jahre verflossen sind. Wie viel bekommt jeder zu seinem Antheile?

Die Antheile der drei Personen verhalten sich jetzt zu einander nicht mehr bloß wie die Einlagen, sondern wie die Einlagen und die Zeiten, d. h. wie die Produkte aus den Einlagen in die Zeiten. Man bestimmt daher zuerst die Zeit, wie lange jede Einlage in der Handlung gewesen ist. Die Einlage von A hat die ganzen 3$\frac{3}{4}$ Jahre = 3 Jahre 9 Monate = 45 Monate gestanden, die Einlage von B 6 Monate weniger, also 39 Monate, und die Einlage von C noch 8 Monate weniger, also 31 Monate. So ergibt sich denn folgender Aufsatz.

Einlage.	Zeit.	Produkte aus der Einlage in die Zeit.	Gewinn.
A. 2000 thlr.	45 Monate	90000	
B. 1500 "	39 "	58500	3000 thlr.
C. 4000 "	31 "	124000	
Summe der Produkte =		272500.	

Proportionen.

$$272500 : 90000 = 3000 : x$$
$$x = 990\tfrac{52}{109} \text{ thlr.}$$
$$272500 : 58500 = 3000 : y$$
$$y = 644\tfrac{4}{109} \text{ thlr.}$$
$$272500 : 124000 = 3000 : z$$
$$z = 1365\tfrac{15}{109} \text{ thlr.}$$

Setzt man allgemein die Einlage von A = p, die von B = q, die von C = r, und die Zeiten, welche jede Einlage geſtanden hat, von A = s, von B = t, von C = u, und den Gewinn = m, ſo wird obige Rechnung ſo dargeſtellt:

Einlage.	Zeit.	Produkte aus der Einlage in die Zeit.	Gewinn.
p	s	ps	
q	t	qt	m
r	u	ru	

Summe der Produkte = ps + qt + ru.

Alſo
$$ps + qt + ru : ps = m : x$$
$$x = \frac{mps}{ps + qt + ru}$$
$$ps + qt + ru : qt = m : y$$
$$y = \frac{mqt}{ps + qt + ru}$$
$$ps + qt + ru : ru = m : z$$
$$z = \frac{mru}{ps + qt + ru}.$$

Es laſſen ſich hierbei noch verſchiedene Aufgaben denken, je nachdem man die Einlagen, oder die Zeiten, oder den Gewinn als unbekannt anſieht. Der letztere wird offenbar gefunden, wenn man die einzelnen Gewinne addirt, denn

$$x = \frac{mps}{ps + qt + ru}$$
$$y = \frac{mqt}{ps + qt + ru}$$
$$z = \frac{mru}{ps + qt + ru}$$

$$\text{alſo } x + y + z = \frac{mps + mqt + mru}{ps + qt + ru} = \frac{m(ps + qt + ru)}{ps + qt + ru} = m.$$

Für die übrigen Fälle werden wir unten Beiſpiele anführen.

§. 147.

Zusatz.

Die sogenannte Kettenregel ist auch nichts anders, als eine Zusammenstellung mehrerer zusammengesetzten Verhältnisse, und der Name stammt von der besondern Art, wie die einzelnen Verhältnißglieder mit einander verbunden werden. Wir wollen dieses an einigen Beispielen erklären.

Es kauft jemand 10 Ztn. für 300 thlr. und gewinnt beim Verkaufe 32 Prozent; wie theuer verkauft er das Loth? Der gewöhnliche Aufsatz nach der Kette ist folgender:

? pf. Einn.	1 Lth.
32 Lth.	1 Pfd.
110 Pfd.	1 Ztn.
10 Ztn.	300 thlr. Ausg.
100 thlr. Ausg.	132 thlr. Einn.
1 thlr. Einn.	24 gr. Einn.
1 gr. Einn.	12 pf. Einn.

Das Beispiel ist eigentlich ein reines Regel-de-tri-Exempel, wenn man die Angabe des Gewinnes wegläßt; man würde nämlich aufsetzen:

10 Ztn. : 1 Lth. = 300 thlr. : x pf.

Hier sieht man gleich, daß zusammengesetzte Verhältnisse Statt finden, nämlich das Verhältniß 10 Ztn. : 1 Lth. ist zusammengesetzt aus (10 Ztn. : 1 Ztn.) + (110 Pfd. : 1 Pfd.) + (32 Lth. : 1 Lth.) = 10.110.32 : 1, und das Verhältniß von 300 thlrn. : x pf. ist zusammengesetzt aus (300 thlr. : 1 thlr.) + (24 gr. : 1 gr.) + (12 pf. : x pf.) = 300.24.12 : 1. Also heißt jetzt der Aufsatz:

$$10.110.32 : 1\text{ Lth.} = 300.24.12 : x\text{ pf.}$$

$$\text{Also } x = \frac{1 \cdot 300 \cdot 24 \cdot 12}{10 \cdot 110 \cdot 32}.$$

Der Werth von x wäre jetzt die Ausgabe für 1 Loth. Diese Ausgabe würde man zur Einnahme machen durch den Aufsatz:

$$100\text{ thlr. A.} : 132\text{ thlr. E.} = \frac{300 \cdot 24 \cdot 12}{10 \cdot 110 \cdot 32}\text{ pf. A.} : x\text{ pf. E.}$$

$$\text{Also } x\text{ pf. E.} = \frac{132 \cdot 300 \cdot 24 \cdot 12}{100 \cdot 10 \cdot 110 \cdot 32}.$$

Hier sind die Zahlen: 100, 10, 110, 32 Divisoren, darum kommen sie in der Kette auf die linke Seite, die Zahlen: 132, 300, 24, 12 bilden durch ihr Produkt den Dividendus, darum kommen sie auf die rechte Seite. Diese richtige Stellung der Glieder erhält man nun jedesmal, wenn man mit dem Fragegliede oben auf der linken Seite anfängt, das, wodurch dieses Frage-

glied unmittelbar bestimmt wird (z. B. der Preis durch die Waare, die Waare durch den Preis) auf die rechte Seite gegenüber setzt und nun auf der linken allemal ganz genau mit der Art von Größe wieder anhebt, mit der man auf der rechten geendigt hatte, so daß das letzte Glied auf der rechten Seite wiederum mit dem Fragegliede auf der linken Seite genau übereinstimmt. Obiger Aufsatz würde also so gelesen:

Wie viel Pfennige Einnahme (d. h. beim Verkaufe) kostet 1 Lth., wenn 32 Lth. ist 1 Pfd. und 110 Pfd. ist 1 Ztn. und 10 Ztn. beim Einkaufe kosten 300 thlr. Ausgabe, und 100 thlr. Ausgabe so viel sind als 132 thlr. Einnahme, und 1 thlr. Einnahme so viel als 24 gr. Einnahme und 1 gr. Einnahme so viel als 12 pf. Einnahme ist.

§. 148.

Zusatz.

Folgendes Beispiel ist zusammengesetzter:

Wie viel Pfennige in Preuß. Courant kosten $2\frac{3}{4}$ Quentchen beim Verkaufe, wenn 30 Zentner beim Einkaufe mit 800 thlrn. Hamb. Banko bezahlt und 20 Prozent gewonnen werden? Man weiß, daß Hamb. Banko 44 Prozent besser ist als Sächs. und Sächs. 5 Prozent besser ist als Preuß. Courant, d. h. 100 thlr. Hamb. Banko sind = 144 thlr. Sächs. und 100 thlr. Sächs. = 105 thlr. Preuß. Courant. Der Aufsatz ist nun folgender:

? pf. Preuß. Cour. Einn.	$2\frac{3}{4}$ Quentchen
4 Quentchen	1 Loth
32 Loth	1 Pfund
110 Pfund	1 Zentner
30 Zentner	800 thlr. Hamb. Banko Ausg.
100 thlr. Hamb. Banko Ausg.	144 thlr. Sächs. Ausg.
100 thlr. Sächs. Ausg.	105 thlr. Preuß. Cour. Ausg.
100 thlr. Preuß. Cour. Ausg.	120 thlr. Preuß. Cour. Einn.
1 thlr. Preuß. Cour. Einn.	24 gr. Preuß. Cour. Einn.
1 gr. Preuß. Cour. Einn.	12 pf. Preuß. Cour. Einn.

Alle Nebenverhältnisse der Geldsorten und des Gewinnes bei Seite gesetzt, ist das reine Regel-de-tri-Exempel folgendes:

30 Ztn. : $2\frac{3}{4}$ Qt. = 800 thlr. Hamb. B. : x pf. Hamb. B.

oder mit den zusammengesetzten Verhältnissen

(30 Ztn. : 1 Ztn.) + (110 Pfd. : 1 Pfd.) + (32 Lth. : 1 Lth.) + (4 Qt. : $2\frac{3}{4}$ Qt.) = (800 thlr. : 1 thlr.) + (24 gr. : 1 gr.) + (12 pf. : x pf.)

oder 30 . 110 . 32 . 4 : $2\frac{3}{4}$ = 800 . 24 . 12 : x.

Also $x = \frac{2\frac{3}{4} \cdot 800 \cdot 24 \cdot 12}{30 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}$ pf. Hamb. Banko.

Nun kann man die Verwandlung der Münzsorten und den Betrag des Gewinnes durch folgende einzelne Exempel finden:

100 thlr. H. B. : 144 thlr. S. $= \frac{2\frac{3}{4} \cdot 800 \cdot 24 \cdot 12}{30 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}$ pf. H. B. : x pf. S.

Also $x = \frac{144 \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 800 \cdot 24 \cdot 12}{100 \cdot 30 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}$ pf. Sächs.

100 thl. S. : 105 thl. P. C. $= \frac{144 \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 800 \cdot 24 \cdot 12}{100 \cdot 30 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}$ pf. S. : x pf. P. C.

Also $x = \frac{105 \cdot 144 \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 800 \cdot 24 \cdot 12}{100 \cdot 100 \cdot 30 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}$ pf. Preuß. Cour.

Diese letztern pf. sind noch immer Ausgabe, aber durch den gegebenen Gewinn werden sie in Einnahme verwandelt, wenn man auffetzt:

100 thl. A. : 120 thl. E. $= \frac{105 \cdot 144 \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 800 \cdot 24 \cdot 12}{100 \cdot 100 \cdot 30 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}$ pf. A. : x pf. E.

Also x pf. Einnahme $= \frac{120 \cdot 105 \cdot 144 \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 800 \cdot 24 \cdot 12}{100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 30 \cdot 110 \cdot 32 \cdot 4}$ pf.

Alle Glieder, die den Divisor bilden, stehen nebst dem Fragegliede auf der linken, und alle Glieder, die den Dividendus ausmachen, auf der rechten Seite im Kettensatze. Auch sieht man jetzt ein, warum die Glieder auf der rechten und linken Seite gegen einander gehoben werden können, weil der Quotient unverändert bleibt, wenn Divisor und Dividendus mit einerley Zahl dividirt, d. h. gehoben werden.

§. 149.
Zusatz.

An folgendem noch zusammengesetzteren Beispiele wollen wir zugleich für alle einzelne darin enthaltene Fragen die Aufsätze nach der Kettenregel durchnehmen.

Wie viel thlr. Hamb. Banko kosten 40 Ztn. Brutto Hamb. Gewicht beim Einkaufe, wenn $3\frac{2}{3}$ Ct. Netto Berliner Gewicht für 8 pf. Preuß. Courant verkauft und $45\frac{1}{2}$ Prozent gewonnen werden? Man weiß, daß Hamb. Gewicht 9 Prozent besser ist als Berliner, Hamb. Banko 44 Prozent besser als Sächs. und Sächs. 5 Prozent besser ist als Preuß. Courant, und daß 9 Prozent Thara gerechnet werden.

Bekanntlich bedeutet Brutto die Waare mit dem Gepäcke und den Unreinigkeiten, Netto aber die reine Waare, und 9 Prozent

Tara heißt: um Netto zu bekommen, muß man von jedem 100 Brutto 9 abziehen.

Aufſatz nach der Kette:

? thlr. Hamb. Banko Ausg.	40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	91 Ztn. Netto Hamb. Gew.
100 Ztn. Netto Hamb. Gew.	109 Ztn. Netto Berl. Gew.
1 Ztn. Netto Berl. Gew.	110 Pfd. Netto Berl. Gew.
1 Pfd. Netto Berl. Gew.	32 Lth. Netto Berl. Gew.
1 Lth. Netto Berl. Gew.	4 Qt. Netto Berl. Gew.
$3\frac{2}{3}$ Qt Netto Berl. Gew.	8 pf. Preuß. Cour. Einn.
12 pf. Preuß. Cour. Einn.	1 gr. Preuß. Cour. Einn.
24 gr. Preuß. Cour. Einn.	1 thlr. Preuß. Cour. Einn.
105 thlr. Preuß. Cour. Einn.	100 thlr. Sächſ. Einn.
144 thlr. Sächſ. Einn.	100 thlr. Hamb. Banko Einn.
$145\frac{5}{9}$ thlr. Hamb. Banko Einn.	100 thlr. Hamb. Banko Ausg.

Alle Gewichts- und Geldverſchiedenheiten, ſo wie auch den Gewinn bei Seite geſetzt, wäre das reine Regel-de-tri-Exempel

$$3\tfrac{2}{3}\text{ Qt.} : 40\text{ Ztn.} = 8\text{ pf.} : x\text{ thlr.}$$

und dieſe zuſammengeſetzten Verhältniſſe in ihre einfachen aufgelöſt, käme

$$(3\tfrac{2}{3}\text{ Qt.} : 4\text{ Qt.}) + (1\text{ Lth.} : 32\text{ Lth.}) + (1\text{ Pfd.} : 110\text{ Pfd.}) + (1\text{ Ztn.} : 40\text{ Ztn.}) = (8\text{ pf.} : 12\text{ pf.}) + (1\text{ gr.} : 24\text{ gr.}) + (1\text{ thlr.} : x\text{ thlr.}),$$

oder $3\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 : 4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 = 8 \cdot 1 \cdot 1 : 12 \cdot 24 \cdot x,$

oder $3\frac{2}{3} : 4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 = 8 : 12 \cdot 24 \cdot x.$

Alſo $3\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24 \cdot x = 4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 \cdot 8.$

$$\text{Folglich } x = \frac{4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 \cdot 8}{3\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24}.$$

Der herausgekommene Quotient ſind Thaler Preuß. Courant. Da aber der Einkauf in Hamb. Banko geſchah, ſo muß das Preuß. erſt in Sächſ., dieſes in Hamb. Banko verwandelt werden. Dies gibt die Proportionen:

$$105\text{ thl. P. C.} : 100\text{ thl. S.} = \frac{4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 \cdot 8}{3\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24}\text{ thl. P. C.} : x\text{ thl. S.}$$

$$\text{Alſo } x\text{ thlr. Sächſ.} = \frac{4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 \cdot 8 \cdot 100}{3\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24 \cdot 105}.$$

Ferner:

$$144\text{ thl. S.} : 100\text{ thl. H. B.} = \frac{4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 \cdot 8 \cdot 100}{3\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24 \cdot 105} : x\text{ thl. H. B.}$$

$$\text{Alſo } x\text{ thlr. H. B.} = \frac{4 \cdot 32 \cdot 110 \cdot 40 \cdot 8 \cdot 100 \cdot 100}{3\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24 \cdot 105 \cdot 144}.$$

Nun muß aber auch noch auf Gewinn Rücksicht genommen, also Einnahme in Ausgabe verwandelt werden. Dies gibt die Proportion:

$$145\tfrac{1}{3}\text{thl.E.} : 100\text{thl.A.} = \frac{4.32.110.40.8.100.100}{3\frac{2}{3}.12.24.105.144}\ \text{thl.E.} : x\,\text{thl.A.}$$

$$\text{Also}\quad x\,\text{thlr.H.B.A.} = \frac{4.32.110.40.8.100.100.100}{3\frac{2}{3}.12.24.105.144.145\frac{1}{3}}.$$

Aber diese Ausgabe ist nur richtig, wenn beim Ein- und Verkaufe einerlei Gewicht der Waare angenommen wird. Da aber die Waare beim Einkaufe Brutto und Hamburger Gewicht, beim Verkaufe aber Netto und Berliner Gewicht ist, so muß auch Ersteres noch in Letzteres verwandelt werden.

Da das Netto und Berliner Gewicht im Divisor (nämlich $3\frac{2}{3}$ Ct. Netto Berl. Gew.) steht, das Brutto und Hamburger Gewicht aber (nämlich 40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.) im Dividendus, so muß man das Verhältniß mit Netto und Berliner Gewicht anfangen, also:

Netto B. G. : Brutto B. G. = 91 : 100
und Brutto B. G. : Brutto H. G. = 109 : 100

folgl. Netto B. G. : Brutto H. G. = (91 : 100) + (109 : 100)
= 91 . 109 : 100 . 100.

Daher denn

91 . 109 Brutto Hamb. Gew. = 100 . 100 Netto Berl. Gew.

d. h. im Dividendus, wo die 40 Ztn. Brutto Hamburger Gewicht sind, müssen noch die Faktoren 91 und 100 und im Divisor noch die Faktoren 100 und 100 zu stehen kommen. Also:

$$x\,\text{thlr.H.B.A.} = \frac{4.32.110.40.8.100.100.100.91.109}{3\frac{2}{3}.12.24.105.144.145\frac{1}{3}.100.100}.$$

Aus dieser Aufgabe nun können so viel andere Aufgaben gebildet werden, als Glieder da sind.

1) Durch Berechnung des obigen Exempels findet man $1925\frac{2}{27}$ thlr. Hamb. Banko Ausgabe. Also läßt sich jetzt die Aufgabe bilden: Wie viel Zentner Brutto Hamburger Gewicht kauft man für $1925\frac{2}{27}$ thlr. Hamb. Banko, wenn u. s. w. Der Aufsatz nach der Kette ist nun:

? Ztn. Brutto Hamb. Gew.	$1925\frac{2}{2\frac{5}{7}}$ thlr. Hamb. Banko A.
100 thlr. Hamb. Banko A.	144 thlr. Sächs. A.
100 thlr. Sächs. A.	105 thlr. Preuß. Cour. A.
100 thlr. Preuß. Cour. A.	$145\frac{1}{3}$ thlr. Preuß. Cour. E.
1 thlr. Preuß. Cour. E.	24 gr. Preuß. Cour. E.
1 gr. Preuß. Cour. E.	12 pf. Preuß. Cour. E.
8 pf. Preuß. Cour. E.	$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.
4 Qt. Netto Berl. Gew.	1 Lth. Netto Berl. Gew.
32 Lth. Netto Berl. Gew.	1 Pfd. Netto Berl. Gew.
110 Pfd. Netto Berl. Gew.	1 Ztn. Netto Berl. Gew.
91 Ztn. Netto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Berl Gew.
109 Ztn. Brutto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.

Die Grundproportion ist:

8 pf. : $1925\frac{2}{2\frac{5}{7}}$ thlr. = $3\frac{2}{3}$ Qt. : x Ztn.

2) Man kann Thara als unbekannt ansehen und so die Aufgabe bilden:

Wie viel Prozent Thara werden gerechnet, d. h. wie viel Netto geben 100 Brutto, wenn 40 Ztn. Brutto Hamburger Gewicht für $1925\frac{2}{2\frac{5}{7}}$ thlr. Hamburger Banko eingekauft und $3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berliner Gewicht für 8 pf. Preuß. Cour. verkauft werden? u. s. w. Der Aufsatz ist:

? Netto	100 Brutto
40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	$1925\frac{2}{2\frac{5}{7}}$ thlr. Hamb. Banko A.
100 thlr. Hamb. Banko A.	144 thlr. Sächs. A.
100 thlr. Sächs. A.	105 thlr. Preuß. Cour. A.
100 thlr. Preuß. Cour. A.	$145\frac{1}{3}$ thlr. Preuß. Cour. E.
1 thlr. Preuß. Cour. E.	24 gr. Preuß. Cour. E.
1 gr. Preuß. Cour. E.	12 pf. Preuß. Cour. E.
8 pf. Preuß. Cour. E.	$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.
4 Qt. Netto Berl. Gew.	1 Lth. Netto Berl. Gew.
32 Lth. Netto Berl. Gew.	1 Pfd. Netto Berl. Gew.
110 Pfd. Netto Berl. Gew.	1 Ztn. Netto Berl. Gew.
109 Ztn. Netto Berl. Gew.	100 Ztn. Netto Hamb. Gew.

Die Grundproportion ist die vorige.

Das Frageglied ist: Wie viel Netto geben 100 Brutto. Dieses Netto und Brutto kann als Hamburger oder Berliner Gewicht, als Zentner, Pfund, Loth oder Quentchen angesehen werden: das macht keinen Unterschied. Am bequemsten ist es indessen, beides, wie im obigen Aufsatze, als Zentner Hamburger Gewicht zu betrachten, und also würde das Frageglied vollständig heißen: Wie viel Zentner Netto Hamburger Gewicht geben 100 Ztn. Brutto Hamburger Gewicht; denn alsdann kann man

gleich mit 40 Ztn. Brutto Hamburger Gewicht auf der linken Seite wieder anfangen.

Rechnet man das Exempel, so kommt 91 Ztn. Netto Hamburger Gewicht; dieses zieht man von 100 ab, so hat man das verlangte Thara.

3) Man kann das Verhältniß des Preuß. zum Sächs. Gelde als unbekannt ansehen und fragen: wie viel Prozent ist das Preuß. schlechter als das Sächs., d. h. wie viel thlr. Preuß. Cour. bekommt man für 100 thlr. Sächs.?

? thlr. Preuß. Cour.	100 thlr. Sächs.
144 thlr. Sächs. A.	100 thlr. Hamb. Banko A.
1925$\frac{2}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.	40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	91 Ztn. Netto Hamb. Gew.
100 Ztn. Netto Hamb. Gew.	109 Ztn. Netto Berl. Gew.
1 Ztn. Netto Berl. Gew.	110 Pfd. Netto Berl. Gew.
1 Pfd. Netto Berl. Gew.	32 Lth. Netto Berl. Gew.
1 Lth. Netto Berl. Gew.	4 Qt. Netto Berl. Gew.
3$\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.	8 pf. Preuß. Cour. E.
12 pf. Preuß. Cour. E.	1 gr. Preuß. Cour. E.
24 gr. Preuß. Cour. E.	1 thlr. Preuß. Cour. E.
145$\frac{1}{3}$ thlr. Preuß. Cour. E.	100 thlr. Preuß. Cour. A.

Die Grundproportion ist:

3$\frac{2}{3}$ Qt. : 40 Ztn. = 8 pf. : 1925$\frac{2}{7}$ thlr.

Das unbekannte Glied x liegt in den Nebenbestimmungen des letzten Gliedes. Das Frageglied heißt vollständig ausgedrückt: Wie viel thlr. Preuß. Cour. Ausgabe geben 100 thlr. Sächs. Ausgabe. Das Facit kommt 105, davon 100 abgezogen, zeigt der Rest 5, daß das Preuß. Cour. 5 Prozent schlechter ist als das Sächs.

4) Man kann das Verhältniß des Hamburger Banko zum Sächs. Gelde suchen. Der Aufsatz ist dem vorigen ähnlich, nach derselben Grundproportion.

? thlr. Sächs.	100 thlr. Hamb. Banko
1925$\frac{2}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.	40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	91 Ztn. Netto Hamb. Gew.
100 Ztn. Netto Hamb. Gew.	109 Ztn. Netto Berl. Gew.
1 Ztn. Netto Berl. Gew.	110 Pfd. Netto Berl. Gew.
1 Pfd. Netto Berl. Gew.	32 Lth. Netto Berl. Gew.
1 Lth. Netto Berl. Gew.	4 Qt. Netto Berl. Gew.
3$\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.	8 pf. Preuß. Cour. E.
12 pf. Preuß. Cour. E.	1 gr. Preuß. Cour. E.
24 gr. Preuß. Cour. E.	1 thlr. Preuß. Cour. E.
105 thlr. Preuß. Cour. E.	100 thlr. Sächs. E.
145$\frac{1}{3}$ thlr. Sächs. E.	100 thlr. Sächs. A.

5) Man kann nach dem Gewinn in Prozenten fragen, d. h. nach dem Verhältniß der Einnahme zur Ausgabe.

? thlr. E.	100 thlr. A.
$1925\frac{5}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.	40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	91 Ztn. Netto Hamb. Gew.
100 Ztn. Netto Hamb. Gew.	109 Ztn. Netto Berl. Gew.
1 Ztn. Netto Berl. Gew.	110 Pfd. Netto Berl. Gew.
1 Pfd. Netto Berl. Gew.	32 Lth. Netto Berl. Gew.
1 Lth. Netto Berl. Gew.	4 Qt. Netto Berl. Gew.
$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.	8 pf. Preuß. Cour. E.
12 pf. Preuß. Cour. E.	1 gr. Preuß. Cour. E.
24 gr. Preuß. Cour. E.	1 thlr. Preuß. Cour. E.
105 thlr. Preuß. Cour. E.	100 thlr. Sächs. E.
144 thlr. Sächs. E.	100 thlr. Hamb. Banko E.

Das Frageglied würde vollständig heißen: wie viel thlr. Hamb. Banko Einnahme geben 100 thlr. Hamb. Banko Ausgabe. Das Facit gibt $145\frac{1}{3}$, davon 100 abgezogen, bleibt $45\frac{1}{3}$ als die verlangten Prozente.

6) Man frage nach dem Preise der $3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berliner Gewicht beim Verkaufe, nach der Grundproportion:

40 Ztn. : $1925\frac{5}{7}$ thlr. = $3\frac{2}{3}$ Qt. : x pf.

? pf. Preuß. Cour. E.	$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.
4 Qt. Netto Berl. Gew.	1 Lth. Netto Berl. Gew.
32 Lth. Netto Berl. Gew.	1 Pfd. Netto Berl. Gew.
110 Pfd. Netto Berl. Gew.	1 Ztn. Netto Berl. Gew.
91 Ztn. Netto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Berl. Gew.
109 Ztn. Brutto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	$1925\frac{5}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.
100 thlr. Hamb. Banko A.	144 thlr. Sächs. A.
100 thlr. Sächs. A.	105 thlr. Preuß. Cour. A.
100 thlr. Preuß. Cour. A.	$145\frac{1}{3}$ thlr. Preuß. Cour. E.
1 thlr. Preuß. Cour. E.	24 gr. Preuß. Cour. E.
1 gr. Preuß. Cour. E.	12 pf. Preuß. Cour. E.

7) Man frage nach den Quentchen, die man für 8 pf. Preuß. Cour. verkauft, nach der Grundproportion:

1925$\frac{2}{7}$ thlr. : 8 pf. = 40 Ztn. : x Qt.

? Qt. Netto Berl. Gew.	8 pf. Preuß. Cour. E.
12 pf. Preuß. Cour. E.	1 gr. Preuß. Cour. E.
24 gr. Preuß. Cour. E.	1 thlr. Preuß. Cour. E.
105 thlr. Preuß. Cour. E.	100 thlr. Sächs. E.
144 thlr. Sächs. E.	109 thlr. Hamb. Banko E.
145$\frac{1}{3}$ thlr. Hamb. Banko E.	100 thlr. Hamb. Banko A.
1925$\frac{2}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.	40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	91 Ztn. Netto Hamb. Gew.
100 Ztn. Netto Hamb. Gew.	109 Ztn. Netto Berl. Gew.
1 Ztn. Netto Berl. Gew.	110 Pfd. Netto Berl. Gew.
1 Pfd. Netto Berl. Gew.	32 Lth. Netto Berl. Gew.
1 Lth. Netto Berl. Gew.	4 Qt. Netto Berl. Gew.

8) Man kann nach dem Verhältnisse des Hamburger Gewichts zum Berliner Gewichte fragen.

? Berl. Gew.	100 Hamb. Gew.
40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	1925$\frac{2}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.
100 thlr. Hamb. Banko A.	144 thlr. Sächs. A.
100 thlr. Sächs. A.	105 thlr. Preuß. Cour. A.
100 thlr. Preuß. Cour. A.	145$\frac{1}{3}$ thlr. Preuß. Cour. E.
1 thlr. Preuß. Cour. E.	24 gr. Preuß. Cour. E.
1 gr. Preuß. Cour. E.	12 pf. Preuß. Cour. E.
8 pf. Preuß. Cour. E.	3$\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.
4 Qt. Netto Berl. Gew.	1 Lth. Netto Berl. Gew.
32 Lth. Netto Berl. Gew.	1 Pfd. Netto Berl. Gew.
110 Pfd. Netto Berl. Gew.	1 Ztn. Netto Berl. Gew.
91 Ztn. Netto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Berl. Gew.

Das Frageglied würde vollständig heißen: wie viel Ztn. Brutto Berliner Gewicht gehen auf 100 Ztn. Brutto Hamburger Gewicht, und darum fährt man denn auch auf der linken Seite mit 40 Ztn. Brutto Hamburger Gewicht fort. Die Grundproportion ist:

40 Ztn. : 3$\frac{2}{3}$ Qt. = 1925$\frac{2}{7}$ thlr. : 8 pf.

Das Frageglied ist eine Nebenbestimmung des letzten Gliedes.

§. 150.

Anmerkung.

Man könnte auch noch Aufsätze machen, um zu fragen, wie viel Pfennige auf den Groschen, oder Groschen auf den Thaler,

oder Quentchen aufs Loth, oder Lothe aufs Pfund, oder Pfunde auf den Zentner gehen. Wir haben sie als unbedeutend übergangen. Eben so könnte man die Fragen in 2, 3, 4, 5, 8 umkehren, welches noch folgende Aufsätze gäbe.

Umkehrung von 2.

? Brutto	91 Netto
$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.	8 pf. Preuß. Cour. E.
12 pf. Preuß. Cour. E.	1 gr. Preuß Cour. E.
24 gr. Preuß. Cour. E.	1 thlr. Preuß. Cour. E.
105 thlr. Preuß. Cour. E.	100 thlr. Sächs. E.
144 thlr. Sächs. E.	100 thlr. Hamb. Banko E.
$145\frac{1}{3}$ thlr. Hamb. Banko E.	100 thlr. Hamb. Banko A.
$1925\frac{2}{27}$ thlr. Hamb. Banko A.	40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	109 Ztn. Brutto Berl. Gew.
1 Ztn. Brutto Berl. Gew.	110 Pfd. Brutto Berl. Gew.
1 Pfd. Brutto Berl. Gew.	32 Lth. Brutto Berl. Gew.
1 Lth. Brutto Berl. Gew.	4 Qt. Brutto Berl. Gew.

Das Facit ist 100, d. h. auf 91 Netto gehen 100 Brutto und also Thara = 9. Das Frageglied heißt vollständig: Wie viel Qt. Brutto Berliner Gewicht gehen auf 91 Qt. Netto Berliner Gewicht.

Umkehrung von 3.

? Sächs.	105 Preuß.
8 pf. Preuß. Cour. E.	$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.
4 Qt. Netto Berl. Gew.	1 Lth. Netto Berl. Gew.
32 Lth. Netto Berl. Gew.	1 Pfd. Netto Berl. Gew.
110 Pfd. Netto Berl. Gew.	1 Ztn. Netto Berl. Gew.
91 Ztn. Netto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Berl. Gew.
109 Ztn. Brutto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	$1925\frac{2}{27}$ thlr. Hamb. Banko A.
100 thlr. Hamb. Banko A.	144 thlr. Sächs. A.
100 thlr. Sächs. A.	$145\frac{1}{3}$ thlr. Sächs. E.
1 thlr. Sächs. E.	24 gr. Sächs. E.
1 gr. Sächs. E.	12 pf. Sächs. E.

Das Facit ist 100, d. h. auf 105 Preuß. gehen 100 Sächs. oder das Sächs. ist 5 Prozent besser als das Preuß. Das Frageglied heißt vollständig: Wie viel pf. Sächs. Einnahme gehen auf 105 pf. Preuß. Cour. Einnahme.

Umkehrung von 4.

? Hamb. Banko	144 Sächs.
100 pf. Sächs. E.	105 pf. Preuß. Cour. E.
8 pf. Preuß. Cour. E.	$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.
4 Qt. Netto Berl. Gew.	1 Lth. Netto Berl. Gew.
32 Lth. Netto Berl. Gew.	1 Pfd. Netto Berl. Gew.
110 Pfd. Netto Berl. Gew.	1 Ztn. Netto Berl. Gew.
91 Ztn. Netto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Berl. Gew.
109 Ztn. Brutto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	$1925\frac{5}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.
100 thlr. Hamb. Banko A.	$145\frac{5}{7}$ thlr. Hamb. Banko E.
1 thlr. Hamb. Banko E.	24 gr. Hamb. Banko E.
1 gr. Hamb. Banko E.	12 pf. Hamb. Banko E.

Das Facit ist 100 Hamb. Banko auf 144 Sächs., d. h. Hamb. Banko ist 44 Prozent besser als Sächs. Das vollständige Frageglied ist: Wie viel pf. Hamb. Banko Einnahme geben 100 pf. Sächs. Einnahme.

Umkehrung von 5.

? Ausgabe	$145\frac{5}{7}$ Einnahme
8 pf. Preuß. Cour. E.	$3\frac{2}{3}$ Qt. Netto Berl. Gew.
4 Qt. Netto Berl. Gew.	1 Lth. Netto Berl. Gew.
32 Lth. Netto Berl. Gew.	1 Pfd. Netto Berl. Gew.
110 Pfd. Netto Berl. Gew.	1 Ztn. Netto Berl. Gew.
91 Ztn. Netto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Berl. Gew.
109 Ztn. Brutto Berl. Gew.	100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	$1925\frac{5}{7}$ thlr. Hamb. Banko A.
100 thlr. Hamb. Banko A.	144 thlr. Sächs. A.
100 thlr. Sächs. A.	105 thlr. Preuß. Cour. A.
1 thlr. Preuß. Cour. A.	24 gr. Preuß. Cour. A.
1 gr. Preuß. Cour. A.	12 pf. Preuß. Cour. A.

Das Facit ist 100, d. h. auf $145\frac{5}{7}$ Einnahme hat man 100 Ausgabe und also ist der Gewinn $45\frac{5}{7}$ Prozent. Vollständig heißt das Frageglied: Wie viel pf. Preuß. Cour. Ausgabe gehen auf $145\frac{5}{7}$ pf. Preuß. Cour. Einnahme.

Umkehrung von 8.

? Hamb. Gew.	109 Berl. Gew.
$3\frac{2}{3}$ Ct. Netto Berl. Gew.	8 pf. Preuß. Cour. E.
12 pf. Preuß. Cour. E.	1 gr. Preuß. Cour. E.
24 gr. Preuß. Cour. E.	1 thlr. Preuß. Cour. E.
105 thlr. Preuß. Cour. E.	100 thlr. Sächs. E.
144 thlr. Sächs. E.	100 thlr. Hamb. Banko E.
$145\frac{1}{7}$ thlr. Hamb. Banko E.	100 thlr. Hamb. Banko A.
$1925\frac{5}{22}$ thlr. Hamb. Banko A.	40 Ztn. Brutto Hamb. Gew.
100 Ztn. Brutto Hamb. Gew.	91 Ztn. Netto Hamb. Gew.
1 Ztn. Netto Hamb. Gew.	110 Pfd. Netto Hamb. Gew.
1 Pfd. Netto Hamb. Gew.	32 Lth. Netto Hamb. Gew.
1 Lth. Netto Hamb. Gew.	4 Ct. Netto Hamb. Gew.

Das Facit ist 100, d. h. auf 109 Berliner Gewicht gehen 100 Hamburger Gewicht oder letzteres ist 9 Prozent besser als das erstere. Das Frageglied heißt vollständig: Wie viel Ct. Netto Hamburger Gewicht gehen auf 109 Ct. Netto Berliner Gewicht.

Mehrere Exempel zur Kettenregel werden in der Beispielsammlung folgen.

Viertes Kapitel.

Von Progressionen oder Reihen.

§. 151.

Erklärung.

Eine Progression ist eine Reihe von Zahlen, welche immer um gleich viel oder gleich vielmal wachsen oder abnehmen, z. B. 3, 5, 7, 9, 11 oder 3, 6, 12, 24, 48; desgleichen 18, 16, 14, 12, 10 oder 81, 27, 9, 3, 1.

§. 152.

Zusatz.

Die Progression ist steigend, wenn die Glieder nach der rechten Seite zu immer größer werden, fallend, wenn sie nach eben dieser Seite zu immer kleiner werden. Beispiele gibt §. 151. Jede steigende Proportion ist, umgekehrt genommen, eine fallende, und jede fallende, umgekehrt genommen, eine steigende.

§. 153.

Erklärung.

Wenn die Glieder der Progression um gleich viel wachsen oder abnehmen, so heißt dieselbe eine arithmetische, z. B. 1, 3, 5, 7, 9 und 15, 13, 11, 9, 7. Die Zahl, um wie viel jedes folgende Glied größer oder kleiner ist, als das nächst vorhergehende, heißt die Differenz oder der Unterschied, welcher in steigenden Reihen positiv, in fallenden negativ genommen wird, weil dann in beiden Fällen das folgende Glied entsteht, wenn man den Unterschied zum nächst vorhergehenden addirt. So ist in obigen Beispielen das zweite Glied $3 = 1 + 2$, das dritte $= 3 + 2$ u. s. w., und in der andern Reihe $13 = 15 - 2$; $11 = 13 - 2$.

§. 154.

Erklärung.

Wenn die Glieder der Progression gleich vielmal wachsen oder abnehmen, so heißt dieselbe eine geometrische, z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32 oder 81, 27, 9, 3, 1. Die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal das folgende Glied größer ist, als das vorhergehende, heißt der Exponent; er ist bei der steigenden Reihe eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher Bruch und bei der fallenden ein eigentlicher Bruch, z. B. in der Reihe 3, 6, 12, 24, 48 ist der Exponent $= 2$; in der Reihe $1, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \frac{64}{27}, \frac{256}{81}, \frac{1024}{243}$ ist der Exponent $= 1\frac{1}{3}$ oder $\frac{4}{3}$ und in der Reihe 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 ist er $= \frac{1}{2}$.

§. 155.

Zusatz.

In geometrischen Reihen entsteht das folgende Glied allemal aus dem nächst vorhergehenden, wenn man dieses mit dem Exponenten multiplizirt, also in den steigenden Reihen $12 = 6.2$; $\frac{64}{27} = \frac{16}{9} . \frac{4}{3}$ und in der fallenden $16 = 32 . \frac{1}{2}$.

§. 156.

Erklärung.

Zusammengehörige Glieder heißen in jeder Progression solche, welche gleich weit vom Anfange und Ende abstehen, z. B. in der arithmetischen Reihe 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 sind 3 und 17; 5 und 15; 7 und 13 u. s. w. und in der

geometrischen Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 64 sind 2 und 64; 4 und 32; 8 und 16 zusammengehörige Glieder.

A. Von arithmetischen Progressionen.

§. 157.

Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Progression gehen alle Glieder in gleichen zusammenhängenden arithmetischen Verhältnissen fort oder drei auf einander folgende Glieder bilden immer eine stetige arithmetische Progression.

Setzt man das erste Glied einer solchen Reihe = a und die Differenz = d, so ist nach §. 153. das zweite Glied = a + d, das dritte = a + 2 d, das vierte = a + 3 d u. s. w., also die ganze Reihe =

a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, a + 7d ꝛc.,

und es verhält sich offenbar

a — (a + d) = (a + d) — (a + 2 d)

und (a + d) — (a + 2 d) = (a + 2 d) — (a + 3 d)

und (a + 2 d) — (a + 3 d) = (a + 3 d) — (a + 4 d) u. s. w.

Also a — (a + d) = (a + d) — (a + 2 d) = (a + 2 d) — (a + 3 d) = (a + 3 d) — (a + 4 d) = (a + 4 d) — (a + 5 d) u. s. w.

Oder in Zahlen:

Wenn die Reihe ist = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 u. s. w., so verhält sich 1 — 3 = 3 — 5

3 — 5 = 5 — 7

5 — 7 = 7 — 9

7 — 9 = 9 — 11 u. s. w.

Also 1—3 = 3—5 = 5—7 = 7—9 = 9—11 = 11—13 = 13—15 u. s. w.

Setzt man in obiger Formel die Differenz d negativ, so wird die Reihe eine fallende, aber die Verhältnisse bleiben dieselben. Denn es ist auch

a — (a — d) = (a — d) — (a — 2 d) = (a — 2 d) — (a — 3 d) = (a — 3 d) — (a — 4 d) u. s. w.

§. 158.

Zusatz.

Wenn man in einer fallenden Reihe immer weiter fortgeht, so werden die Glieder endlich negativ; eben so, wenn man in einer

einer steigenden Reihe rückwärts immer weiter fortgeht, denn dann betrachtet man sie als eine fallende. Z. B. die fallende Reihe 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, gibt weiter fortgesetzt die Reihe: 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4, −6, −8, −10 u. s. w. und die steigende Reihe 1, 4, 7, 10, 13 u. s. w. gibt rückwärts fortgesetzt die Reihe −11, −8, −5, −2, 1, 4, 7, 10, 13.

§. 159.

Lehrsatz.

Jedes Glied einer arithmetischen Proportion entsteht, wenn man die Nummer des Gliedes (d. h. die Zahl, welche anzeigt, das wie vielte es in der Reihe vom ersten Gliede an ist, weniger 1 mit der Differenz multiplizirt und das erste Glied dazu addirt.

Es sei das erste Glied = 3, die Differenz = 5, so soll z. B. das achte Glied sein = 7 . 5 + 3 = 38.

Nach §. 157. war die allgemeine Form jeder arithmetischen Progression

Nummer der Gl.	1	2	3	4	5	6	7	8
Glieder	a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d,	a+5d,	a+6d,	a+7d &c.

Also ist hier das erste Glied = a + 0 . d = a + 0 = a, das zweite = a + 1 . d = a + d, das dritte = a + 2 d, das vierte = a + 3 d u. s. w. Es wäre also überhaupt das nte Glied = a + (n − 1) d.

Vermöge dieses Satzes kann man jedes beliebige Glied einer arithmetischen Progression finden, ohne daß man nöthig hat, die vorhergehenden Glieder hinzuschreiben. Es sei z. B. die Frage: welches ist das 1001te Glied einer Reihe, deren erstes Glied = 3, die Differenz = 5 ist? so ist a = 3, d = 5, n = 1001, also n − 1 = 1000 und a + (n − 1) d = 3 + 1000 . 5 = 5003. Ist d negativ, so wird a + (n − 1) d in a − (n − 1) d verwandelt und im obigen Beispiele ist das 1001te Glied = 3 − 1000 . 5 = −4997.

§. 160.

Zusatz.

Wenn man die zusammengehörigen Glieder (§. 156.) zusammen addirt, so sind die Summen aller dieser Paare einander gleich, nämlich jede so groß, als die Summe des ersten und letzten Gliedes.

So wie von der Linken zur Rechten in jedem folgenden Gliede die Differenz um 1 mal mehr vorkommt, als in dem nächst vor-

hergehenden, so enthält sie auch jedes vorhergehende 1 mal weniger, als das nächst folgende. Ist daher irgend ein Glied der Progression $= q$, so ist das nächst vorhergehende $= q - d$, das diesem vorangehende $= q - 2d$ u. s. w. Es sei also das erste Glied der Progression $= a$, die Differenz $= d$, das letzte Glied $= u$, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= a + u$, die Summe des zweiten und vorletzten $= a + d + u - d = a + u$, da $+d$ und $-d$ sich heben; die Summe des dritten von vorn und des dritten vom Ende $= a + 2d + u - 2d = a + u$ u. s. w., also überhaupt die Summe des $n$ten von vorn und des $n$ten vom Ende $= a + (n-1)d + u - (n-1)d = a + u$, weil $+(n-1)d$ und $-(n-1)d$ sich offenbar heben.

Hat die Reihe eine ungerade Anzahl von Gliedern, so gibt es ein mittleres Glied, das eben so weit vom Anfange als vom Ende absteht. Gesetzt es sey das $m$te vom Anfange, so ist es auch das $m$te vom Ende. Im erstern Falle ist es $= a + (m-1)d$ und im letztern $= u - (m-1)d$. Es heiße dies mittlere Glied q, so ist also

erstlich $\quad q = a + (m-1)d$
zweitens $\quad q = u - (m-1)d$
folglich $\quad 2q = a + u$

d. h. das Doppelte des mittlern Gliedes ist gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes und also das mittlere Glied selbst gleich der Hälfte dieser Summe, $q = \frac{a+u}{2}$.

Beispiel. Es sei die Progression gegeben:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43,

so sind die Summen aller Paare zusammengehöriger Glieder $= 46$ und das Doppelte des mittlern Gliedes 23 auch $= 46$.

§. 161.

Lehrsatz.

Die Summe jeder arithmetischen Progression wird gefunden, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirt.

Es sei erstlich die Anzahl der Glieder gerade und diese Anzahl $= n$, so gibt es halb so viel Paare zusammengehöriger Glieder, also $\frac{n}{2}$ Paare. Jedes Paar ist $= a + u$ nach §. 160., also die Summe aller Paare, d. h. die Summe der ganzen Progression $= \frac{n}{2}(a+u) = \frac{n(a+u)}{2}$.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so gibt es $\frac{n-1}{2}$ Paare zusammengehöriger Glieder und deren Summe ist $= \frac{(n-1)(a+u)}{2}$. Dazu muß nun noch das mittlere Glied $= \frac{a+u}{2}$ addirt werden, um die Summe der ganzen Reihe zu finden. Folglich ist diese Summe, die wir S nennen wollen,

$$= \frac{(n-1)(a+u)}{2} + \frac{a+u}{2}$$
$$= \frac{(n-1)(a+u)+(a+u)}{2}.$$

Es soll also $a+u$ erstlich $n-1$ mal und dann noch 1 mal genommen werden, also hat man 2 Produkte, die den gemeinschaftlichen Faktor $a+u$ und die ungleichen $n-1$ und 1 haben. Man kann also die Klammer anwenden und setzen $S = \frac{(a+u)(n-1+1)}{2} = \frac{(a+u)n}{2}$. Folglich mag die Anzahl der Glieder in der Progression gerade oder ungerade sein, ihre Summe ist immer $= \frac{n(a+u)}{2}$, d. h. gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirt.

Beispiel. Es sei das erste Glied $= 4$, die Zahl der Glieder $= 9$, das letzte Glied $= 28$, so wäre die Summe $= \frac{9 \cdot (4+28)}{2} = \frac{9 \cdot 32}{2} = 144$. Die Reihe ist nämlich:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28.

Ist das letzte Glied nicht gegeben, sondern statt dessen die Differenz, so läßt sich die Formel für die Summe so ausdrücken: Es ist alsdann $u = a+(n-1)d$, also $a+u = 2a+(n-1)d$ und $\frac{n(a+u)}{2} = \frac{2na+n(n-1)d}{2} = na + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Es sei $a = 3$, $n = 145$, $d = 5$, so ist

$$S = 3 \cdot 145 + \frac{145 \cdot 144 \cdot 5}{2} = 435 + 145 \cdot 72 \cdot 5$$
$$= 435 + 52200 = 52635.$$

Ist $a = 1$, $d = 1$, so hat man alle natürliche Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. zu summiren, und da 1 nicht multiplizirt, so ist die Summe $= n + \frac{n(n-1)}{2}$. Es sei $n = 10000$, so ist die Summe der ersten 10000 Zahlen $= 10000 + \frac{10000 \cdot 9999}{2} = 10000 + 5000 \cdot 9999 = 10000 + 49995000 = 50005000$.

Ist $a = 1$, $d = 2$, so ist $S = n + \frac{n(n-1)2}{2} =$ $n + n(n-1) = n + n^2 - n = n^2$, d. h. die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 an ist gleich dem Quadrate der Anzahl aller Zahlen, die man addiren will. Es sei $n = 100$, so ist die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen $= 100^2 = 10000$.

§. 162.
Zusatz.

Bei jeder arithmetischen Progression lassen sich 5 Stücke betrachten: das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, das letzte Glied $= u$, die Anzahl der Glieder $= n$, und die Summe der Reihe $= S$. Sind von diesen 5 Stücken drei gegeben, so lassen sich die übrigen 2 finden. Darüber werden unten Beispiele folgen.

B. Von geometrischen Progressionen.

§. 163.
Lehrsatz.

In jeder geometrischen Progression gehen die Glieder in gleichen zusammenhängenden geometrischen Verhältnissen fort, so daß immer drei auf einander folgende Glieder eine stetige geometrische Progression bilden.

Setzt man nämlich das erste Glied $= a$, den Exponenten $= e$, so ist nach §. 154. das zweite Glied $= ae$, das dritte $= ae^2$, das vierte $= ae^3$ u. s. w., also die Reihe

$$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5, ae^6, ae^7 \text{ ꝛc.},$$

und es verhält sich offenbar

$$a : ae = ae : ae^2$$
$$\text{und } ae : ae^2 = ae^2 : ae^3$$
$$\text{und } ae^2 : ae^3 = ae^3 : ae^4$$
$$\text{und } ae^3 : ae^4 = ae^4 : ae^5$$
$$\text{u. s. w.}$$

Also $a : ae = ae : ae^2 = ae^2 : ae^3 = ae^3 : ae^4 = ae^4 : ae^5$ ꝛc.

Oder, wenn in Zahlen die Reihe gegeben ist:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \text{ ꝛc.},$$

so verhält sich

$$1 : 2 = 2 : 4$$
$$2 : 4 = 4 : 8$$
$$4 : 8 = 8 : 16$$
$$8 : 16 = 16 : 32$$
$$\text{u. s. w.}$$

Also $1:2 = 2:4 = 4:8 = 8:16 = 16:32 = 32:64$ ꝛc.
So auch in fallenden Reihen, z. B.

$$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243} \text{ ꝛc.},$$

wo sich verhält

$$9:3 = 3:1 = 1:\frac{1}{3} = \frac{1}{3}:\frac{1}{9} = \frac{1}{9}:\frac{1}{27} \text{ ꝛc.}$$

§. 164.

Eine geometrische Progression kann niemals mit 0 anfangen, überhaupt kein Glied derselben $= 0$ sein, weil sonst in beiden Fällen alle Glieder $= 0$ werden würden. Denn da alle folgende Glieder Produkte aus dem ersten und irgend einer Potenz des Exponenten sind und jedes Produkt, in welchem ein Faktor $= 0$ ist, auch $= 0$ wird, so muß jedes folgende Glied der Progression $= 0$ sein, wenn das erste $= 0$ ist. Eben so wenig kann irgend ein anderes Glied $= 0$ sein, weil sonst alle vorhergehende und folgende auch $= 0$ sein müßten. Wenn man daher eine fallende Reihe immer weiter fortsetzt, so kommt man wol auf Brüche, die immer kleiner und kleiner werden, aber niemals auf ein Glied, das $= 0$ ist. Bei Fortsetzung einer solchen Reihe kommt man auch niemals auf negative Zahlen, wenn die vorhergehenden Glieder positiv sind.

Eben so ist es, wenn man in steigenden Reihen rückwärts geht.

§. 165.

Lehrsatz.

Jedes Glied einer geometrischen Progression entsteht, wenn man das erste Glied mit einer Potenz des Exponenten multiplizirt, die um einen Grad niedriger ist, als die Nummer des Gliedes.

Der Satz erhellet schon aus der allgemeinen Formel für jede geometrische Progression in §. 163. Das erste Glied ist a, der Exponent e; das vierte Glied ist z. B. $= ae^3$, also der Potenzgrad von e um 1 niedriger, als die Nummer des Gliedes. So auch das fünfte Glied $= ae^4$, desgleichen das zweite $= ae$, d. h. $= ae^1$ und das erste selbst $= a$, d. h. $= ae^0$, denn e^0 ist $= 1$ und kann also weggelassen werden.

Es ist also allgemein jedes nte Glied $= ae^{n-1}$.

Durch diesen Satz läßt sich jedes Glied finden, ohne daß man die vorhergehenden hinzuschreiben braucht, wenn nur das erste und der Exponent gegeben sind. Es sei $a = 6$ und $e = 3$, n aber $= 7$, d. h. es soll das siebente Glied einer geometrischen Reihe gefunden werden, die mit 6 anfängt und worin jedes folgende Glied immer dreimal größer ist, als das vorhergehende. Es ist also hier $ae^{n-1} = 6.3^6 = 6.729 = 4374$.

§. 166.

Lehrsatz.

In jeder geometrischen Progression sind die Produkte zweier zusammengehörigen Glieder einander gleich, also jedes derselben so groß, als das Produkt des ersten und letzten Gliedes.

So wie jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man das letztere mit dem Exponenten multiplizirt, so entsteht jedes vorhergehende aus dem folgenden, wenn man dieses letztere durch den Exponenten dividirt. Ist also das letzte Glied der Progression $= u$, so ist das vorletzte $= \frac{u}{e}$, das dritte vom Ende $= \frac{u}{e^2}$, das vierte vom Ende $= \frac{u}{e^3}$ und das mte vom Ende $= \frac{u}{e^{m-1}}$. Ist also das erste Glied $= a$, das letzte $= u$, so ist das Produkt beider $= au$, das Produkt des zweiten und vorletzten $= ae \cdot \frac{u}{e} = \frac{aeu}{e} = au$, des dritten vom Anfange und des dritten vom Ende $= ae^2 \cdot \frac{u}{e^2} = \frac{ae^2u}{e^2} = au$, des mten vom Anfange und des mten vom Ende $= ae^{m-1} \cdot \frac{u}{e^{m-1}} = \frac{ae^{m-1}u}{e^{m-1}} = au$.

§. 167.

Zusatz.

Ist die Zahl der Glieder ungerade, so gibt es ein mittelstes, welches eben so weit vom Anfange, als vom Ende absteht. Es heiße Q und sei das mte Glied vom Anfange, so ist $Q = ae^{m-1}$; es ist aber auch das mte vom Ende, also $Q = \frac{u}{e^{m-1}}$. Folglich ist $Q \cdot Q = ae^{m-1} \cdot \frac{u}{e^{m-1}}$, oder $Q^2 = \frac{aue^{m-1}}{e^{m-1}}$, d. h. $Q^2 = au$, d. h. das Quadrat dieses mittelsten Gliedes ist gleich dem Produkte des ersten und letzten Gliedes.

§. 168.

Lehrsatz.

Jedes Glied einer geometrischen Reihe wird auch gefunden, wenn man die Summe aller vorhergehenden mit dem Exponenten weniger 1 multiplizirt und das erste Glied noch dazu addirt.

Es sei die Reihe gegeben:

a, b, c, d, f, g, h ꝛc.

Der Exponent sei e, so ist $b = ae$, $c = be$, $d = ce$ u. s. w. Also ist

1) $b = ae$.

Dafür kann man auch schreiben:

$b = ae - a + a$,

denn ae wird nicht verändert, wenn ich a davon wegnehme und dann wieder dazu thue. Aber $ae - a + a = a(e-1) + a$, also

$b = a(e-1) + a$,

d. h. das zweite Glied entsteht, wenn ich die Summe der vorhergehenden, d. h. das erste Glied, mit dem Exponenten weniger 1 multiplizire und das erste Glied dazu zähle.

2) $c = be$
$= be - b + b$
$= b(e-1) + b$.

Schreibe ich nun statt des letzten b den oben gefundenen Werth desselben, so kommt

$c = b(e-1) + a(e-1) + a$.

Hier habe ich den gemeinschaftlichen Faktor $e-1$, also kann ich die ungleichen b und a in eine Klammer und jenen allein setzen. Folglich ist

$c = (b+a)(e-1) + a$
$= (a+b)(e-1) + a$,

d. h. das dritte Glied entsteht, wenn ich die Summe der vorhergehenden Glieder (a und b) mit dem Exponenten weniger 1 multiplizire und das erste Glied a dazu addire.

3) $d = ce$
$= ce - c + c$
$= c(e-1) + c$

und nun für c obigen Werth gesetzt, kommt

$d = c(e-1) + (a+b)(e-1) + a$
$= (c+a+b)(e-1) + a$
$= (a+b+c)(e-1) + a$

offenbar wieder mit dem Lehrsatze in Uebereinstimmung. Eben so

4) $f = de$
$= de - d + d$
$= d(e-1) + d$
$= d(e-1) + (a+b+c)(e-1) + a$
$= (a+b+c+d)(e-1) + a$

u. s. w.

Auch das erste Glied selbst läßt sich so bestimmen. Denn die Summe der vorhergehenden ist o, also $a = o\,(e-1)+a = o+a = a$.

Beispiel. Es sei die Reihe gegeben:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561 ꝛc.,

worin der Exponent $= 3$ ist, so ist

$3 = 1 \cdot 2+1$
$9 = (1+3) \cdot 2+1$
$27 = (1+3+9) \cdot 2+1$
$81 = (1+3+9+27) \cdot 2+1$
$243 = (1+3+9+27+81) \cdot 2+1$
$729 = (1+3+9+27+81+243) \cdot 2+1$

u. s. w.

§. 169.

Lehrsatz.

Die Summe jeder geometrischen Progression wird gefunden, wenn man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplizirt, das erste Glied davon abzieht und den Rest mit dem Exponenten weniger 1 dividirt.

Es sei die Reihe $=$

$$a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots u$$

und der Exponent $= e$.

Man berechne noch ein Glied nach dem letzten u, so ist dieses $= ue$, aber eben dasselbe wird auch nach dem vorigen Satze gefunden, wenn man die Summe aller vorhergehenden Glieder, d. h. die Summe der ganzen gegebenen Reihe mit dem Exponenten weniger 1 multiplizirt und das erste Glied noch dazu addirt. Nun sei die Summe aller Glieder von a bis $u = S$, so ist das Glied nach u oder $ue = S\,(e-1)+a$,

also $ue-a = S\,(e-1)$;

folglich $\frac{ue-a}{e-1} = S$.

Diese Formel für S ist aber der Ausdruck des Lehrsatzes.

Da $u = ae^{n-1}$ ist, so ist

$$S = \frac{ue-a}{e-1} = \frac{ae^{n-1} \cdot e-a}{e-1}$$

$$= \frac{a\,(e^{n-1} \cdot e-1)}{e-1}$$

$$= \frac{a\,(e^n-1)}{e-1}$$

d. h. man findet auch die Summe der Progression, wenn man den Exponenten e auf eine Potenz erhebt, deren Grad der Anzahl der Glieder der Progression gleich ist, von dieser Potenz 1 abzieht, den Rest mit dem ersten Gliede multiplizirt und das Produkt durch den Exponenten weniger 1 dividirt. In dieser Formel braucht also nur das erste Glied, der Exponent und die Zahl der Glieder bekannt zu sein.

Beispiel. Es sei das erste Glied = 3, der Exponent = 4, die Zahl der Glieder = 6, so ist $S = \frac{3.(4^6-1)}{4-1} = \frac{3.(4096-1)}{3}$ $= \frac{3.4095}{3} = 4095$.

Die wirkliche Reihe ist = 3, 12, 48, 192, 768, 3072 und $3+12+48+192+768+3072 = 4095$.

Ist $a = 1$, so ist $S = \frac{e^n-1}{e-1}$ und ist zugleich $e = 2$, so ist $S = e^n - 1$.

Der Erfinder des Schachspiels wollte zur Belohnung für das erste Feld des Schachbretes 1 Weizenkorn, für das zweite 2 Körner, für das dritte 4 u. s. w. für jedes folgende Feld doppelt so viel als für das vorhergehende haben. Da nun das Schachbret 64 Felder hat, so macht die Menge aller Körner eine geometrische Progression aus, deren erstes Glied = 1, der Exponent = 2 und die Anzahl der Glieder = 64 ist, also ist $S = e^n - 1 = 2^{64} - 1$, und es findet sich der Betrag von 18‴446744‴073709‴551615 Körnern. Wiegen 7630 Körner 1 Pfund und rechnet man 64 Pfund auf einen Scheffel, so macht obige Summe 37‴529996‴894754 Scheffel. Rechnet man die ganze Fläche der Erdkugel, das Meer mit eingeschlossen, auf 9‴282000 Quadratmeilen und setzt man die Länge der Meile zu 24000 Fuß, so würde die ganze Erdfläche 5346‴432000‴000000 Quadratfuß betragen, und folglich müßte man von 1 Quadratfuß 3450 Körner ernten können, wenn man jene Menge Getreide erzeugen wollte. Wäre also auch der Ertrag hundertfältig, so müßten doch auf einem Quadratfuße wenigstens 34 Pflanzen stehen können, welches wol nicht möglich sein dürfte. Die ganze Erde, alles Wasser mitgerechnet, war also nicht groß genug, um die verlangte Belohnung hervorzubringen.

§. 170.

Zusatz.

Auch in jeder geometrischen Progression lassen sich 5 Stücke betrachten: das erste Glied a, der Exponent e, die Anzahl der

Glieder n, das letzte Glied u und die Summe der Progression S. Sind 3 dieser Stücke gegeben, so kann man die übrigen 2 finden. Die Erörterungen folgen weiter unten.

§. 171.

Aufgabe.

Die Summe einer unendlich, d. h. immer fort abnehmenden geometrischen Progression zu finden.

Auflösung und Beweis.

Wenn eine geometrische Progression eine abnehmende ist, so ist der Exponent ein eigentlicher Bruch, weil nur dann die folgenden Glieder immer kleiner, als die vorhergehenden werden können. Man muß also immer das vorhergehende Glied mit dem Exponenten multipliziren, um das folgende zu finden. Dieses kann daher nie 0 werden, weil kein Produkt, worin nicht wenigstens ein Faktor = 0 ist, selbst = 0 sein kann. Die Progression geht also ohne Ende fort. Z. B. wenn das erste Glied = 1 und der Exponent = $\frac{1}{2}$ ist, so ist die unendlich abnehmende Progression = 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$ u. s. w. Je weiter man in der Progression fortgeht, desto kleiner werden die Glieder und nähern sich immer mehr der Null. Denkt man sich also die Progression ohne Ende fortgesetzt, d. h. nimmt man die Zahl der Glieder n als unendlich groß an, so muß das letzte Glied allerdings so unendlich klein werden, daß es als eine verschwindende Größe, d. h. als = 0 betrachtet werden kann. Nun war die obige Formel für die Summe jeder geometrischen Progression $S = \frac{(e^n - 1)\,a}{e - 1}$. In dieser Formel ist der Exponent e ein eigentlicher Bruch, die Potenzen desselben werden also immer kleiner, je größer ihr Grad, d. h. je größer n wird. Ist also n unendlich groß, so ist e^n unendlich klein oder verschwindend, d. h. = 0, folglich wird in diesem Falle $S = \frac{(0-1)\,a}{e-1} = \frac{-a}{e-1}$ und wenn man alle Theile des Zählers und Nenners mit −1 multiplizirt, wodurch der Bruch selbst nicht geändert wird, so kommt $S = \frac{a}{1-e}$, d. h. man findet die Summe einer solchen Progression, wenn man den Exponenten von 1 abzieht und durch den Rest das erste Glied dividirt. Ist z. B. a = 1 und $e = \frac{1}{2}$, so ist $1 - e = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und also die Summe $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$.

ie Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{2048}, \frac{1}{4096}$ u. s. w. ohne Ende fortgesetzt und zusammen addirt, ben zur Summe gerade 2. Wollte man in der Progression bei gend einem Gliede aufhören und nun die Summe suchen, so ürde man freilich nicht 2 bekommen, aber der Fehler würde doch mer kleiner und kleiner werden, je mehr Glieder der Progression man zusammen nähme. Hört man z. B. bei $\frac{1}{512} = \frac{1}{2^9}$ auf, so wäre $S = \frac{[(\frac{1}{2})^{10} - 1] \cdot 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{(\frac{1}{1024} - 1) \cdot 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{2046}{1024}$, folglich fehlen an 2 Ganzen noch $\frac{2}{1024}$ oder $\frac{1}{512}$. Nähme man die Progression bis $\frac{1}{4096} = \frac{1}{2^{12}}$, so wäre $S = \frac{[(\frac{1}{2})^{12} - 1] \cdot 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{8192} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{8191}{8192}}{-\frac{1}{2}} = \frac{16382}{8192}$, also der Fehler $= \frac{2}{8192} = \frac{1}{4096}$, folglich 8 mal kleiner, als vorhin. So wird es denn wohl begreiflich, wie, die Reihe der Progression unendlich gedacht, ihre Summe wirklich $= 2$ genommen werden kann, weil der Fehler verschwindet.

§. 172.

Zusatz.

Ist das erste Glied ein Bruch und der Exponent der nämliche Bruch, so findet man die Summe der unendlichen Reihe sogleich, wenn man den Zähler vom Nenner abzieht und diesen Rest in der Summe zum Nenner, den Zähler des gegebenen Bruchs aber zum Zähler macht. Z. B. Das erste Glied sei $= \frac{3}{4}$ und der Exponent auch $= \frac{3}{4}$, so ist die Summe $= \frac{3}{1} = 3$.

Um dies zu beweisen, setze man $a = \frac{p}{q}$ (nämlich $\frac{p}{q}$ ein eigentlicher Bruch) und e auch $= \frac{p}{q}$, so ist die Summe der unendlich abnehmenden Progression $= \frac{a}{1-e} = \frac{\frac{p}{q}}{1-\frac{p}{q}}$. Man richte im Nenner die Ganzen mit dem Bruche ein, so kommt $S = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{q-p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{q-p} = \frac{p}{q-p}$, welche Formel die obige Regel angibt.

Ist $a = \frac{2}{3}$ und $e = \frac{2}{3}$, so ist die Summe der Reihe $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}$ u. s. w. $= \frac{2}{1} = 2$.

Ist $a = \frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{2}$, so ist die Summe der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ u. s. w. $= \frac{1}{1} = 1$.

Ist $a = \frac{5}{6}$, $e = \frac{5}{6}$, so ist die Summe der Reihe $\frac{5}{6}, \frac{25}{36}, \frac{125}{216}, \frac{625}{1296}$ u. s. w. $= \frac{5}{1} = 5$.

§. 173.

Zusatz.

In §. 32. war von Quotientenreihen die Rede, welche man findet, wenn man mit einer zusammengesetzten Größe in eine einfache dividirt, z. B. mit a und b in a. In §. 32. war der Quotient $\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$ u. s. w. Wäre aber im Nenner b negativ gewesen, so hätte man alle Theile des Quotienten positiv gefunden, nämlich $\frac{a}{a-b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^4}{b^4}$ u. s. w., wie man sich leicht durch die wirkliche Division überzeugen kann:

$$
\begin{array}{l|l|l}
a-b & a & 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} \\
 & \underline{a-b} & \\
 & +b & \\
 & \underline{b - \frac{b^2}{a}} & \\
 & +\frac{b^2}{a} & \\
 & \underline{+\frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2}} & \\
 & +\frac{b^3}{a^2} & \\
 & \underline{\frac{b^3}{a^2} - \frac{b^4}{a^3}} & \\
 & +\frac{b^4}{a^3} & \\
 & \text{u. s. w.} &
\end{array}
$$

In Beziehung auf die Zeichen können überhaupt folgende Fälle Statt finden. Der Dividendus kann positiv oder negativ und im Divisor können beide Theile entweder positiv oder beide negativ, oder der eine positiv und der andere negativ sein, also

entweder $\frac{+a}{a+b}$ oder $\frac{-a}{a+b}$ oder $\frac{+a}{a-b}$ oder $\frac{-a}{a-b}$ oder $\frac{+a}{-a-b}$ oder $\frac{-a}{-a-b}$ oder $\frac{+a}{-a+b}$ oder $\frac{-a}{-a+b}$, zusammen 8 Fälle. Man sieht leicht, daß durch Veränderung der Zeichen die Theile des Quotienten selbst keine Veränderung erleiden, diese sind immer 1, $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$ u. s. w.; aber die Zeichen dieser Theile werden verändert, und zwar auf folgende Art. Es ist

I. $\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

II. $\frac{-a}{a+b} = -1 + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

III. $\frac{a}{a-b} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

IV. $\frac{-a}{a-b} = -1 - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

V. $\frac{a}{-a-b} = -1 + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

VI. $\frac{-a}{-a-b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

VII. $\frac{a}{-a+b} = -1 - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

VIII. $\frac{-a}{-a+b} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc.

Man sieht aus dieser Tabelle, daß die Quotienten in I. und VI., in II. und V., in III. und VIII., in IV. und VII. einerlei sind, welches auch so erhellet:

Es ist in I. und VI. der Quotient $\frac{a}{a+b} = \frac{-a}{-a-b}$, denn wenn man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{a+b}$ mit -1 multiplizirt, wodurch der Werth des Bruches selbst nicht verändert wird, so kommt $\frac{-a}{-a-b}$, also der Bruch in VI. heraus.

Es ist in II. und V. $\frac{-a}{a+b} = \frac{a}{-a-b}$, denn wenn man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{-a}{a+b}$ mit -1 multiplizirt, so kommt $\frac{a}{-a-b}$, also der Bruch in V.

Aus demselben Grunde ist auch in III. und VIII. der Bruch $\frac{a}{a-b} = \frac{-a}{-a+b}$ und in IV. und VII. der Bruch $\frac{-a}{a-b} = \frac{a}{-a+b}$.

Die gleichen Brüche müssen also auch nothwendig gleich Quotienten geben.

Die 8 Fälle konzentriren sich also auf 4, nämlich

I. $\frac{a}{a+b} = \frac{-a}{-a-b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc

II. $\frac{-a}{a+b} = \frac{a}{-a-b} = -1 + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc

III. $\frac{a}{a-b} = \frac{-a}{-a+b} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc

VI. $\frac{-a}{a-b} = \frac{a}{-a+b} = -1 - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5}$ ꝛc

Das Gesetz, wonach diese Quotientenreihen fortgehen, ist einleuchtend; sie bilden sämmtlich geometrische Progressionen, in denen das erste Glied $= 1$ und der Exponent $= \frac{b}{a}$ ist, nur machen die vorgesetzten Zeichen einige Veränderungen. Nimmt man in allen Reihen b kleiner als a an, so wird der Exponent $\frac{b}{a}$ ein eigentlicher Bruch und die Summe der unendlich gesetzten Reihe kann nach §. 171. gefunden werden. Nehmen wir zuerst die Reihe III., wo alle Glieder positiv sind, so ist nach §. 171., $S = \frac{a}{1-e}$. Es ist aber $a = 1$ und $e = \frac{b}{a}$, also $S = \frac{1}{1-\frac{b}{a}}$ $= \frac{1}{\frac{a-b}{a}} = 1 \cdot \frac{a}{a-b} = \frac{a}{a-b}$, d. h. die Summe ist wieder der ursprüngliche Bruch, welches als Bestätigung der Regel in §. 171. dienen kann. Es sei $a = 3$, $b = 2$, so ist $\frac{3}{3-2}$ oder $= \frac{-3}{-3+2} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ u. s. w. $= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3-2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{3-2} = \frac{3}{3-2}$ $= 3$ und auch $= \frac{-3}{-3+2} = 3$. Nimmt man die Reihe IV., wo alle Glieder negativ sind, so ist in der Formel $S = \frac{a}{1-e}$ der Zähler $a = -1$ und $e = \frac{b}{a}$, also $S = \frac{-1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{-1}{\frac{a-b}{a}}$ $= -1 \cdot \frac{a}{a-b} = \frac{-a}{a-b}$. Es sei $a = 3$ und $b = 2$, so ist $\frac{-a}{a-b} = \frac{-3}{3-2} = -1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} - \frac{32}{243}$ u. s. w. $= \frac{-1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{-1}{\frac{3-2}{3}} = -1 \cdot \frac{3}{3-2} = \frac{-3}{3-2} = -3$ und auch $= \frac{3}{-3+2} = -3$.

In der Reihe I. sind die Zeichen abwechselnd. Der Quotient steht also aus der positiven Reihe $1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^6}{a^6}$ u. s. w. und aus der negativen $-\frac{b}{a}-\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^5}{a^5}-\frac{b^7}{a^7}$ u. s. w. In beiden Reihen ist der Exponent $=\frac{b^2}{a^2}$. Ist nun wieder b kleiner als a, so sind beide Reihen unendlich abnehmend und jeder Summe $=\frac{a}{1-e}$. In der positiven Reihe ist $a=1$ und $e=\frac{b^2}{a^2}$, also $S=\frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=1\cdot\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}$.

In der negativen Reihe ist $a=-\frac{b}{a}$ und $e=\frac{b^2}{a^2}$, also $S=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2-b^2}=-\frac{ba^2}{a(a^2-b^2)}$ $=-\frac{ba}{a^2-b^2}$. Die Summen beider Reihen nun zusammengerechnet, kommt der ganze Quotient $=\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{ba}{a^2-b^2}=\frac{a^2-ba}{a^2-b^2}=\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}$ und da $a^2-b^2=(a+b).(a-b)$ ist, so ist $\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a}{a+b}$, weil der Faktor $a-b$ im Zähler und Nenner sich aufhebt. Es kommt also der wahre Quotient $\frac{a}{a+b}$ wieder heraus, oder auch $\frac{-a}{-a-b}$, weil dieser mit $\frac{a}{a+b}$ einerlei ist.

Es sei $a=3$, $b=2$, so ist $\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$, oder auch $\frac{-3}{-3-2}$ $=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}=1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+\frac{64}{729}$ u. s. w. $-\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{32}{243}$ $-\frac{128}{2187}$ u. s. w. Also $1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}$ u. s. w. $=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{1}{\frac{9-4}{9}}$ $=1\cdot\frac{9}{9-4}=\frac{9}{9-4}$ und $-\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{32}{243}$ u. s. w. $=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}$ $=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{9-4}{9}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{9-4}=-\frac{2\cdot 9}{3(9-4)}=-\frac{2\cdot 3}{9-4}$. Also der ganze Quotient $=\frac{9}{9-4}-\frac{2\cdot 3}{9-4}=\frac{9-2\cdot 3}{9-4}=\frac{9-6}{9-4}=\frac{3}{5}$, wie es sein soll.

In der Reihe II. sind die Zeichen auch abwechselnd, aber das negative Glied anfangend. Sie besteht also aus den Reihen $-1,-\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^6}{a^6}$ u. s. w. und $\frac{b}{a}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^5}{a^5}+\frac{b^7}{a^7}$ u. s. w. In beiden Reihen ist der Exponent $=\frac{b^2}{a^2}$ und ist nun

wieder b kleiner als a, so sind beide Reihen unendlich abnehmend und jeder Summe $= \frac{a}{1-e}$. In der negativen Reihe ist $a = -1$ und $e = \frac{b^2}{a^2}$, also $S = \frac{-1}{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{-1}{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ $= -1 \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{-a^2}{a^2-b^2}$. In der positiven Reihe ist $a = \frac{b}{a}$ und $e = \frac{b^2}{a^2}$, $S = \frac{\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{ba^2}{a(a^2-b^2)} = \frac{ba}{a^2-b^2}$. Die Summen beider Reihen nun zusammengerechnet, kommt der ganze Quotient $= \frac{-a^2}{a^2-b^2} + \frac{ba}{a^2-b^2} = \frac{-a^2+ba}{a^2-b^2} = \frac{-a(a-b)}{a^2-b^2}$ $= \frac{-a(a-b)}{(a+b)(a-b)}$ und da sich $a-b$ im Zähler und Nenner aufheben, so ist die Summe $= \frac{-a}{a+b}$ oder auch $\frac{a}{-a-b}$, wie es sein muß.

Es sei $a = 3$, $b = 2$, so ist $\frac{-a}{a+b} = \frac{-3}{3+2} = \frac{a}{-a-b}$ $= \frac{3}{-3-2} = -\frac{3}{5} = -1 - \frac{4}{9} - \frac{16}{81} - \frac{64}{729}$ u. s. w. $+ \frac{2}{3} + \frac{8}{27}$ $+ \frac{32}{243}$ u. s. w. Also $-1 - \frac{4}{9} - \frac{16}{81}$ u. s. w. $= \frac{-1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{-1}{\frac{9-4}{9}} = -1 \cdot \frac{9}{9-4} = \frac{-9}{9-4}$ und $\frac{2}{3} + \frac{8}{27} + \frac{32}{243}$ u. s. w. $= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{9-4}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{9-4} = \frac{2 \cdot 9}{3(9-4)} = \frac{2 \cdot 3}{9-4}$. Folglich der ganze Quotient $= \frac{2 \cdot 3}{9-4} - \frac{9}{9-4} = \frac{2 \cdot 3 - 9}{9-4} = \frac{6-9}{9-4} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$.

Ist aber in allen diesen Reihen b größer als a, so sind die Progressionen ins Unendliche steigend und ihre richtigen Summen können nur gefunden werden, wenn man die Zahl der Glieder irgendwo aufhören läßt und den Ergänzungsbruch dazu rechnet. Wie dieser Ergänzungsbruch beschaffen sei, läßt sich so übersehen. Die Reihe der Quotienten ohne Zeichen ist immer $1, \frac{b}{a}, \frac{b^2}{a^2}, \frac{b^3}{a^3}, \frac{b^4}{a^4}$ u. s. w. Bezeichnen wir nun auch den ursprünglichen Divisor ohne Rücksicht auf Zeichen durch $a + b$, so daß das Zeichen $+$ jetzt nur die Zusammensetzung anzeigen soll, so wäre, wenn man z. B. beim dritten Gliede $\frac{b^2}{a^2}$ aufgehört hätte, der Rest $\frac{b^3}{a^2}$ geblieben und folglich der Ergänzungsbruch $= \frac{b^3}{a^2(a+b)}$;

beim

beim vierten Gliede $\frac{b^3}{a^3}$ wäre der Rest $= \frac{b^4}{a^3}$ und also der Ergänzungsbruch $= \frac{b^4}{a^3(a+b)}$, also überhaupt bei dem nten Gliede der Rest $= \frac{b^n}{a^{n-1}}$ und der Ergänzungsbruch $= \frac{b^n}{a^{n-1}(a+b)}$, d. h. der Zähler des Ergänzungsbruches hat immer die Potenz von b, deren Exponent der Zahl des Gliedes, wo man aufhört, gleich ist, der Nenner aber besteht aus 2 Faktoren, der eine ist der ursprüngliche Divisor $a+b$, der andere a auf eine Potenz erhoben, deren Exponent um 1 niedriger ist, als die Zahl des Gliedes, wo man aufhört. Gesetzt also, man hätte bei dem zehnten Gliede $= \frac{b^9}{a^9}$ aufgehört, so wäre der Ergänzungsbruch $= \frac{b^{10}}{a^9(a+b)}$.

Was nun aber das Zeichen dieses Bruches betrifft, so ergibt sich Folgendes, wenn wir die Divisionen so unter einander ordnen, wie sie gleiche Quotienten geben.

	Division.	Quotient.	Ergänzungsbruch.
I.	$\frac{a}{a+b} =$	$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \cdots \mp$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(a+b)}$
II.	$\frac{-a}{-a-b} =$	$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \cdots \pm$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(-a-b)}$
III.	$\frac{-a}{a+b} =$	$-1 + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} \cdots \pm$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(a+b)}$
IV.	$\frac{a}{-a-b} =$	$-1 + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} \cdots \mp$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(-a-b)}$
V.	$\frac{a}{a-b} =$	$1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \cdots +$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(a-b)}$
VI.	$\frac{-a}{-a+b} =$	$1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} \cdots -$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(-a+b)}$
VII.	$\frac{-a}{a-b} =$	$-1 - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} \cdots -$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(a-b)}$
VIII.	$\frac{a}{-a+b} =$	$-1 - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} \cdots +$	$\frac{b^n}{a^{n-1}(-a+b)}$

In Reihe I. und II. ist nämlich das letzte Glied des Quotienten positiv, wenn n ungerade, und negativ, wenn n gerade ist. Ist nun in I. das letzte Glied positiv, so muß der Rest negativ sein, wenn er, durch $+a$ aufs neue dividirt, ein negatives Glied geben soll; also ist der Ergänzungsbruch negativ. Ist aber das letzte Glied negativ, so muß der Rest positiv sein, weil er, durch $+a$ dividirt, ein positives Glied geben soll; also ist der Ergänzungsbruch auch positiv.

In II. ist es gerade umgekehrt. Ist das letzte Glied positiv, so muß der Rest auch positiv sein, weil er, durch $-a$ dividirt, ein negatives Glied geben soll; folglich auch der Ergänzungsbruch positiv. Ist aber das letzte Glied negativ, so ist der Rest auch negativ, weil er, durch $-a$ dividirt, ein positives Glied geben soll; also der Ergänzungsbruch auch negativ.

In III. und IV. ist das letzte Glied negativ, wenn n ungerade, und positiv, wenn n gerade ist. Ist nun in III. das letzte Glied negativ, so muß der Rest positiv sein, weil er, durch $+a$ dividirt, ein positives Glied geben soll; also der Ergänzungsbruch auch positiv. Ist aber das letzte Glied positiv, so muß der Rest negativ sein, weil er, durch $+a$ dividirt, ein negatives Glied geben soll; folglich der Ergänzungsbruch auch negativ. Ist aber in IV. das letzte Glied negativ, so ist der Rest auch negativ, weil er, durch $-a$ dividirt, ein positives Glied geben soll; der Ergänzungsbruch also auch negativ. Ist aber das letzte Glied positiv, so muß es der Rest und der Ergänzungsbruch auch sein.

In V. muß der Rest nach jedem Gliede positiv sein, weil er, durch $+a$ dividirt, wieder ein positives Glied geben soll; also der Ergänzungsbruch auch. In VI. ist dagegen Rest und Ergänzungsbruch immer negativ, weil der Rest, durch $-a$ dividirt, ein positives Glied geben soll.

In VII. muß nach jedem Gliede Rest und Ergänzungsbruch negativ sein, weil sonst durch die Division mit $+a$ kein negativer Quotient entstehen könnte, und in VIII. immer positiv, weil die Division mit $-a$ einen negativen Quotienten geben soll.

In I. und III. hat also der Ergänzungsbruch immer das entgegengesetzte Zeichen vom letzten Gliede, in II. und IV. das übereinstimmende; in V. und VII. ebenfalls das übereinstimmende und in VI. und VIII. das entgegengesetzte Zeichen.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen. Es sei $a = 2$, $b = 4$, so ist:

in I.

für $n = 6$

$$\frac{2}{2+4} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{64}{8} + \frac{256}{16} - \frac{1024}{32} + \frac{4096}{32(2+4)}$$
$$= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \frac{4096}{32 \cdot 6} = -21$$
$$+ \frac{128}{6} = -21 + 21\frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

für $n = 5$

$$\frac{2}{2+4} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{64}{8} + \frac{256}{16} - \frac{1024}{16(2+4)}$$
$$= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \frac{1024}{16 \cdot 6} = +11 - \frac{64}{6}$$
$$= 11 - 10\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

in II.

für $n = 6$

$$\frac{-2}{2-4} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{64}{8} + \frac{256}{16} - \frac{1024}{32} - \frac{4096}{32(-2-4)}$$
$$= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 - \frac{4096}{32 \cdot -6}$$
$$= -21 - \frac{128}{-6} = -21 - (-21\frac{1}{3}) = -21$$
$$+ 21\frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

für $n = 5$

$$\frac{-2}{2-4} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{64}{8} + \frac{256}{16} + \frac{1024}{16 \cdot (-2-4)}$$
$$= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 + \frac{1024}{16 \cdot -6} = +11 + \frac{64}{-6}$$
$$= +11 - 10\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

in III.

für $n = 6$

$$\frac{-2}{2+4} = -1 + \frac{4}{2} - \frac{16}{4} + \frac{64}{8} - \frac{256}{16} + \frac{1024}{32} - \frac{4096}{32(2+4)}$$
$$= -1 + 2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \frac{4096}{32 \cdot 6}$$
$$= -21 + 42 - \frac{128}{6} = +21 - 21\frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

für $n = 5$

$$\frac{-2}{2+4} = -1 + \frac{4}{2} - \frac{16}{4} + \frac{64}{8} - \frac{256}{16} + \frac{1024}{16(2+4)}$$
$$= -1 + 2 - 4 + 8 - 16 + \frac{1024}{16 \cdot 6} = -21 + 10$$
$$+ \frac{64}{6} = -11 + \frac{64}{6} = -11 + 10\frac{2}{3} = -\frac{1}{3},$$

in IV.

für $n = 6$

$$\frac{2}{2-4} = -1 + \frac{4}{2} - \frac{16}{4} + \frac{64}{8} - \frac{256}{16} + \frac{1024}{32} + \frac{4096}{32 \cdot (-2-4)}$$
$$= -1 + 2 - 4 + 8 - 16 + 32 + \frac{4096}{32 \cdot -6} =$$
$$-21 + 42 + \frac{128}{-6} = +21 - 21\frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

für $n = 5$

$$\frac{2}{2-4} = -1 + \frac{4}{2} - \frac{16}{4} + \frac{64}{8} - \frac{256}{16} - \frac{1024}{16(-2-4)}$$
$$= -1 + 2 - 4 + 8 - 16 - \frac{1024}{16 \cdot -6} = -21$$
$$+ 10 - \frac{64}{6} = -11 - (-10\frac{2}{3}) = -11$$
$$+ 10\frac{2}{3} = -\frac{1}{3},$$

in V.

für $n = 6$

$$\frac{2}{2-4} = +1+\frac{4}{2}+\frac{16}{4}+\frac{64}{8}+\frac{256}{16}+\frac{1024}{32}+\frac{4096}{32(2-4)}$$
$$= 1+2+4+8+16+32+\frac{4096}{32\cdot-2} = 63$$
$$+\frac{128}{-2} = 63-64 = -1,$$

für $n = 5$

$$\frac{2}{2-4} = 1+\frac{4}{2}+\frac{16}{4}+\frac{64}{8}+\frac{256}{16}+\frac{1024}{16(2-4)}$$
$$= 1+2+4+8+16+\frac{1024}{16\cdot-2} = 31+\frac{64}{-2}$$
$$= 31-32 = -1,$$

in VI.

für $n = 6$

$$\frac{-2}{-2+4} = 1+\frac{4}{2}+\frac{16}{4}+\frac{64}{8}+\frac{256}{16}+\frac{1024}{32}-\frac{4096}{32(-2+4)}$$
$$= 1+2+4+8+16+32-\frac{4096}{32\cdot2} = 63$$
$$-64 = -1,$$

für $n = 5$

$$\frac{-2}{-2+4} = 1+\frac{4}{2}+\frac{16}{4}+\frac{64}{8}+\frac{256}{16}-\frac{1024}{32\cdot(-2+4)}$$
$$= 1+2+4+8+16-\frac{1024}{16\cdot2} = 31-32$$
$$= -1,$$

in VII.

für $n = 6$

$$\frac{-2}{2-4} = -1-\frac{4}{2}-\frac{16}{4}-\frac{64}{8}-\frac{256}{16}-\frac{1024}{32}-\frac{4096}{32(2-4)}$$
$$= -1-2-4-8-16-32-\frac{4096}{32\cdot-2}$$
$$= -63-(-64) = -63+64 = 1,$$

für $n = 5$

$$\frac{-2}{2-4} = -1-\frac{4}{2}-\frac{16}{4}-\frac{64}{8}-\frac{256}{16}-\frac{1024}{16(2-4)}$$
$$= -1-2-4-8-16-\frac{1024}{16\cdot-2} = -31$$
$$-(-32) = -31+32 = 1,$$

in VIII.

für $n = 6$

$$\frac{2}{-2+4} = -1-\frac{4}{2}-\frac{16}{4}-\frac{64}{8}-\frac{256}{16}-\frac{1024}{32}+\frac{4096}{32(-2+4)}$$
$$= -1-2-4-8-16-32+\frac{4096}{32\cdot2}$$
$$= -63+64 = 1,$$

für $n = 5$

$$\frac{2}{-2+4} = -1-\frac{4}{2}-\frac{16}{4}-\frac{64}{8}-\frac{256}{16}+\frac{1024}{16(-2+4)}$$
$$= -1-2-4-8-16+\frac{1024}{16\cdot2} = -31$$
$$+32 = 1.$$

Man sieht also, daß auch für steigende Reihen der Quotient richtig ist, nur daß man hier allemal den Ergänzungsbruch beifügen muß und die Reihe nicht unendlich setzen kann.

Ist auch der Dividendus vom ersten Theile des Divisors verschieden, so kann der Quotient doch auf ähnliche Art durch eine Progression ausgedrückt werden. Es werde also m durch $p+q$ dividirt, so ist $\frac{m}{p+q} = \frac{m}{p} - \frac{mq}{p^2} + \frac{mq^2}{p^3} - \frac{mq^3}{p^4} + \frac{mq^4}{p^5}$ u. s. w.

So wie im vorigen lassen sich in Rücksicht der Zeichen ebenfalls 8 verschiedene Fälle denken, die sich wieder in 4 konzentriren werden. Die 8 Fälle sind:

I. $\frac{m}{p+q} = \frac{m}{p} - \frac{mq}{p^2} + \frac{mq^2}{p^3} - \frac{mq^3}{p^4} + \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

II. $\frac{-m}{-p-q} = \frac{m}{p} - \frac{mq}{p^2} + \frac{mq^2}{p^3} - \frac{mq^3}{p^4} + \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

III. $\frac{-m}{p+q} = -\frac{m}{p} + \frac{mq}{p^2} - \frac{mq^2}{p^3} + \frac{mq^3}{p^4} - \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

IV. $\frac{m}{-p-q} = -\frac{m}{p} + \frac{mq}{p^2} - \frac{mq^2}{p^3} + \frac{mq^3}{p^4} - \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

V. $\frac{m}{p-q} = \frac{m}{p} + \frac{mq}{p^2} + \frac{mq^2}{p^3} + \frac{mq^3}{p^4} + \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

VI. $\frac{-m}{-p+q} = \frac{m}{p} + \frac{mq}{p^2} + \frac{mq^2}{p^3} + \frac{mq^3}{p^4} + \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

VII. $\frac{-m}{p-q} = -\frac{m}{p} - \frac{mq}{p^2} - \frac{mq^2}{p^3} - \frac{mq^3}{p^4} - \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

VIII. $\frac{m}{-p+q} = -\frac{m}{p} - \frac{mq}{p^2} - \frac{mq^2}{p^3} - \frac{mq^3}{p^4} - \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc.

In diesen Reihen, welche jetzt so geordnet sind, wie sie einander vollkommen gleich sind, ist immer $\frac{m}{p}$ das erste Glied und der Exponent $= \frac{q}{p}$. Sind nun die Zeichen der Glieder einerlei und das Produkt mq kleiner als p^2, so bilden die Quotienten unendlich abnehmende Reihen und ihre Summe, d. h. der ganze Quotient, wird nach §. 171. gefunden. Also ist für V. und VI. die Summe $S = \frac{a}{1-e}$ und da $a = \frac{m}{p}$ und $e = \frac{q}{p}$, so ist $S = \frac{\frac{m}{p}}{1-\frac{q}{p}} = \frac{\frac{m}{p}}{\frac{p-q}{p}} = \frac{m}{p} \cdot \frac{p}{p-q}$ $= \frac{m}{p-q}$, also der ursprüngliche Quotient, der dann auch wie in VI. durch $\frac{-m}{-p+q}$ ausgedrückt werden kann.

Eben so für VII. und VIII. ist $S = \frac{a}{1-e}$ und $a = -\frac{m}{p}$ und $e = \frac{q}{p}$, also $S = \frac{-\frac{m}{p}}{1-\frac{q}{p}} = \frac{-\frac{m}{p}}{\frac{p-q}{p}} = -\frac{m}{p} \cdot \frac{p}{p-q} = -\frac{m}{p-q}$, also der ursprüngliche Quotient in VII., wofür denn auch, wie in VIII. $\frac{m}{-p+q}$ geschrieben werden kann.

Sind die Zeichen der Glieder abwechselnd, wie in I. und II., III. und IV., so besteht jeder Quotient aus einer positiven und einer negativen Reihe, und zwar beide unendlich abnehmend, wenn mq kleiner als p^2 ist. Also ist Reihe

I. und II. $= \frac{m}{p} + \frac{mq^2}{p^3} + \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc. $- \frac{mq}{p^2} - \frac{mq^3}{p^4} - \frac{mq^5}{p^6}$ ꝛc.

In der positiven Reihe ist das erste Glied $= \frac{m}{p}$ und der Exponent $= \frac{q^2}{p^2}$; in der negativen Reihe das erste Glied $= -\frac{mq}{p^2}$ und der Exponent auch $= \frac{q^2}{p^2}$. Also die Summe der positiven Reihe oder $S = \frac{a}{1-e} = \frac{\frac{m}{p}}{1-\frac{q^2}{p^2}} = \frac{\frac{m}{p}}{\frac{p^2-q^2}{p^2}} = \frac{m}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2-q^2} = \frac{mp}{p^2-q^2}$ und die Summe der negativen Reihe oder $S = \frac{-\frac{mq}{p^2}}{1-\frac{q^2}{p^2}} = \frac{-\frac{mq}{p^2}}{\frac{p^2-q^2}{p^2}} = -\frac{mq}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2-q^2} = -\frac{mq}{p^2-q^2}$.

Folglich der ganze Quotient $= \frac{mp}{p^2-q^2} - \frac{mq}{p^2-q^2} = \frac{mp-mq}{p^2-q^2} = \frac{m(p-q)}{(p+q)(p-q)} = \frac{m}{p+q}$, wie es sein muß.

Eben so ist Reihe

III. u. IV. $= -\frac{m}{p} - \frac{mq^2}{p^3} - \frac{mq^4}{p^5}$ ꝛc. $+ \frac{mq}{p^2} + \frac{mq^3}{p^4} + \frac{mq^5}{p^6}$ ꝛc.

In der negativen Reihe ist das erste Glied $= -\frac{m}{p}$ und der Exponent $= \frac{q^2}{p^2}$; in der positiven das erste Glied $= \frac{mq}{p^2}$ und der Exponent auch $= \frac{q^2}{p^2}$. Also die Summe der unendlich abnehmenden negativen Reihe $= \frac{-\frac{m}{p}}{1-\frac{q^2}{p^2}} = \frac{-\frac{m}{p}}{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$

$= -\frac{m}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2-q^2} = -\frac{mp}{p^2-q^2}$. Die Summe der unendlich abnehmenden positiven Reihe ist $= \frac{\frac{mq}{p^2}}{1-\frac{q^2}{p^2}} = \frac{\frac{mq}{p^2}}{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$ $= \frac{mq}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2-q^2} = \frac{mq}{p^2-q^2}$. Also die Summe der ganzen Reihe $= \frac{mq}{p^2-q^2} - \frac{mp}{p^2-q^2} = \frac{mq-mp}{p^2-q^2} = \frac{m(q-p)}{p^2-q^2}$ $= \frac{m(q-p)}{(p+q)(p-q)}$. Es ist aber der Zähler $m(q-p) = -m(p-q)$, folglich $S = \frac{-m(p-q)}{(p+q)(p-q)} = \frac{-m}{p+q}$ oder auch $= \frac{m}{-p-q}$, wie es sein muß.

Ist mq größer als p^2, so sind beide Reihen steigend. Man muß eine bestimmte Menge von Gliedern nehmen und sie mit dem Ergänzungsbruche zusammenrechnen, dessen Zeichen eben so, wie oben, für alle 8 Fälle bestimmt werden. In dem Zähler des Ergänzungsbruches steht aber q in einer Potenz höher, als in dem letzten Gliede, oder in einer Potenz, deren Exponent der Zahl des letzten Gliedes gleich ist; in eben dieser Potenz steht auch der Faktor p des Ergänzungsbruches und der andere Faktor ist der ursprüngliche Divisor. Hört man also mit dem nten Gliede auf und setzt man wieder den Divisor ohne Rücksicht auf Zeichen $= p+q$, so daß + nur die Zusammensetzung von p und q anzeigt, so ist der Ergänzungsbruch $= \frac{mq^n}{p^n(p+q)}$. In Rücksicht der Zeichen ist also der Ergänzungsbruch für alle 8 Fälle folgender:

Für

I.	II.	III.	IV.
$\mp\frac{mq^n}{p^n(p+q)}$	$\pm\frac{mq^n}{p^n(-p-q)}$	$\pm\frac{mq^n}{p^n(p+q)}$	$\mp\frac{mq^n}{p^n(-p-q)}$
V.	**VI.**	**VII.**	**VIII.**
$+\frac{mq^n}{p^n(p-q)}$	$-\frac{mq^n}{p^n(-p+q)}$	$-\frac{mq^n}{p^n(p-q)}$	$+\frac{mq^n}{p^n(-p+q)}$

Ist n ungerade, so gelten da, wo doppelte Zeichen stehen, die obern, ist n gerade, die untern.

Es sei nun $n = 6$, d. h. man nehme 6 Glieder der Progression zusammen, so findet man die Summe derselben nach

der Formel $\frac{a(e^n-1)}{e-1}$. Betrachten wir nun erst die Reihen V., VI., VII., VIII., worin die Glieder alle einerlei Zeichen haben, so ist in V. das erste Glied $a = \frac{m}{p}$, der Exponent $e = \frac{q}{p}$, also $S = \frac{\frac{m}{p}\left(\frac{q^6}{p^6}-1\right)}{\frac{q}{p}-1} = \frac{\frac{m}{p}\left(\frac{q^6-p^6}{p^5}\right)}{\frac{q-p}{p}}$ $= \frac{m}{p}\left(\frac{q^6-p^6}{p^5}\right) \cdot \frac{p}{q-p} = \frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)}$. Nimmt man nun dazu den Ergänzungsbruch $= \frac{mq^6}{p^6(p-q)}$, so wird der ganze Quotient $= \frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)} + \frac{mq^6}{p^6(p-q)}$. Beide Brüche auf einerlei Nenner gebracht, kommt $\frac{m(q^6-p^6)(p-q)}{p^6(q-p)(p-q)}$ $+ \frac{mq^6(q-p)}{p^6(p-q)(q-p)} = \frac{m(q^6-p^6)(p-q)+mq^6(q-p)}{p^6(q-p)(p-q)}$. Man multiplizire im Zähler wirklich, so kommt

$$\frac{(mq^6-mp^6)(p-q)+mq^7-mq^6p}{p^6(q-p)(p-q)}$$
$$= \frac{mq^6p-mq^7-mp^7+mp^6q+mq^7-mq^6p}{p^6(q-p)(p-q)}.$$

Jetzt hebt sich $-mq^7$ mit $+mq^7$ und mq^6p mit $-mq^6p$, also ist der ganze Quotient $= \frac{mp^6q-mp^7}{p^6(q-p)(p-q)} = \frac{mq-mp}{(q-p)(p-q)}$ $= \frac{m(q-p)}{(q-p)(p-q)} = \frac{m}{p-q}$, also wie der ursprüngliche Quotient lautet.

In VI. ist das erste Glied auch $= \frac{m}{p}$ und $e = \frac{q}{p}$, also wenn $n = 6$ ist, so ist, wie in V., die Summe $= \frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)}$. Der Ergänzungsbruch ist $= -\frac{mq^6}{p^6(-p+q)}$, also der ganze Quotient $= \frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)} - \frac{mq^6}{p^6(-p+q)} = \frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)} - \frac{mq^6}{p^6(q-p)}$ $= \frac{m(q^6-p^6)-mq^6}{p^6(q-p)} = \frac{mq^6-mp^6-mq^6}{p^6(q-p)} = \frac{-mp^6}{p^6(q-p)}$ $= \frac{-m}{q-p} = \frac{-m}{-p+q}$, also auch wie der ursprüngliche Quotient.

In VII. ist das erste Glied $a = -\frac{m}{p}$, der Exponent $e = \frac{q}{p}$, also $S = \frac{-\frac{m}{p}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^6 - 1\right]}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{-\frac{m}{p}\left(\frac{q^6}{p^6} - 1\right)}{\frac{q}{p} - 1}$

$= \frac{-\frac{m}{p}\left(\frac{q^6 - p^6}{p^6}\right)}{\frac{q-p}{p}} = -\frac{m}{p}\left(\frac{q^6-p^6}{p^6}\right) \cdot \frac{p}{q-p} = \frac{-m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)}$.

Dazu kommt der Ergänzungsbruch $= -\frac{mq^6}{p^6(p-q)}$, also der ganze Quotient $= -\frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)} - \frac{mq^6}{p^6(p-q)}$. Um nun beide Brüche unter einerlei Nenner zu bringen, ist es am bequemsten, den ersten Bruch $-\frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)}$ im Zähler und Nenner mit -1 zu multipliziren, wodurch derselbe nicht verändert wird, im Nenner aber $p-q$ statt $q-p$ kommt. Es ist also der ganze Quotient $= \frac{m(q^6-p^6)}{p^6(p-q)} - \frac{mq^6}{p^6(p-q)}$

$= \frac{m(q^6-p^6) - mq^6}{p^6(p-q)} = \frac{mq^6 - mp^6 - mq^6}{p^6(p-q)} = \frac{-mp^6}{p^6(p-q)}$

$= \frac{-m}{p-q}$, also wie der Quotient ursprünglich heißt.

In VIII. bilden die Glieder ebenfalls die Summe $\frac{-m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)}$ und dazu kommt der Ergänzungsbruch $+\frac{mq^6}{p^6(-p+q)}$, also der ganze Quotient $= \frac{-m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)} + \frac{mq^6}{p^6(-p+q)}$

$= \frac{-m(q^6-p^6)}{p^6(q-p)} + \frac{mq^6}{p^6(q-p)} = \frac{-m(q^6-p^6)+mq^6}{p^6(q-p)}$

$= \frac{-mq^6+mp^6+mq^6}{p^6(q-p)} = \frac{mp^6}{p^6(q-p)} = \frac{m}{q-p} = \frac{m}{-p+q}$,

wie der ursprüngliche Quotient lautet.

In den Fällen I., II., III., IV. sind die Zeichen abwechselnd und es kommt darauf an, ob n gerade oder ungerade sei.

Es sei in I. n ungerade, z. B. $= 5$, so gibt es 3 positive und 2 negative Glieder und der Ergänzungsbruch ist negativ.

Die Summe der positiven Glieder ist $= \frac{m}{p} + \frac{mq^2}{p^3} + \frac{mq^4}{p^5}$, also das erste Glied $= \frac{m}{p}$, der Exponent $= \frac{q^2}{p^2}$, die Zahl der Glieder $= 3$, also $\frac{a(e^n-1)}{e-1} = \frac{\frac{m}{p}\left[\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^3-1\right]}{\frac{q^2}{p^2}-1}$

$= \frac{\frac{m}{p}\left(\frac{q^6}{p^6}-1\right)}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{\frac{m}{p}\left(\frac{q^6-p^6}{p^6}\right)}{\frac{q^2-p^2}{p^2}} = \frac{m}{p}\left(\frac{q^6-p^6}{p^6}\right) \cdot \frac{p^2}{q^2-p^2}$

$= \frac{m(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)}$.

Die Summe der negativen Glieder ist $= -\frac{mq}{p^2} - \frac{mq^3}{p^4}$, also $a = -\frac{mq}{p^2}$; $e = \frac{q^2}{p^2}$ und $n = 2$, folglich $\frac{a(e^n-1)}{e-1}$

$= \frac{-\frac{mq}{p^2}\left[\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^2-1\right]}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{-\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^4}{p^4}-1\right)}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{-\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^4-p^4}{p^4}\right)}{\frac{q^2-p^2}{p^2}}$

$= -\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^4-p^4}{p^4}\right) \cdot \frac{p^2}{q^2-p^2} = \frac{-mq(q^4-p^4)}{p^4(q^2-p^2)}$. Also ist die Summe der positiven und negativen Glieder $= \frac{m(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)} - \frac{mq(q^4-p^4)}{p^4(q^2-p^2)}$ und beide auf einerlei Nenner gebracht, indem man rechts mit p multiplizirt, kommt $\frac{m(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)} - \frac{mpq(q^4-p^4)}{p^5(q^2-p^2)}$

$= \frac{m(q^6-p^6)-mpq(q^4-p^4)}{p^5(q^2-p^2)}$. Nimmt man nun dazu den Ergänzungsbruch $-\frac{mq^5}{p^5(p+q)}$, so kommt der ganze Quotient

$= \frac{m(q^6-p^6)-mpq(q^4-p^4)}{p^5(q^2-p^2)} - \frac{mq^5}{p^5(p+q)}$. Bringt man nun beide Brüche unter einerlei Nenner, indem man links mit $p+q$ und rechts mit q^2-p^2 Zähler und Nenner multiplizirt, so kommt

$\frac{m(q^6-p^6)(p+q)-mpq(q^4-p^4)(p+q)}{p^5(q^2-p^2)(p+q)} - \frac{mq^5(q^2-p^2)}{p^5(p+q)(q^2-p^2)}$

$= \frac{m(q^6-p^6)(p+q)-mpq(q^4-p^4)(p+q)-mq^5(q^2-p^2)}{p^5(q^2-p^2)(p+q)}$.

Multiplizirt man nun wirklich im Zähler, so erhält man

$\frac{(mq^6-mp^6)(p+q)-(mpq^5+mp^5q)(p+q)-mq^7+mq^5p^2}{p^5(q^2-p^2)(p+q)} =$

$$\frac{mq^6p+mq^7-mp^7-mp^6q-mp^2q^6-mpq^6+mp^6q+mp^5q^2-mq^7+mq^6p^2}{p^5(q^2-p^2)(p+q)}$$

$$= \frac{-mp^7+mp^5q^2}{p^5(q^2-p^2)(p+q)} = \frac{mp^5q^2-mp^7}{p^5(q^2-p^2)(p+q)} = \frac{mq^2-mp^2}{(q^2-p^2)(p+q)}$$

$$= \frac{m(q^2-p^2)}{(q^2-p^2)(p+q)} = \frac{m}{p+q}, \text{ also der ursprüngliche Quotient.}$$

Ist n gerade, also $= 6$, so gibt es 3 positive und 3 negative Glieder und der Ergänzungsbruch ist positiv.

Die Summe der 3 positiven Glieder ist $\frac{m}{p} + \frac{mq^2}{p^3} + \frac{mq^4}{p^5}$, also wie oben $= \frac{m(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)}$.

Die Summe der 3 negativen Glieder ist $-\frac{mq}{p^2} - \frac{mq^3}{p^4} - \frac{mq^5}{p^6}$, also $a = -\frac{mq}{p^2}$, $e = \frac{q^2}{p^2}$ und $n = 3$, folglich

$$S = \frac{a(e^n-1)}{e-1} = \frac{-\frac{mq}{p^2}\left[\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^3-1\right]}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{-\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^6}{p^6}-1\right)}{\frac{q^2}{p^2}-1}$$

$$= \frac{-\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^6-p^6}{p^6}\right)}{\frac{q^2-p^2}{p^2}} = -\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^6-p^6}{p^6}\right) \cdot \frac{p^2}{q^2-p^2}$$

$$= -\frac{mq(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)}.$$

Die Summe der positiven und negativen Glieder also $= \frac{m(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)} - \frac{mq(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)}$ und auf einerlei Nenner gebracht, kommt $\frac{mp(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)} - \frac{mq(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)} =$

$$\frac{mp(q^6-p^6)-mq(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)} = \frac{(mp-mq)(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)}$$

$$= \frac{m(p-q)(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)}.$$ Dazu nun den Ergänzungsbruch $+\frac{mq^6}{p^6(p+q)}$ gerechnet, kommt der ganze Quotient $= \frac{m(p-q)(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)} + \frac{mq^6}{p^6(p+q)}$. Auf einerlei Nenner gebracht, indem man links mit $p+q$ und rechts mit q^2-p^2 multiplizirt, kommt $\frac{m(p-q)(p+q)(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)(p+q)} + \frac{mq^6(q^2-p^2)}{p^6(q^2-p^2)(p+q)}$

$$= \frac{m(p^2-q^2)(q^6-p^6)+mq^6(q^2-p^2)}{p^6(q^2-p^2)(p+q)}.$$

Multiplizirt man im Zähler wirklich, so kommt

$$\frac{(mp^2-mq^2)(q^4-p^4)+mq^6-mq^4p^2}{p^6(q^2-p^2)(p+q)}$$

$$=\frac{mp^2q^4-mp^6-mq^6+mq^4p^2+mq^6-mq^4p^2}{p^6(q^2-p^2)(p+q)}$$

und hebt man im Zähler, was sich heben läßt, so erhält man

$$\frac{mq^2p^4-mp^6}{p^6(q^2-p^2)(p+q)}=\frac{mq^2-mp^2}{(q^2-p^2)(p+q)}=\frac{m(q^2-p^2)}{(q^2-p^2)(p+q)}$$

$$=\frac{m}{p+q}$$, also den ursprünglichen Quotienten.

Ist in II. n ungerade, so ist der Ergänzungsbruch positiv. Die Summe der 3 positiven Glieder ist wie in I. $=\frac{m(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)}$ und die Summe der 2 negativen Glieder auch wie in I. $=\frac{-mq(q^4-p^4)}{p^5(q^2-p^2)}$. Also beider Summe, nachdem sie unter einerlei Nenner gebracht sind, $=\frac{m(q^6-p^6)-mpq(q^4-p^4)}{p^5(q^2-p^2)}$.

Dazu nun den Ergänzungsbruch $=+\frac{mq^5}{p^5(-p-q)}$ gerechnet, kommt der ganze Quotient $=\frac{m(q^6-p^6)-mpq(q^4-p^4)}{p^5(q^2-p^2)}+\frac{mq^5}{p^5(-p-q)}$. Beide Brüche auf einerlei Nenner gebracht, indem man links mit $-p-q$ und rechts mit q^2-p^2 multiplizirt, kommt

$$\frac{m(q^6-p^6)(-p-q)-mpq(q^4-p^4)(-p-q)}{p^5(q^2-p^2)(-p-q)}+\frac{mq^5(q^2-p^2)}{p^5(q^2-p^2)(-p-q)}$$

$$=\frac{m(q^6-p^6)(-p-q)-mpq(q^4-p^4)(-p-q)+mq^5(q^2-p^2)}{p^5(q^2-p^2)(-p-q)}.$$

Wird wirklich im Zähler multiplizirt, so erhält man

$$\frac{(mq^6-mp^6)(-p-q)-(mpq^5-mp^5q)(-p-q)+mq^7-mq^5p^2}{p^5(q^2-p^2)(-p-q)}=$$

$$\frac{-mpq^6-mq^7+mp^7+mp^6q+mp^2q^5+mpq^6-mp^6q-mp^5q^2+mq^7-mq^5p^2}{p^5(q^2-p^2)(-p-q)}$$

Hebt man alles, was sich heben läßt, so kommt $\frac{mp^7-mp^5q^2}{p^5(q^2-p^2)(-p-q)}$

$$=\frac{mp^2-mq^2}{(q^2-p^2)(-p-q)}.$$ Es ist aber $mp^2=+m\cdot+p^2$ und auch $=-m\cdot-p^2$, folglich der letzte Bruch auch $=\frac{-m\cdot-p^2-mq^2}{(q^2-p^2)(-p-q)}$ und nimmt man nun $-m$ als gemeinschaftlichen Faktor, so erhält man $\frac{-m(-p^2+q^2)}{(q^2-p^2)(-p-q)}$

$$=\frac{-m(q^2-p^2)}{(q^2-p^2)(-p-q)}=\frac{-m}{-p-q}$$, wie es sein muß.

Setzt man n gerade, z. B. $=6$, so gibt es 3 positive und 3 negative Glieder und beider Summe ist, wie oben,

$= \frac{m(p-q)(q^5-p^5)}{p^6(q^2-p^2)}$. Dazu den Ergänzungsbruch $= -\frac{mq^5}{p^6(-p-q)}$ genommen, kommt der ganze Quotient $= \frac{m(p-q)(q^5-p^5)}{p^6(q^2-p^2)} - \frac{mq^5}{p^6(-p-q)}$ und beide unter einerlei Nenner gebracht, erhält man

$$\frac{m(p-q)(-p-q)(q^5-p^5)-mq^5(q^2-p^2)}{p^6(q^2-p^2)(-p-q)}.$$

Multiplizirt man im Zähler wirklich, so kommt, da $(p-q)\cdot(-p-q) = q^2-p^2$ ist, $\frac{m(q^2-p^2)(q^5-p^5)-mq^5(q^2-p^2)}{p^6(q^2-p^2)(-p-q)}$

$= \frac{m(q^5-p^5)-mq^5}{p^6(-p-q)} = \frac{mq^5-mp^5-mq^5}{p^6(-p-q)} = \frac{-mp^5}{p^6(-p-q)}$

$= \frac{-m}{-p-q}$, wie es sein muß.

In III. und IV. sind die Zeichen auch abwechselnd, nur in entgegengesetzter Ordnung. Ist nun in III. n ungerade, z. B. $= 5$, so gibt es 3 negative und 2 positive Glieder und der Ergänzungsbruch ist positiv.

Die Summe der negativen Glieder ist $= -\frac{m}{p} - \frac{mq^2}{p^3} - \frac{mq^4}{p^5}$, also $a = -\frac{m}{p}$, $e = \frac{q^2}{p^2}$ und $S = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$

$$= \frac{-\frac{m}{p}\left[\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^3-1\right]}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{-\frac{m}{p}\left(\frac{q^6}{p^5}-1\right)}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{-\frac{m}{p}\left(\frac{q^6-p^5}{p^6}\right)}{\frac{q^2-p^2}{p^2}}$$

$$= -\frac{m}{p}\left(\frac{q^5-p^5}{p^6}\right)\cdot\frac{p^2}{q^2-p^2} = \frac{-m(q^5-p^5)}{p^5(q^2-p^2)}.$$

Die Summe der positiven Glieder ist $+\frac{mq}{p^2} + \frac{mq^3}{p^4}$

$$= \frac{\frac{mq}{p^2}\left[\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^2-1\right]}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^4}{p^4}-1\right)}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^4-p^4}{p^4}\right)}{\frac{q^2-p^2}{p^2}}$$

$= \frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^4-p^4}{p^4}\right)\cdot\frac{p^2}{q^2-p^2} = \frac{mq(q^4-p^4)}{p^4(q^2-p^2)}$. Also, die Summe aller Glieder $= \frac{-m(q^5-p^5)}{p^5(q^2-p^2)} + \frac{mq(q^4-p^4)}{p^4(q^2-p^2)}$ und auf einerlei Nenner gebracht, kommt $\frac{-m(q^5-p^5)}{p^5(q^2-p^2)} + \frac{mpq(q^4-p^4)}{p^5(q^2-p^2)}$

$= \frac{mpq(q^4-p^4)-m(q^5-p^5)}{p^5(q^2-p^2)}$. Dazu den Ergänzungsbruch

$+\frac{mq^5}{p^5(p+q)}$ genommen, erhält man $\frac{mpq(q^4-p^4)-m(q^5-p^5)}{p^5(q^2-p^2)}$ $+\frac{mq^5}{p^5(p+q)}$ und auf einerlei Nenner gebracht, kommt $\frac{mpq(p+q)(q^4-p^4)-m(p+q)(q^5-p^5)+mq^5(q^2-p^2)}{p^5(q^2-p^2)(p+q)}$. Zähler und Nenner lassen sich durchgängig durch $p+q$ oder $q+p$ dividiren, also kommt $\frac{mpq(q^4-p^4)-m(q^5-p^5)+mq^5(q-p)}{p^5(q^2-p^2)}$ und wenn man nun im Zähler wirklich multiplizirt, so erhält man $\frac{mpq^5-mp^5q-mq^5+mp^5+mq^5-mq^5p}{p^5(q^2-p^2)} = \frac{mp^5-mp^5q}{p^5(q^2-p^2)}$ $= \frac{mp-mq}{q^2-p^2} = \frac{-m.-p-mq}{q^2-p^2} = \frac{-m(q-p)}{(q+p)(q-p)} = \frac{-m}{p+q}$ gleich dem ursprünglichen Quotienten.

Ist n gerade, z. B. $= 6$, so gibt es 3 negative und 3 positive Glieder und der Ergänzungsbruch ist negativ.

Die Summe der 3 negativen Glieder ist, wie oben, $= \frac{-m(q^5-p^5)}{p^5(q^2-p^2)}$.

Die positiven Glieder sind $\frac{mq}{p^2}+\frac{mq^3}{p^4}+\frac{mq^5}{p^6}$, also

$$S = \frac{a(e^n-1)}{e-1} = \frac{\frac{mq}{p^2}\left[\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^3-1\right]}{\frac{q^2}{p^2}-1} = \frac{\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^6}{p^6}-1\right)}{\frac{q^2}{p^2}-1}$$

$$= \frac{\frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^6-p^6}{p^6}\right)}{\frac{q^2-p^2}{p^2}} = \frac{mq}{p^2}\left(\frac{q^6-p^6}{p^6}\right)\cdot\frac{p^2}{q^2-p^2} = \frac{mq(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)}.$$

Also die Summe der positiven und negativen Glieder zusammen $= \frac{mq(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)} - \frac{m(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)} = \frac{mq(q^6-p^6)}{p^5(q^2-p^2)} - \frac{mp(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)}$ $= \frac{(mq-mp)(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)}$. Kommt nun dazu der Ergänzungsbruch $-\frac{mq^6}{p^6(p+q)}$, so ist der ganze Quotient $= \frac{(mq-mp)(q^6-p^6)}{p^6(q^2-p^2)} - \frac{mq^6}{p^6(p+q)}$. Beide Brüche auf einerlei Nenner gebracht, erhält man $\frac{m(q-p)(p+q)(q^6-p^6)-mq^6(q^2-p^2)}{p^6(q^2-p^2)(p+q)}$ $= \frac{m(q^2-p^2)(q^6-p^6)-mq^6(q^2-p^2)}{p^6(q^2-p^2)(p+q)} = \frac{m(q^6-p^6)-mq^6}{p^6(p+q)}$ $= \frac{mq^6-mp^6-mq^6}{p^6(p+q)} = \frac{-mp^6}{p^6(p+q)} = \frac{-m}{p+q}$, wie es sein muß.

Ist in IV. n ungerade, so ist der Ergänzungsbruch negativ, und ist n gerade, so ist er positiv.

Es sei also n ungerade, etwa $= 5$, so gibt es 3 negative und 2 positive Glieder. Beider Summe ist wie in III. $= \frac{mpq\,(q^4-p^4)-m\,(q^6-p^6)}{p^5\,(q^2-p^2)}$. Kommt nun dazu der Ergänzungsbruch $-\frac{mq^5}{p^5\,(-p-q)}$, so ist der ganze Quotient $= \frac{mpq\,(q^4-p^4)-m\,(q^6-p^6)}{p^5\,(q^2-p^2)} - \frac{mq^5}{p^5\,(-p-q)}$. Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$\frac{mpq\,(-p-q)\,(q^4-p^4)-m\,(-p-q)\,(q^6-p^6)-mq^5\,(q^2-p^2)}{p^5\,(q^2-p^2)\,(-p-q)}$$

$$= \frac{(-mp^2q-mpq^2)(q^4-p^4)+(mp+mq)(q^6-p^6)-mq^7+mq^5p^2}{p^5\,(q^2-p^2)\,(-p-q)} =$$

$$\frac{-mp^2q^5+mp^6q-mpq^6+mp^5q^2+mpq^6-mp^7+mq^7-mqp^6-mq^7+mq^5p^2}{p^5\,(q^2-p^2)\,(-p-q)}$$

$$= \frac{mp^5q^2-mp^7}{p^5\,(q^2-p^2)\,(-p-q)} = \frac{mq^2-mp^2}{(q^2-p^2)\,(-p-q)}$$

$$= \frac{m\,(q^2-p^2)}{(q^2-p^2)\,(-p-q)} = \frac{m}{-p-q}, \text{ wie es sein muß.}$$

Ist n gerade, so ist der Ergänzungsbruch positiv. Es sei $n = 6$, so gibt es 3 negative und 3 positive Glieder und ihre Summe ist, wie in III., $= \frac{m\,(q-p)\,(q^5-p^5)}{p^5\,(q^2-p^2)}$. Kommt nun dazu der Ergänzungsbruch $+\frac{mq^6}{p^6\,(-p-q)}$, so ist der ganze Quotient $= \frac{m\,(q-p)\,(q^5-p^5)}{p^5\,(q^2-p^2)} + \frac{mq^6}{p^6\,(-p-q)}$

$$= \frac{m\,(q-p)\,(-p-q)\,(q^5-p^5)+mq^6\,(q^2-p^2)}{p^6\,(q^2-p^2)\,(-p-q)}.$$

Man multiplizire im Zähler wirklich, so kommt

$$\frac{m\,(-pq-q^2+p^2+pq)\,(q^5-p^5)+mq^6\,(q^2-p^2)}{p^6\,(q^2-p^2)\,(-p-q)}$$

$$= \frac{m\,(-q^2+p^2)\,(q^5-p^5)+mq^6\,(q^2-p^2)}{p^6\,(q^2-p^2)\,(-p-q)}.$$

Multiplizirt man im Zähler den Faktor $-q^2+p^2$ mit -1, so wird dadurch der ganze erste Theil des Zählers negativ, und es kommt $\frac{-m\,(q^2-p^2)\,(q^5-p^5)+mq^6\,(q^2-p^2)}{p^6\,(q^2-p^2)\,(-p-q)}$. Jetzt kann man Zähler und Nenner durch q^2-p^2 heben und man erhält $\frac{-m\,(q^5-p^5)+mq^6}{p^6\,(-p-q)} = \frac{-mq^6+mp^6+mq^6}{p^6\,(-p-q)}$

$= \frac{mp^6}{p^6(-p-q)} = \frac{m}{-p-q}$, also gleich dem ursprünglichen Quotienten.

Beispiele in Zahlen lassen sich leicht finden, daher wir ihre Durchführung dem Schüler überlassen. Sie geschieht eben so, wie oben für den Quotienten $\frac{+a}{+a+b}$ gezeigt worden ist.

Fünftes Kapitel.

Einiges von Kombinationen.

§. 174.

Erklärung.

Der Ausdruck Kombination heißt überhaupt Verbindung. In der Rechenkunst versteht man darunter die Lehre von der Verbindung mehrerer Größen mit einander. Sind nämlich zwei oder mehr Größen gegeben, so kann die Frage entstehen, auf wie viel Arten können dieselben so mit einander verbunden werden, daß immer jede einen andern Platz einnimmt, z. B. wie oft können 8 Personen ihre Plätze an einem Tische wechseln, ehe die erste Ordnung wiederkehrt? Oder man kann auch fragen, wie vielmal können zwei, drei oder mehr Dinge unter einer gewissen Anzahl von Dingen zusammengenommen werden, z. B. wenn man unter den 90 Nummern einer Zahlenlotterie immer 2 oder 3 oder 4 zusammen verbindet, also Amben, Ternen, Quaternen bildet, wie viel solcher Verbindungen gibt es?

§. 175.

Erklärung.

Wenn man fragt, wie oft unter einer gegebenen Anzahl von Dingen die einzelnen Größen ihre Stelle verwechseln können, so daß immer eine andere Ordnung entsteht, so heißt dieses Versetzen, Permutiren. Fragt man aber, wie vielmal zwei oder drei oder mehr Dinge unter einer gegebenen Anzahl zu-

zusammengenommen werden können, so heißt dies im eigentlichen Sinne Verbinden oder Kombiniren, und bringt man bei dieser letztern Art von Kombination auch mit in Anschlag, wie oft die 2 oder 3 mit einander verbundenen Dinge ihre Stellungen gegen einander ändern können, so heißt dies Variiren.

§. 176.

Aufgabe.

Wie oft kann eine gewisse Anzahl von Dingen versetzt werden, ehe die erste Ordnung wieder entsteht?

Auflösung.

Man schreibe die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche der gegebenen Anzahl von Dingen gleich ist, in eine Reihe und multiplizire alle diese Zahlen mit einander, so erhält man die Anzahl aller möglichen Versetzungen. Fragt man z. B. wie oft können 8 Dinge versetzt werden, so ist die Antwort: 8.7.6.5.4.3.2.1 mal = 40320 mal, und dann erst kehrt die ursprüngliche Ordnung zurück.

Beweis.

Sind nur 2 Dinge gegeben, z. B. a und b, so können nur 2 Versetzungen Statt finden, je nachdem a oder b zuerst steht, also ab oder ba und die Anzahl der Versetzungen ist folglich = 2.1 = 2.

Sind 3 Dinge gegeben, a, b, c, so kann 1) jede von diesen Größen die erste Stelle einnehmen, also abc, bac, cab; wir wollen dies, je nachdem a, oder b, oder c zuerst steht, die erste (abc), die zweite (bac), und die dritte Ordnung (cab) nennen. 2) In jeder dieser 3 Ordnungen können die beiden andern Buchstaben unter sich ihre Stelle wechseln, d. h. jede Ordnung kann wieder auf zweierlei Art verwechselt werden, folglich muß die Anzahl aller Versetzungen = 3.2.1 = 6 sein, nämlich abc oder acb, bac oder bca, cab oder cba.

Sind 4 Dinge gegeben, a, b, c, d, so kann wieder 1) jedes unter diesen die erste Stelle einnehmen, also gibt es 4 Ordnungen: abcd, bacd, cabd, dabc. In jeder dieser 4 Ordnungen können aber die drei andern Buchstaben unter sich sechsmal versetzt werden, also gibt es überhaupt unter 4 Dingen 4.3.2.1 = 24 Versetzungen, nämlich:

I. Ordnung.	II. Ordnung.	III. Ordnung.	IV. Ordnung.
abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb.	bdca.	cdba.	dcba.

Sind 5 Dinge gegeben, ſo gibt es 5 Ordnungen, weil jedes derſelben zuerſt ſtehen kann. In jeder Ordnung aber können die 4 übrigen Größen unter ſich 24 mal = 4.3.2.1 mal verſetzt werden, folglich iſt die Anzahl aller Verſetzungen = 5.4.3.2.1 = 120. Man ſieht leicht, daß ſo die Schlüſſe weiter fort gehen, und wenn man im Allgemeinen 12 Dinge hat, ſo gibt es 12 Ordnungen, und in jeder können die n — 1 andern Dinge ſo vielmal verſetzt werden, als n — 1 Dinge Verſetzungen verſtatten, folglich iſt die Anzahl aller Verſetzungen = n.(n—1).(n—2).(n—3).(n—4).(n—5).(n—6).... 3.2.1.

Fragt man, wie oft laſſen ſich die 25 Buchſtaben des Alphabets, oder die 52 Blätter eines Kartenſpiels verſetzen, ſo iſt im erſten Falle die Antwort 25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 und im andern Falle 52.51.50.49.48.47.46.45.44.43.42.41.40.39.38 37.36.35.34.33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1. Man ſieht ſchon aus der Menge der Faktoren, welche ungeheure Zahlen in den wirklichen Produkten herauskommen müſſen.

§. 177.

Zuſatz.

Es iſt in der vorigen Aufgabe angenommen, daß alle einzelne Größen von einander verſchieden ſind. Sind mehrere einerlei, ſo wird natürlich dadurch die Anzahl der Verſetzungen vermindert. Es ſeien die 3 Größen aab gegeben, worunter 2 einerlei ſind. Wären alle 3 ungleich, ſo gäbe es 3.2.1 = 6 Verſetzungen, da aber 2 gleich ſind, ſo muß es ſo vielmal weniger Verſetzungen geben, als 2 Buchſtaben ſich verſetzen laſſen, d. h. 2.1 mal weniger, alſo iſt die Zahl der Verſetzungen von aab = $\frac{3.2.1}{2.1}$ = 3 und wirklich kann auch b nur entweder die erſte, oder zweite, oder dritte Stelle einnehmen, alſo alle möglichen Verſetzungen ſind aab, aba, baa. Wären 4 Größen gegeben und darunter 3 einerlei, z. B. aaab, ſo würden ſo viel Verſetzungen wegfallen, als 3 Größen

sich versetzen lassen, also ist die Anzahl aller möglichen Versetzungen $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$, nämlich aaab, aaba, abaa, baaa. Wären die Größen aabb gegeben, so würde wieder die Anzahl aller möglichen Versetzungen $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$ sein, denn wegen aa muß man mit 2.1 und wegen bb auch mit 2.1 dividiren, also die wirklichen Versetzungen $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$, nämlich aabb, abab, abba, baba, bbaa, baab. Hieraus würde sich die allgemeine Regel ergeben: Man suche 1) die Menge der Versetzungen aller einzelnen gegebenen Dinge, als ob alle verschieden wären; 2) wenn es nur eine Klasse gleicher Größen unter den gegebenen gibt, so suche man, wie oft sich dieselben (jede von der andern verschieden genommen) unter sich würden versetzen lassen und dividire mit dieser Menge der Versetzungen die Menge der Versetzungen aller gegebenen Dinge. Der Quotient gibt das Verlangte. 3) Sind aber mehrere Klassen gleicher Größen da, so suche man die Anzahl der Versetzungen in jeder Klasse, multiplizire dann die Mengen der Versetzungen in allen Klassen mit einander und dividire mit diesem Produkte die Menge aller möglichen Versetzungen aller gegebenen Größen. Der Quotient zeigt das Verlangte. Es seien z. B. folgende Größen gegeben

a, a, a, b, b, c, c, c, d, d, d, d, e, e, f, f, f, g, g, g.

Die Anzahl aller Größen ist 20. Wären alle verschieden, so könnten sie $20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1$ mal unter einander versetzt werden. Es sind aber 7 Klassen von gleichen Größen darunter. Die erste Klasse a, a, a enthält 3 Größen und könnte also $3.2.1$ mal versetzt werden. Die zweite Klasse b, b leidet 2.1 Versetzungen; die dritte Klasse c, c, c wieder $3.2.1$; die vierte Klasse d, d, d, d verstattet $4.3.2.1$; die fünfte Klasse e, e wieder 2.1; die sechste Klasse f, f, f wieder $3.2.1$; die siebente Klasse g, g, g auch $3.2.1$ Versetzungen. Also alle 7 Klassen zusammen $3.2.1.2.1.3.2.1.4.3.2.1.2.1.3.2.1.3.2.1$, und mit diesem Produkte muß nun die obige Menge der Versetzungen aller einzelnen Dinge dividirt werden, so erhält man die Menge der wirklichen Versetzungen der gegebenen Dinge

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$= 19\,554575\,040000.$

§. 178.

Erklärung.

Was nun die eigentlichen Kombinationen betrifft, so kann man aus einer gegebenen Anzahl Größen entweder immer 2, oder 3,

oder 4 u. s. w. zusammennehmen, und untersuchen, wie oft dies möglich ist. Man pflegt die Kombinationen in weitläuftige, mittlere und strenge einzutheilen, und jede dieser Gattungen kann verschiedene Grade haben, je nachdem man nur eine (erster Grad) oder 2 (zweiter Grad), oder 3 (dritter Grad) u. s. w. immer aus der Menge herausnimmt. Diese verschiedenen Grade nennt man Unionen, Binionen oder Ambyen, Ternionen oder Ternen, Quaternionen oder Quaternen, Quinionen oder Quinen u. s. w.

§. 179.

Erklärung.

Die Kombinationen sind weitläuftig, wenn man jede der gegebenen Größen nicht nur mit den andern, sondern auch mit sich selbst verbinden darf, so daß auch die Ordnung, in der die kombinirten Größen auf einander folgen, eine verschiedene Kombination bildet, z. B. ab und ba wären verschiedene Kombinationen, weil die einzelnen Größen in verschiedener Ordnung neben einander stehen, obgleich sie, als Produkte betrachtet, einerlei sind. Es seien z. B. 3 Größen a, b, c gegeben. Die einfachen Kombinationen erhält man, wenn man jede dieser Größen einzeln für sich schreibt, also a, b, c. Die Menge der einfachen Kombinationen ist also immer der Anzahl der Größen selbst gleich. Es gibt z. B. unter den 90 Nummern des Lotto 90 einfache Auszüge.

Setzt man zu jeder dieser einzelnen Größen jede der gegebenen, also zu jeder a, b und c, so erhält man

aa, ab, ac
ba, bb, bc
ca, cb, cc.

Dies wären also alle mögliche Kombinationen vom zweiten Grade.

Setzt man wieder zu jeder der zweifachen Kombinationen jede der gegebenen Größen, so erhält man alle mögliche dreifache, oder alle Kombinationen vom dritten Grade, nämlich:

aaa, aab, aac	baa, bba, bca	caa, cba, cca
aba, abb, abc	bab, bbb, bcb	cab, cbb, ccb
aca, acb, acc	bac, bbc, bcc	cac, cbc, ccc.

§. 180.

Aufgabe.

Die Menge aller weitläuftigen Kombinationen von jedem Grade aus einer gegebenen Anzahl von Dingen zu finden.

Auflösung und Beweis.

Es seien m Dinge gegeben, so ist, wie wir schon oben gesehen haben, die Anzahl der Kombinationen vom ersten Grade $= m$.

Um die vom zweiten Grade zu finden, wird jede der m Größen zu jeder Kombination vom ersten Grade gesetzt, also ist die Anzahl aller möglichen Verbindungen zu zweien $= m \cdot m = m^2$.

Um die vom dritten Grade zu finden, wird jede der m Größen zu jeder Kombination des zweiten Grades gesetzt, also ist die Anzahl aller Verbindungen vom dritten Grade $= m^2 \cdot m = m^3$.

Eben so ist die Menge aller Kombinationen vom vierten Grade $= m^4$ und folglich allgemein vom nten Grade $= m^n$.

§. 181.

Zusatz.

Diese Art Kombinationen sind zugleich Variationen, denn z. B. die Kombination abc ist nur eine Wiederholung der Kombinationen acb, bac, cab u. s. w.; als Produkte sind alle diese einerlei, nur die einzelnen Faktoren haben andere Stellungen gegen einander, also variiren sie bloß in der Ordnung, wie sie auf einander folgen.

§. 182.

Erklärung.

Mittlere Kombinationen sind solche, bei denen jede Größe nicht nur mit jeder andern, sondern auch mit sich selbst verbunden wird, alle diejenigen Verbindungen aber weggelassen werden, welche sich nur durch die Ordnung der in ihnen enthaltenen Größen von der einen Kombination unterscheiden. Es sind also weitläuftige Kombinationen ohne Variation. Die Eintheilung in Grade ist wieder die nämliche. Die vom ersten Grade enthalten nur eine, die vom zweiten Verbindungen von 2 Größen u. s. w.

Es seien z. B. die 4 Größen a, b, c, d gegeben, so sind die Verbindungen vom ersten Grade $=$ a, b, c, d, also ihre Anzahl $= m$, wenn m Größen gegeben sind.

Die Verbindungen vom zweiten Grade erhält man, wenn man zu jeder der vorigen wieder jede der gegebenen Größen setzt, aber die Verbindungen wegläßt, welche nur durch die Ordnung der in ihnen enthaltenen Größen sich unterscheiden. Sie sind also

aa, ab, ac, ad
bb, bc, bd
cc, cd
dd.

Setzt man zu jeder dieser zweifachen Kombinationen wieder jede der gegebenen Größen und läßt die weg, welche sich nur durch die Ordnung unterscheiden, so erhält man alle mögliche dreifache Kombinationen, nämlich

aaa, aab, aac, aad	bbb, bbc, bbd	ccc, ccd
abb, abc, abd	bcc, bcd	cdd
acc, acd	bdd.	ddd.
add.		

Verbindet man wieder diese dreifachen Kombinationen mit jeder der gegebenen Größen, und läßt die Wiederholungen weg, so erhält man alle mögliche vierfache Kombinationen, nämlich

aaaa, aaab, aaac, aaad	abbb, abbc, abbd	accc, accd	
aabb, aabc, aabd	abcc, abcd	acdd	
aacc, aacd	abdd.	addd.	
aadd.			
bbbb, bbbc, bbbd	bccc, bccd	bccc, bccd	cccc, cccd
bbcc, bbcd	bcdd	bcdd.	ccdd
bbdd.	bddd.		cddd
			dddd.

§. 183.

Aufgabe.

Die Anzahl aller möglichen mittlern Kombinationen zu finden, die in einer gegebenen Anzahl Größen von jedem Grade möglich sind.

Auflösung und Beweis.

Wenn m die Anzahl der Größen bedeutet, so ist, wie schon erwähnt, die Menge der einfachen Kombinationen $= m = \frac{m}{1}$. Um die vom zweiten Grade zu finden, muß man also jede einfache Kombination mit jeder der gegebenen Größen und mit sich selbst verbinden, also wenn die einfachen Kombinationen waren a, b, c, d, welche wir die Reihe Q nennen wollen, und die gegebenen Größen auch a, b, c, d, welche wir die Reihe R nennen wollen, so verbinde man das a der Reihe Q mit a, b, c, d der Reihe R, und dann das a der Reihe Q auch noch mit sich selbst, so erhält man die Kombinationen aa, ab, ac, ad, aa, also aus den 4 Größen 5 Kombinationen zu zweien und folglich bei m Größen $m+1$ Kombinationen der Größe a mit jeder andern und mit sich selbst. Eben so viel Kombinationen gibt nun auch die Größe b, nämlich bb, ba, bc, bd, bb, desgleichen die Größe c und die

Größe d, also auch bei jeder $m+1$ Kombinationen, wenn die Anzahl der Größen $= m$ ist, folglich beträgt die gesammte Anzahl aller zweifachen Kombinationen von m Größen $m(m+1)$. Aber unter diesen kommt jede Kombination zweimal vor, wie man leicht übersieht, wenn man die $m(m+1)$ Kombinationen von 4 Größen hinschreibt, nämlich:

aa, ab, ac, ad, aa
bb, ba, bc, bd, bb
cc, ca, cb, cd, cc
dd, da, db, dc, dd.

Folglich muß man diese $m(m+1)$ Kombinationen noch durch 2 dividiren, wenn man die gesammte Anzahl aller mittlern Kombinationen des zweiten Grades haben will. Diese werden also sein $\frac{m(m+1)}{2}$ oder $\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$. Ist $m = 4$, so ist also die ganze Anzahl $= \frac{4(4+1)}{1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

Die Kombinationen vom dritten Grade ergeben sich, wenn man zu jeder des zweiten Grades jede der gegebenen Größen setzt und dann auch jede der Größen, welche die vorigen Kombinationen selbst enthalten. Man setzt also zu aa erstlich, a, b, c, d und dann noch zu aa das a links und endlich auch noch das a rechts, so erhält man aaa, aab, aac, aad, aaa, aaa, also wenn m Größen gegeben sind $m+2$ Kombinationen zu dreien. Eben so viel gibt die Kombination ab, nämlich aba, abb, abc, abd, aba, abb (letztere beide, wenn man zu ab erstlich das a links noch einmal und dann auch das b rechts noch einmal setzt), also wieder $m+2$ Kombinationen zu dreien. Gerade so mache man es mit ac und ad und den übrigen Kombinationen des zweiten Grades. Daraus ergibt sich denn eine Reihe von Kombinationen, worin jede dreimal vorkommt, nur in veränderter Ordnung der darin enthaltenen Größen, wie folgende Darstellung zeigt.

aaa, aab, aac, aad, aaa, aaa
aba, abb, abc, abd, aba, abb
aca, acb, acc, acd, aca, acc
ada, adb, adc, add, ada, add.

Dies sind die Kombinationen aus der ersten Reihe (§. 182.) der vom zweiten Grade.

Nun folgen die Verbindungen aus der zweiten Reihe bb, bc, bd, nämlich:

bba, bbb, bbc, bbd, bbb, bbb
bca, bcb, bcc, bcd, bcb, bcc
bda, bdb, bdc, bdd, bdb, bdd.

Dann die Verbindungen aus der dritten Reihe cc und cd, nämlich:

cca, ccb, ccc, ccd, ccc, ccc
cda, cdb, cdc, cdd, cdc, cdd.

Endlich die Verbindungen aus der vierten Reihe dd, nämlich:

dda, ddb, ddc; ddd, ddd, ddd.

Es gibt also jede Kombination des zweiten Grades $m+2$ Verbindungen zu dreien, folglich alle $\frac{m \cdot (m+1)}{1 \cdot 2}$ Kombinationen des zweiten Grades $\frac{m \cdot (m+1)}{1 \cdot 2} \cdot (m+2)$ Verbindungen zu dreien, worin aber jede dreimal vorkommt. Man muß also diese Anzahl noch durch 3 dividiren, um die Menge aller mittlern Kombinationen zu dreien ohne Wiederholung zu haben, und dies gibt $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Ist also $m = 4$, so geben 4 Größen $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ mittlere Kombinationen zu dreien.

Man sieht leicht, wie diese Schlüsse immer weiter fortgesetzt werden können. Denn aus den Kombinationen des dritten Grades entstehen die des vierten, wenn man jede Kombination des dritten Grades mit den gegebenen Größen und auch mit den Größen, die sie enthält, verbindet. Dadurch entstehen aus jeder Kombination des dritten Grades $m+3$ Verbindungen zu vieren, und also aus allen $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Verbindungen des dritten Grades $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (m+3)$ neue Kombinationen zu vieren, in deren jeder aber jede Verbindung viermal mit veränderter Ordnung der darin enthaltenen Größen vorkommt. Will man also die reinen mittlern Kombinationen des vierten Grades ohne Wiederholung haben, so muß man obiges Produkt noch durch 4 dividiren. Dies gibt also $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Ist also $m = 4$, so hat man $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ mittlere Kombinationen des vierten Grades.

Die Anzahl der mittlern Kombinationen des fünften Grades wird nun sein $= \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3) \cdot (m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, des sechsten Grades $= \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3) \cdot (m+4) \cdot (m+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$, also im Allgemeinen des nten Grades

$$= \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3) \cdot (m+4) \cdot (m+5) \ldots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots n},$$

denn die Zahl, die jedesmal zu m addirt werden muß, ist immer

um 1 kleiner als die Zahl des Grades, also für den nten Grad = n — 1, die Faktoren im Divisor aber steigen bis n selbst.

§. 184.
Erklärung.

Strenge Kombinationen sind solche, bei denen jede gegebene Größe nicht mit sich selbst, sondern nur mit jeder der folgenden Größen verbunden werden, auch keine Kombination vorkommen darf, die von einer andern nur durch die Ordnung der in ihr enthaltenen Größen verschieden ist. Kombinationen zu 1, 2, 3 u. s. w. Größen heißen auch Kombinationen des ersten, zweiten, dritten Grades u. s. w. Sind z. B. die Größen a, b, c, d gegeben, so erhält man die Kombinationen des ersten Grades, wenn man jede einzeln hinschreibt, also so viel, als Größen sind.

Verbindet man nun jede dieser Kombinationen mit den folgenden Größen, aber nicht mit sich selbst, und vermeidet man auch jede Wiederholung, so erhält man folgende Kombinationen des zweiten Grades:

ab, ac, ad
bc, bd
cd.

Verbindet man nun wieder jede dieser Kombinationen mit den folgenden Größen, aber nicht mit denen, die sie selbst enthält, und vermeidet man jede Wiederholung, so bekommt man folgende Kombinationen des dritten Grades:

abc, abd, acd
bcd.

Verbindet man endlich alle Kombinationen des dritten Grades unter obigen Einschränkungen mit den folgenden Größen, so erhält man aus 4 Größen die einzige Kombination des vierten Grades: abcd.

§. 185.
Aufgabe.

Die Anzahl aller strengen Kombinationen jedes Grades aus einer gegebenen Anzahl Größen zu finden.

Auflösung und Beweis.

Sind m Größen gegeben, so ist die Anzahl aller Kombinationen des ersten Grades $= m = \frac{m}{1}$. (§. 184.)

Um die Anzahl der vom zweiten Grade zu finden, verbinde man jede Kombination des ersten Grades mit den übrigen Größen, aber nicht mit sich selbst, so erhält man

aus der Kombination	a	die Kombinationen	ab,	ac,	ad u. s. w.
= = = = =	b	= = = = =	ba,	bc,	bd = = =
= = = = =	c	= = = = =	ca,	cb,	cd = = =
= = = = =	d	= = = = =	da,	db,	dc = = =
	u. s. w.			u. s. w.	

Man verbindet also jede der m Größen mit jeder der m — 1 übrigen Größen und also muß die Anzahl aller dieser Kombinationen betragen m (m—1). Aber unter diesen kommt jede Kombination zweimal vor, z. B. ab und ba, ac und ca u. s. w.; will man also die wahre Anzahl aller strengen Kombinationen vom zweiten Grade haben, so muß man obiges Produkt noch durch 2 dividiren, und folglich wird diese wahre Anzahl sein $\frac{m.(m-1)}{2} = \frac{m.(m-1)}{1.2}$.

Verbindet man nun wieder jede dieser $\frac{m.(m-1)}{1.2}$ Kombinationen des zweiten Grades nicht mit den Größen, die jede enthält, sondern nur mit den übrigen m — 2 Größen, so erhält man $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ dreifache Kombinationen, nämlich

aus der Kombination	ab	die Kombinationen	abc,	abd u. s. w.	
= = = = =	ac	= = = = =	acb,	acd = = =	
= = = = =	ad	= = = = =	adb,	adc = = =	
= = = = =	bc	= = = = =	bca,	bcd = = =	
= = = = =	bd	= = = = =	bda,	bdc = = =	
= = = = =	cd	= = = = =	cda,	cdb = = =	
	u. s. w.			u. s. w.	

Unter diesen Kombinationen aber muß jede dreimal, nur mit veränderter Ordnung der darin enthaltenen Größen, vorkommen, z. B. abc, acb, bca; will man also die wahre Anzahl der strengen Kombinationen ohne alle Wiederholung haben, so muß man obiges Produkt $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ noch durch 3 dividiren und man bekommt nun $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$.

Diese Schlüsse lassen sich nun so immer weiter fortsetzen. Die $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ dreifachen Kombinationen, werden wieder, wenn man jede mit den m — 3 übrigen Größen verbindet,

$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3}$ vierfache Kombinationen geben, unter denen aber jede viermal, nur mit veränderter Ordnung der darin enthaltenen Größen, vorkommt, also muß man obiges Produkt noch durch 4 dividiren und man wird die wahre Anzahl aller strengen Kombinationen des vierten Grades erhalten

$= \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}$.

Eben so werden die des fünften Grades sein

$= \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{1.2.3.4.5}$

und folglich allgemein die des nten Grades

$= \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)....[m-(n-1)]}{1.2.3.4.5....n}$;

denn die Zahl, die von m im Zähler abgezogen wird, ist immer um 1 kleiner als die Zahl des Grades, also für den nten Grad $= n-1$; die Faktoren im Nenner aber steigen bis zu n selbst.

Es seien 8 Größen a, b, c, d, e, f, g, h gegeben; also $m = 8$, so ist die Anzahl der

Komb. des ersten Grades $= \frac{8}{1} = 8$,

" " zweiten " $= \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$,

" " dritten " $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$,

" " vierten " $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$,

" " fünften " $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$,

" " sechsten " $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 28$,

" " siebenten " $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 8$,

" " achten " $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 1$;

Sobald also die Zahl des Grades der Menge der gegebenen Größen gleich kommt, so ist nur noch eine Kombination möglich, und dadurch ist denn das Ende aller möglichen Kombinationen aus dieser gegebenen Anzahl von Dingen bestimmt.

Ist n eine gerade Zahl, so steigt die Menge der Kombinationen bis zu dem Grade, der $= \frac{n}{2}$ ist und fällt wieder nach demselben Gesetze, wie obiges Beispiel zeigt. Ist n ungerade, so gibt es in der Mitte zwei einander gleiche Glieder, nämlich das $\frac{n-1}{2}$ und das $\frac{n+1}{2}$ und vom letztern an fallen die Glieder wieder nach

demselben Gesetze, wie sie vom ersten an bis $\frac{n-1}{2}$ stiegen. Ist z. B. $n = 9$, so sind die Grade der möglichen Kombinationen folgende: 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1, d. h. es sind 9 vom ersten, 36 vom zweiten, 84 vom dritten, 126 vom vierten, 126 vom fünften, 84 vom sechsten, 36 vom siebenten, 9 vom achten und 1 vom neunten Grade möglich.

§. 186.

Zusatz.

Wenn die Frage ist, wie viel einfache Auszüge, Amben, Ternen, Quaternen, Quinen es unter den 90 Nummern eines Lotto gebe, so wird sie nach den vorigen Sätzen beantwortet. Denn die Frage heißt offenbar: Wie oft lassen sich 90 verschiedene Dinge zu Einem, Zweien, Dreien, Vieren, Fünfen verbinden ohne Wiederholung vermittelst der Variation? Es ist also die Anzahl

der einfachen Auszüge $= \frac{90}{1} = 90,$

der Amben $= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005,$

der Ternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117430,$

der Quaternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190,$

der Quinen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268.$

Wenn ich also im Lotto 2 Nummern mit einander verbunden habe, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß beide herauskommen, zu der, daß sie nicht gezogen werden, wie 1 : 4005. Bei Ternen ist dies Verhältniß wie 1 : 117430, bei Quaternen wie 1 : 2555190, bei Quinen gar wie 1 : 43949268.

Wenn ich im Lotto 5 Nummern besetze und diese zu allen möglichen Unionen, Amben, Ternen u. s. w mit einander verbinden will, so geben obige Sätze auch die Antwort auf meine Frage: wie viel Unionen, Amben u. s. w. sind in 5 Nummern enthalten? Es sind nämlich

die Unionen $= \frac{5}{1} = 5,$

die Amben $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10,$

die Ternen $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10,$

die Quaternen $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5,$

die Quinen $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1.$

§. 187.
Zusatz.

Beim Würfelspiel ist ebenfalls die Lehre von den Kombinationen anwendbar. Jeder Würfel hat 6 Seiten, auf denen die Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 stehen. Die vorhandenen Würfel werden zusammen geworfen, es entstehen also Kombinationen der Zahlen, womit ihre Seiten bezeichnet sind, z. B. bei 3 Würfeln können die Nummern 1, 1, 1; 1, 1, 2; 1, 1, 3; 1, 1, 4; 1, 1, 5; 1, 1, 6; 1, 2, 1; 1, 2, 2; 1, 2, 3 u. s. w. zusammen kommen. Man sieht ferner, daß nicht bloß verschiedene, sondern auch dieselben Nummern mit einander verbunden werden können, daß also hier die Rede von weitläuftigen Kombinationen ist und daß also die Frage nach der Menge derselben in §. 180. seine Beantwortung findet. Es ist nämlich die Frage: wie viel Unionen kann ich bei einem Würfel aus den 6 verschiedenen Nummern werfen? wie viel Amben bei 2 Würfeln? wie viel Ternen bei 3 Würfeln? u. s. w. Es ist also hier $m = 6$ und folglich die Zahl der Unionen $= m = 6$, der Amben $= m^2 = 36$, der Ternen $= m^3 = 216$, der Quaternen $= m^4 = 1296$, der Quinen $= m^5 = 7776$ u. s. w. Dadurch erfährt man also, auf wie viel verschiedene Arten 1, oder 2, oder 3, oder 4, oder 5 Würfel u. s. w. ihre Seiten neben einander legen können.

Eine andere Frage aber ist: wie oft kann eine bestimmte Summe mit einer gegebenen Anzahl Würfel herausgebracht werden, z. B. wie oft ist der Wurf 12 mit 3 Würfeln möglich? Darüber lassen sich folgende Betrachtungen anstellen.

Mit Einem Würfel kann man wenigstens 1, höchstens 6 werfen und jeder dieser Würfe kann nur auf Eine Art geworfen werden.

Mit 2 Würfeln kann man mindestens 2, höchstens 12 werfen und es sind 36 Arten des Wurfs möglich. Wir wollen diese darstellen:

Seiten des ersten Würfels 1, 2, 3, 4, 5, 6
" " zweiten " 1, 2, 3, 4, 5, 6

Kombinationen:	1,1	1,2 2,1	1,3 2,2 3,1	1,4 2,3 3,2 4,1	1,5 2,4 3,3 4,2 5,1	1,6 2,5 3,4 4,3 5,2 6,1	2,6 3,5 4,4 5,3 6,2	3,6 4,5 5,4 6,3	4,6 5,5 6,4	5,6 6,5	6,6
Summen, die geworfen werden können:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Man sieht hieraus, daß 2 und 12 nur auf einerlei, 3 und 11 auf zweierlei, 4 und 10 auf dreierlei, 5 und 9 auf viererlei, 6 und 8 auf fünferlei, 7 auf sechserlei Art geworfen werden können. Die mittlern Würfe 5, 6, 7, 8, 9 können also am öftersten, die äußern am wenigsten vorkommen. Wenn also die erstern für die Nieten, die letztern für die Treffer bestimmt werden, so ist die Wahrscheinlichkeit zu verlieren größer, als die zu gewinnen.

Hat man 3 Würfel, so entstehen Ternen und zwar so, daß mit den vorigen Amben jede Seite des dritten Würfels verbunden werden kann. Die Anzahl der Ternen ist also $36 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

Darstellung.

Die obigen Amben, mit der Seite 1 des dritten Würfels verbunden, gibt folgende Ternen:

1,1,1	1,2,1	1,3,1	1,4,1	1,5,1	1,6,1					
	2,1,1	2,2,1	2,3,1	2,4,1	2,5,1	2,6,1				
		3,1,1	3,2,1	3,3,1	3,4,1	3,5,1	3,6,1			
			4,1,1	4,2,1	4,3,1	4,4,1	4,5,1	4,6,1		
				5,1,1	5,2,1	5,3,1	5,4,1	5,5,1	5,6,1	
					6,1,1	6,2,1	6,3,1	6,4,1	6,5,1	6,6,1
Summen, die geworf. werden können: 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Die obigen Amben, mit der Seite 2 des dritten Würfels verbunden, gibt folgende Ternen:

1,1,2	1,2,2	1,3,2	1,4,2	1,5,2	1,6,2					
	2,1,2	2,2,2	2,3,2	2,4,2	2,5,2	2,6,2				
		3,1,2	3,2,2	3,3,2	3,4,2	3,5,2	3,6,2			
			4,1,2	4,2,2	4,3,2	4,4,2	4,5,2	4,6,2		
				5,1,2	5,2,2	5,3,2	5,4,2	5,5,2	5,6,2	
					6,1,2	6,2,2	6,3,2	6,4,2	6,5,2	6,6,2
Summen, die geworf. werden können: 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Die obigen Amben, mit der Seite 3 des dritten Würfels verbunden, gibt folgende Ternen:

1,1,3	1,2,3	1,3,3	1,4,3	1,5,3	1,6,3					
	2,1,3	2,2,3	2,3,3	2,4,3	2,5,3	2,6,3				
		3,1,3	3,2,3	3,3,3	3,4,3	3,5,3	3,6,3			
			4,1,3	4,2,3	4,3,3	4,4,3	4,5,3	4,6,3		
				5,1,3	5,2,3	5,3,3	5,4,3	5,5,3	5,6,3	
					6,1,3	6,2,3	6,3,3	6,4,3	6,5,3	6,6,3
Summen, die geworf. werden können: 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Die obigen Amben, mit der Seite 4 des dritten Würfels verbunden, gibt folgende Ternen:

1,1,4	1,2,4	1,3,4	1,4,4	1,5,4	1,6,4					
	2,1,4	2,2,4	2,3,4	2,4,4	2,5,4	2,6,4				
		3,1,4	3,2,4	3,3,4	3,4,4	3,5,4	3,6,4			
			4,1,4	4,2,4	4,3,4	4,4,4	4,5,4	4,6,4		
				5,1,4	5,2,4	5,3,4	5,4,4	5,5,4	5,6,4	
					6,1,4	6,2,4	6,3,4	6,4,4	6,5,4	6,6,4

Summen, die geworf. werden können:	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Die obigen Amben, mit der Seite 5 des dritten Würfels verbunden, gibt folgende Ternen:

1,1,5	1,2,5	1,3,5	1,4,5	1,5,5	1,6,5					
	2,1,5	2,2,5	2,3,5	2,4,5	2,5,5	2,6,5				
		3,1,5	3,2,5	3,3,5	3,4,5	3,5,5	3,6,5			
			4,1,5	4,2,5	4,3,5	4,4,5	4,5,5	4,6,5		
				5,1,5	5,2,5	5,3,5	5,4,5	5,5,5	5,6,5	
					6,1,5	6,2,5	6,3,5	6,4,5	6,5,5	6,6,5

Summen, die geworf. werden können:	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Endlich die obigen Amben, mit der Seite 6 des dritten Würfels verbunden, gibt folgende Ternen:

1,1,6	1,2,6	1,3,6	1,4,6	1,5,6	1,6,6					
	2,1,6	2,2,6	2,3,6	2,4,6	2,5,6	2,6,6				
		3,1,6	3,2,6	3,3,6	3,4,6	3,5,6	3,6,6			
			4,1,6	4,2,6	4,3,6	4,4,6	4,5,6	4,6,6		
				5,1,6	5,2,6	5,3,6	5,4,6	5,5,6	5,6,6	
					6,1,6	6,2,6	6,3,6	6,4,6	6,5,6	6,6,6

Summen, die geworf. werden können:	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Wir wollen die aufgeführten 6 Klassen von Ternen nach der Ordnung der Buchstaben mit A, B, C, D, E, F benennen, so ergibt sich:

Die Summe 3 kann nur einmal geworfen werden, sie kommt nur in der Klasse A vor.

Die Summe 4 kann in der Klasse A auf zweierlei und in der Klasse B auf einerlei Art geworfen werden, in den folgenden Klassen kommt sie aber gar nicht mehr vor. Also sind für die Summe 4 nur 3 Würfe möglich.

Die Summe 5 kann in der Klasse A auf dreierlei, in B auf zweierlei, in C auf einerlei Art geworfen werden, also zusammen auf sechserlei Art.

Die Summe 6 in A auf viererlei, in B auf dreierlei, in C auf zweierlei, in D auf einerlei, also zusammen auf zehnerlei Art.

Die Summe 7 in A auf 5, in B auf 4, in C auf 3, in D auf 2, in E auf 1, also zusammen auf 15 Arten.

Die Summe 8 in A auf 6, in B auf 5, in C auf 4, in D auf 3, in E auf 2, in F auf 1, also zusammen auf 21 Arten.

Die Summe 9 in A auf 5, in B auf 6, in C auf 5, in D auf 4, in E auf 3, in F auf 2, also zusammen auf 25 Arten.

Die Summe 10 in A auf 4, in B auf 5, in C auf 6, in D auf 5, in E auf 4, in F auf 3, also zusammen auf 27 Arten.

Die Summe 11 in A auf 3, in B auf 4, in C auf 5, in D auf 6, in E auf 5, in F auf 4, also zusammen auf 27 Arten.

Die Summe 12 in A auf 2, in B auf 3, in C auf 4, in D auf 5, in E auf 6, in F auf 5, also zusammen auf 25 Arten.

Die Summe 13 in A auf 1, in B auf 2, in C auf 3, in D auf 4, in E auf 5, in F auf 6, also zusammen auf 21 Arten.

Die Summe 14 in B auf 1, in C auf 2, in D auf 3, in E auf 4, in F auf 5, also zusammen auf 15 Arten.

Die Summe 15 in C auf 1, in D auf 2, in E auf 3, in F auf 4, also zusammen auf 10 Arten.

Die Summe 16 in D auf 1, in E auf 2, in F auf 3, also zusammen auf 6 Arten.

Die Summe 17 in E auf 1 und in F auf 2, also zusammen auf 3 Arten.

Die Summe 18 bloß in F auf 1 Art.

Die mittlern Würfe von 7 bis 15 können also wieder am öftersten, die äußern von 3 bis 6 und 16 bis 18 am seltensten vorkommen.

Mit 4 Würfeln kann man Quaternen werfen und ihre Anzahl ist $= 6^4 = 1296$. Um sie darzustellen, müßte man wieder

wieder jede Seite des vierten Würfels mit jeder der obigen 216 Ternen verbinden, welche Arbeit schon sehr weitläuftig werden würde. Noch mühsamer wäre die Darstellung der Quinen aus 5, der Sexionen aus 6 Würfeln u. s. w., deren Anzahl $6^5 = 7776$ und $6^6 = 46656$ u. s. w. wäre. Da es aber nur darauf ankommt, zu wissen, wie oft eine gewisse Summe mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. Würfeln geworfen werden kann, so läßt sich vielleicht ein Gesetz dafür entdecken, ohne daß man nöthig hat, alle mögliche Kombinationen hinzusetzen.

§. 188.

Zusatz.

Vergleicht man nämlich die obigen Darstellungen mit einander, so ergibt sich:

I. Mit Einem Würfel kann man die Unionen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werfen und zwar jede nur auf Eine Art.

Durch 2 Würfel entstehen die Ambenwürfe: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Durch 3 Würfel die Ternenwürfe: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Durch 4 Würfel die Quaternenwürfe: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Durch 5 Würfel die Quinenwürfe: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Durch m Würfel also die Mionenwürfe: m, $m+1$, $m+2$ .... $m+m$ oder $2m$, $2m+1$, $2m+2$ .... $2m+m$ oder $3m$, $3m+1$, $3m+2$ .... $3m+m$ oder $4m$, $4m+1$, $4m+2$ .... $4m+m$ oder $5m$, $5m+1$, $5m+2$ .... $5m+m$ oder $6m$.

II. Die Zahl, auf wie vielerlei Art jeder Wurf geworfen werden kann, läßt sich so finden.

Schreibt man die Reihe, welche die Menge der Unionen angibt, sechsmal unter einander, so daß man bei jeder Reihe eine Stelle nach der rechten Hand fortrückt, und addirt nun die unter einander stehenden Ziffern, so erhält man die Menge der Amben, welche anzeigt, auf wie vielerlei Art jeder Wurf geschehen kann.

Unionen: 1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1

Amben: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Macht man es mit dieser Reihe von Amben eben so, wie mit der Reihe der Unionen, so erhält man die Reihe der Ternen, auf wie vielerlei Art nämlich jede mit 3 Würfeln mögliche Summe geworfen werden kann.

Amben: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1
1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1
1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1
1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1
1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1
1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1

Ternen: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1.

Mit diesen Ternen es eben so gemacht, wie mit den Amben und Unionen, kommt die Reihe der Quaternen.

Ternen: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1
1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1
1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1
1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1
1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1
1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1

Quatern.: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 80, 104, 125, 140, 146, 140, 125, 104, 80, 56, 35, 20, 10, 4, 1

Eben so würde man auch aus der Reihe der Quaternen die Reihe der Quinen finden u. s. w. Um aber dieses spezielle Untereinanderschreiben und Addiren der Amben, Ternen u. s. w. nicht nöthig zu haben, überlege man folgendes:

Die Vertikalreihen in den angegebenen Beispielen bestehen immer jede nächstfolgende aus der vorhergehenden, so daß aber die folgende eine Stelle tiefer zu stehen kommt und dafür oben durch das nächstfolgende Glied der Horizontalreihe der Unionen, Amben, Ternen u. s. w. sich ergänzt. Besteht nun die vorhergehende Reihe schon aus 6 Gliedern, so verliert die folgende das unterste Glied derselben und ergänzt sich oben aus dem oder den Gliedern, die unmittelbar dem höchsten vorangehen.

So z. B. in den Reihen der Amben, woraus die Ternen entstehen, besteht die vierte Vertikalreihe 4, 3, 2, 1 aus der

dritten Vertikalreihe 3, 2, 1, die um eine Stelle tiefer gerückt ist, und ergänzt sich oben durch die in der Horizontalreihe der Amben rechts von der 3 folgende 4. Eben so ist es mit der fünften und sechsten Vertikalreihe. Die siebente Vertikalreihe besteht aber aus der sechsten, nachdem sie die unterste Ziffer 1 verloren hat, und ergänzt sich oben aus der der höchsten Ziffer 6 unmittelbar vorhergehenden 5. Die folgende achte Vertikalreihe besteht aus der siebenten, die unten 2 Stellen verliert und sich oben durch die zwei vorhergehenden Ziffern 5 und 4 ergänzt. So ist es auch bei der neunten, zehnten und elften Reihe. Die zwölfte Reihe verliert unten die 6 der elften, ergänzt sich oben durch 4, 3, 2, 1, und da nun keine Glieder mehr da sind, welche der 1 vorangehen, so muß das oberste Glied fehlen. Aus demselben Grunde fehlen bei der dreizehnten Reihe oben 2, bei der vierzehnten 3, bei der funfzehnten 4 und bei der sechzehnten 5 Glieder, womit denn das Ganze geschlossen ist. Hieraus wird nun folgende Regel klar werden, die wir an dem Beispiele für die Quaternen erläutern wollen. Nehmen wir z. B. die achte Quaterne 104, so entsteht diese aus der Addition der Zahlen: 27, 25, 21, 15, 10, 6. In diesen Zahlen sind aus der Horizontalreihe der Ternen die Glieder: 25, 21, 15, 10, 6 enthalten, es fehlt aber das Glied 3 der vorhergehenden Vertikalreihe und dagegen ist aus der Horizontalreihe der Ternen das rechts von 25 stehende Glied 27 dazu gekommen. Also besteht 104 aus $25+21+15+10+6+3-3+27$, oder aus $80-3+27$. Eben so ist nun auch $125 = 104-6+27$, $140 = 125-10+21$. Im Allgemeinen also findet man in der Reihe der Quaternen jedes Glied, wenn man vom nächst vorhergehenden das sechste vorhergehende Glied der Ternen abzieht und dann die rechts zunächst folgende Terne wieder addirt.

Verfertigt man sich nun eine Tabelle aller Unionen, Amben, Ternen u. s. w. für jeden mit einer gegebenen Anzahl Würfel möglichen Wurf, so erhält man eine Übersicht, wie oft jeder Wurf vorkommen kann. Wir wollen eine solche Tabelle ansetzen, in der die erste Kolumne die Summen enthält, die man mit einer gewissen Anzahl Würfel werfen kann, die folgenden Kolumnen aber, mit I., II., III. u. s. w. bezeichnet, die Unionen, Amben, Ternen u. s. w. ausdrücken, die aus der gegebenen Anzahl Würfel entstehen können und welche also zeigen, wie oft dieser oder jener Wurf möglich ist. Was vorhin horizontale Reihen waren, werden jetzt vertikale.

Summen eines Wurfs:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
1	1	—	—	—	—	—	—
2	1	1	—	—	—	—	—
3	1	2	1	—	—	—	—
4	1	3	3	1	—	—	—
5	1	4	6	4	1	—	—
6	1	5	10	10	5	1	—
7	—	6	15	20	15	6	1
8	—	5	21	35	35	21	7
9	—	4	25	56	70	56	28
10	—	3	27	80	126	126	84
11	—	2	27	104	205	252	210
12	—	1	25	125	305	456	462
13	—	—	21	140	420	756	917
14	—	—	15	146	540	1161	1667
15	—	—	10	140	651	1666	2807
16	—	—	6	125	735	2247	4417
17	—	—	3	104	780	2856	6538
18	—	—	1	80	780	3431	9142
19	—	—	—	56	735	3906	12117
20	—	—	—	35	651	4221	15267
21	—	—	—	20	540	4332	18327
22	—	—	—	10	420	4221	20993
23	—	—	—	4	305	3906	22967
24	—	—	—	1	205	3431	24017
25	—	—	—	—	126	2856	24017
26	—	—	—	—	70	2247	22967
27	—	—	—	—	35	1666	20993
28	—	—	—	—	15	1161	18327
29	—	—	—	—	5	756	15267
30	—	—	—	—	1	456	12117
31	—	—	—	—	—	252	9142
32	—	—	—	—	—	126	6538
33	—	—	—	—	—	56	4417
34	—	—	—	—	—	21	2807
35	—	—	—	—	—	6	1667
36	—	—	—	—	—	1	917
37	—	—	—	—	—	—	462
38	—	—	—	—	—	—	210
39	—	—	—	—	—	—	84
40	—	—	—	—	—	—	28
41	—	—	—	—	—	—	7
42	—	—	—	—	—	—	1

Diese Tabelle, die man leicht für 8, 9 und mehr Würfel fortsetzen kann, ist nach der oben angegebenen Methode verfertigt. In der Kolumne V. ist z. B. das Glied 735 entstanden, indem man das nächst darüberstehende derselben Kolumne, nämlich 651, mit dem links in derselben Linie stehenden Gliede 140 der Kolumne IV. zusammen addirte und das Glied 56 dieser letztern Kolumne, weil es von dem über 140 stehenden Gliede 146 an gerechnet das sechste aufwärts gezählt ist, abgezogen hat. Eben so entsteht in der Kolumne VI. das Glied 756, indem man 456 aus VI. mit 305 aus V. addirt und 5 als das sechste derselben Kolumne, von 205 an aufwärts, von der Summe abzieht. Wenn beim Aufwärtszählen kein sechstes Glied gefunden wird, so hat man auch nichts abzuziehen, z. B. in der Kolumne VII. entsteht 84 aus der Addition von 28 und 56 und es braucht nichts abgezogen zu werden, weil in Kolumne VI. das sechste Glied von 21 an = 0 ist.

Soll z. B. etwas ausgewürfelt werden, z. E. mit 6 Würfeln, so werden die Würfe von 6 bis 10 und von 32 bis 36 am seltensten, die aber von 11 bis 31 am öftersten vorkommen und zwar desto öfter, je mehr sie in die Mitte zwischen 11 und 31 fallen. Setzt man also nur die erstern als Treffer, die letztern als Nieten an, so kann man leicht die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes beurtheilen. Ist z. B. 8 ein Treffer und 20 eine Niete, so sind mit 6 Würfeln nur 21 Würfe möglich, von denen jeder 8 sein kann, dagegen aber 4221 Würfe, von denen jeder 20 sein kann; folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit, 8 zu würfeln, zu der, 20 zu würfeln, wie 21 zu 4221, oder wie 1 zu 201. Die Wahrscheinlichkeit zu verlieren ist also 200 mal größer, als die zu gewinnen.

Sechstes Kapitel.

Einiges über figurirte Zahlen.

§. 189.

Erklärung.

Unter figurirten (figürlichen) Zahlen versteht man Reihen von Zahlen, von denen jede folgende durch Addition der Glieder

der vorhergehenden Reihe entsteht, die erste aber lauter gleiche Zahlen enthält. Je nachdem diese erste Reihe aus lauter 1, oder lauter 2 u. s. w. besteht, ergibt sich daraus das erste, zweite u. s. w. System der figurirten Zahlen. Der Ausdruck: figurirte Zahlen, kommt daher, weil sich aus den Gliedern mancher Reihen, wenn man sie durch Punkte ausdrückt, geometrische Figuren, sowol ebene, als körperliche, bilden lassen, z. B. Dreiecke, Quadrate, Fünfecke, Pyramiden u. s. w. Man braucht daher auch die Ausdrücke vieleckichte und Polygonalzahlen.

Folgendes sind Schemata für einige Klassen von figurirten Zahlen, deren jede wieder in einzelne Reihen oder Ordnungen zerfällt, die wir mit I., II., III. u. s. w. bezeichnen wollen. Voran steht eine Kolumne, welche die Zahl eines jeden Gliedes in jeder Ordnung angibt.

Erstes System.

Nummer:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Zweites System.

Nummer:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	
1	2	1									
2	2	3	1								
3	2	5	4	1							
4	2	7	9	5	1						
5	2	9	16	14	6	1					
6	2	11	25	30	20	7	1				
7	2	13	36	55	50	27	8	1			
8	2	15	49	91	105	77	35	9	1		
9	2	17	64	140	196	182	112	44	10	1	
10	2	19	81	204	336	378	294	156	54	11	1

Drittes System.

Nummer:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	3	1								
2	3	4	1							
3	3	7	5	1						
4	3	10	12	6	1					
5	3	13	22	18	7	1				
6	3	16	35	40	25	8	1			
7	3	19	51	75	65	33	9	1		
8	3	22	70	126	140	98	42	10	1	
9	3	25	92	196	266	238	140	52	11	1
10	3	28	117	288	462	504	378	192	63	12	1

Viertes System.

Nummer:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	4	1								
2	4	5	1							
3	4	9	6	1						
4	4	13	15	7	1					
5	4	17	28	22	8	1				
6	4	21	45	50	30	9	1			
7	4	25	66	95	80	39	10	1		
8	4	29	91	161	175	119	49	11	1	
9	4	33	120	252	336	294	268	60	12	1
10	4	37	153	372	588	630	562	328	72	13	1

§. 190.

Zusatz.

Wenn man die verschiedenen Zahlenreihen in diesen Systemen betrachtet, so ergeben sich folgende Resultate:

1) Die Reihe I. enthält in jedem Systeme lauter gleiche Zahlen.

2) Die Reihe II. ist allemal eine arithmetische Progression, deren Differenz die Reihe I. ist.

3) Die Reihe III. enthält Glieder, deren Differenzen die Glieder der Reihe II. sind, und so sind auch bei jeder folgenden Reihe die Glieder der nächst vorhergehenden allemal die Differenzen. Hierbei bemerken wir noch: Solche Reihen von Zahlen, die immer gleiche Unterschiede haben, wie z. B. arithmetische Progressionen, heißen Reihen der ersten Ordnung und man sagt, ihre ersten Unterschiede seien beständig. Solche

Reihen, bei denen nicht die ersten Unterschiede, sondern die Unterschiede dieser Unterschiede, d. h. die zweiten Unterschiede beständig, oder immer dieselben sind, heißen Reihen der zweiten Ordnung, wie z. B. im ersten Systeme die Reihe III.: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 u. s. w., wo die ersten Unterschiede die Reihe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; diese aber die zweiten Unterschiede: 1, 1, 1, 1 u. s. w. geben. Eben so im zweiten Systeme die Reihe III.: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, welche als erste Unterschiede die Reihe: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 gibt, deren beständige Unterschiede = 2 sind. Reihen der dritten Ordnung sind nun solche, wo die dritten Unterschiede beständig werden, wie z. B. im vierten Systeme die Reihe IV.: 1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372. Die ersten Unterschiede sind nämlich: 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120; die zweiten Unterschiede, oder die Differenzen der ersten Unterschiede, sind: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, und die dritten Unterschiede oder die Differenzen der zweiten Unterschiede, beständig = 4. Also im Allgemeinen, Reihen, wo erst die nten Unterschiede beständig werden, heißen Reihen der nten Ordnung, und diese beständigen Unterschiede zeigt in jedem Systeme allemal die Reihe I. an.

4) Man stelle sich die Einheiten eines jeden Gliedes in den verschiedenen Reihen der Systeme als Punkte vor, so lassen sich die Glieder von mehrern dieser Reihen, aber nicht von allen, als geometrische Figuren darstellen, z. B. die Reihe II. im ersten Systeme gibt die gerade Linie:

Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7	u. s. w.
Figuren	•	:	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	u. s. w.

Die Reihe III. gibt gleichseitige Dreiecke:

Glieder	1,	3,	6,	10,	15,	21	u. s. w.
Figuren	•	∴	⁘	⁙			

Man nennt daher diese Zahlen Trigonal- oder Triangularzahlen (Dreieckszahlen).

Die Reihe IV. gibt die Menge pyramidenförmig aufgeschichteter Kugeln an, nämlich in Form dreieckichter gleichseitiger Pyramiden, daher sie dreieckichte Pyramidalzahlen heißen. Man denke sich z. B. aus Reihe III. das gleichseitige

Dreieck für 10, wo jede Seite 4 Punkte hat, aus 10 Kugeln gebildet, die sich berühren; über denselben gehen in die Zwischenräume wieder 6 Kugeln, welche das gleichseitige Dreieck für 6 bilden, über deren Zwischenräume wieder 3 Kugeln, welche das gleichseitige Dreieck für 3 bilden und in deren obern Zwischenraum 1 Kugel, also zusammen 20.

Im zweiten Systeme enthält die Reihe II. alle ungerade Zahlen und die Reihe III. gibt alle Quadratzahlen, welche sich so durch Punkte darstellen lassen:

Glieder	1,	4,	9,	16,	25,	36	u. s. w.
Figuren	•	::	:::	::::	:::::	::::::	
			:::	::::	:::::	::::::	
				::::	:::::	::::::	
					:::::	::::::	
						::::::	

Die Reihe IV. gibt die viereckichten Pyramidalzahlen, z. B. ein Haufe Kugeln, der als vierseitige und gleichseitige Pyramide aufgeschichtet ist. Man denke sich z. B. aus Reihe III. das Quadrat 36, aus 36 Kugeln, die sich berühren, zusammengesetzt. Auf die Zwischenräume dieser Kugeln paßt das Quadrat 25, auf dieses 16, auf dieses 9, auf dieses 4, auf dieses 1. Die Summe aller dieser Kugeln ist also $1+4+9+16+25+36 = 91$ und dieses ist das sechste Glied in Reihe IV., dessen Nummer also anzeigt, wie viel Schichten Kugeln über einander liegen und wie viel eine Seite der untern Grundfläche enthält.

§. 191.

Aufgabe.

Die Summe der Glieder in irgend einer Reihe figurirter Zahlen irgend eines Systems zu finden.

Auflösung und Beweis.

Wir betrachten zuerst das erste System, wo die beständigen Unterschiede in Reihe I. immer $= 1$ sind. Die Summe dieser ersten Reihe in jedem Systeme, da die Glieder sich immer gleich bleiben, wird gefunden, wenn man das erste Glied mit der Zahl der Glieder multiplizirt. Ist also das erste Glied $= d$ und die Zahl der Glieder $= n$, so ist die Summe der ersten Reihe überhaupt $= nd$ und also im ersten Systeme, wo $d = 1$ ist, $= n \cdot 1 = n$, wofür man auch schreiben kann $\frac{n}{1}$.

Die Reihe II. ist eine arithmetische Progression, deren erstes Glied, so wie die Differenz, = 1 ist. Nach §. 161. ist also jedes Glied $= a + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot 1 = 1 + n - 1 = n$, d. h. der Nummer des Gliedes selbst gleich. Die Summe der Reihe aber wird aus der Formel $S = an + \frac{n(n-1)d}{2}$ gefunden $= 1 \cdot n + \frac{n(n-1) \cdot 1}{2} = n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$. Ist z. B. $n = 10$, so wäre die Summe der ersten 10 Glieder $= \frac{10(10+1)}{1 \cdot 2} = \frac{110}{2} = 55$.

In Reihe III. ist jedes Glied gleich der Summe der in Reihe II. vorangehenden Glieder, also das zweite Glied gleich der Summe der 2 vorhergehenden, das dritte Glied gleich der Summe der 3 vorhergehenden und folglich überhaupt das nte Glied gleich der Summe der n vorhergehenden Glieder in Reihe II. Die Summe von n Gliedern in Reihe II. war aber $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$. Dieser Summe ist also jedes Glied in Reihe III. gleich, nur daß n immer andere und andere Bedeutungen bekommt. Für das erste Glied ist $n = 1$, also dasselbe $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$. Diese Summirung läßt sich auch so ausdrücken. Anstatt $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ könnte man schreiben $\frac{n(n+1-1+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+2-1)}{1 \cdot 2}$. Da nun $n = 1$ ist, so kann man statt -1 auch $-n$ setzen, so erhält man $\frac{n(n+2-n)}{1 \cdot 2}$ und schreibt man nun statt des gemeinschaftlichen Faktors n den Werth desselben $= 1$, so erhält man für das erste Glied die Form $\frac{1 \cdot (n+2-n)}{1 \cdot 2}$. Dieser Werth besteht aus 2 Theilen, einem positiven $\frac{1 \cdot (n+2)}{1 \cdot 2}$ und einem negativen $-\frac{1 \cdot n}{1 \cdot 2}$; also kann man den Werth des ersten Gliedes ausdrücken $\frac{1 \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{1 \cdot n}{1 \cdot 2}$ und auch den Werth in Zahlen selbst setzen $= \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$.

Das zweite Glied 3 ist auch $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, aber n ist $= 2$. Dafür schreibe man $\frac{n(n+1-2+2)}{1 \cdot 2}$ und setze im Zähler wieder $-n$ statt -2, so kommt $\frac{n(n+1-n+2)}{1 \cdot 2}$; dies ist

wieder einerlei mit $\frac{n(n+2-n+1)}{1 \cdot 2}$ und schreibt man nun statt des gemeinschaftlichen Faktors n seinen Werth 2, so kommt $\frac{2(n+2-n+1)}{1 \cdot 2}$. Dieser Werth besteht wieder aus einem positiven Theile $\frac{2(n+2)}{1 \cdot 2}$ und aus einem negativen $-\frac{2(n-1)}{1 \cdot 2}$.*) Folglich kann man den ganzen Werth ausdrücken durch $\frac{2(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{2(n-1)}{1 \cdot 2}$. Den Werth dieses Gliedes in Zahlen aber kann man ausdrücken durch $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}$.

Das dritte Glied $6 = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2}$ ist auch $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, aber $n = 3$. Man mache nun wieder ähnliche Verwandlungen, wie vorher, die wir jetzt nur kurz ohne beigeschriebene Erläuterung ausdrücken wollen. Es ist nämlich $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1-3+3)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1-3+2+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+2-3+1+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+2-3+2)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+2-n+2)}{1 \cdot 2}$. Nun theile man wieder diesen Bruch in seinen positiven und negativen Theil, so kommt $\frac{n(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-2)}{1 \cdot 2}$ und setze statt des gemeinschaftlichen Faktors n seinen Werth $= 3$, so ist der Werth des dritten Gliedes $= \frac{3(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{3(n-2)}{1 \cdot 2}$.

Das vierte Glied $10 = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{2}$ ist auch $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, aber $n = 4$. Also kann man dafür setzen $\frac{n(n+1-4+4)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1-4+2+2)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+2-4+2+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+2-4+3)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+2-n+3)}{1 \cdot 2} = \frac{4(n+2-n+3)}{1 \cdot 2} = \frac{4(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{4(n-3)}{1 \cdot 2}$.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man das fünfte Glied $= \frac{5(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{5(n-4)}{1 \cdot 2}$; das sechste $= \frac{6(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{6(n-5)}{1 \cdot 2}$ u. s. w. Das $(n-1)$te oder vorletzte Glied wird also sein $= \frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)2}{1 \cdot 2}$. Der Ausdruck für diesen

*) Indem nämlich $-n+1$ mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizirt und das Produkt als Subtrahendus betrachtet wird, so muß man die Addition in Subtraktion, d. h. die Zeichen verwandeln und statt $-n+1$ schreiben $n-1$.

negativen Theil ergibt sich so. Es ist eigentlich derselbe $= -\frac{(n-1)[n-(n-2)]}{1 \cdot 2} = -\frac{(n-1)(n-n+2)}{1 \cdot 2}$ $= -\frac{(n-1)2}{1 \cdot 2}$.

Das nte Glied wäre $= \frac{n(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{n \cdot 1}{1 \cdot 2}$. Der negative Theil wäre nämlich eigentlich $= -\frac{n[n-(n-1)]}{1 \cdot 2}$ $= -\frac{n(n-n+1)}{1 \cdot 2} = -\frac{n \cdot 1}{1 \cdot 2}$.

Endlich suche man auch noch den Werth des $(n+1)$ten Gliedes, d. h. des über das letzte hinausgehenden Gliedes, so ist dieses $= \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$; denn es wäre eigentlich $= \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{(n+1)(n-n)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{(n+1) \cdot 0}{1 \cdot 2}$ $= \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$, weil der negative Theil ganz $= 0$ wird, da ein Faktor desselben, nämlich $n-n$, $= 0$ geworden ist.

Hieraus läßt sich nun für die Glieder der Reihe III. folgende Tabelle verfertigen.

Nummer des Gliedes:	Glieder in Zahlen:	Allgemeine Formel:
1	$\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$	$\frac{1 \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{1 \cdot n}{1 \cdot 2}$
2	$\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}$	$\frac{2 \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{2(n-1)}{1 \cdot 2}$
3	$\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}$	$\frac{3 \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{3(n-2)}{1 \cdot 2}$
4	$\frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}$	$\frac{4 \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{4(n-3)}{1 \cdot 2}$
5	$\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$	$\frac{5 \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{5(n-4)}{1 \cdot 2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$n-1$	$\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$	$\frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)2}{1 \cdot 2}$
n	$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$	$\frac{n(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{n \cdot 1}{1 \cdot 2}$
$n+1$	$\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$

Um nun leichter zu übersehen, wie in dieser Tabelle die Glieder in Reihe III. summirt werden, wollen wir die Kolumne, welche Glieder in Zahlen überschrieben ist, mit A und in der Kolumne für die allgemeine Formel die Reihe der positiven Brüche linker Hand mit B und die Reihe der negativen Brüche rechts mit C bezeichnen. Dann ergibt sich folgende Übersicht.

Die Reihe A enthält die Glieder der Reihe III. in Zahlen bis auf das $(n+1)$te Glied. Ihre Summe bis zum nten Gliede soll eben gesucht werden. Offenbar ist nun die Summe der Reihe A gleich der Summe der Reihe B weniger der Summe der Reihe C, also $\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} \ldots + \frac{(n-1)\,n}{1\cdot 2}$ $+ \frac{n\,(n+1)}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2} = B - C.$

Die Reihe B hat durchgängig den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{n+2}{1\cdot 2}$ und die ungleichen Faktoren sind $1, 2, 3, 4, 5 \ldots (n-1), n, (n+1)$. Also ist ihre Summe $= \frac{n+2}{1\cdot 2}$ $[1+2+3+4+5 \ldots + (n-1) + n + (n+1)]$. Die in der Klammer befindlichen Glieder bilden eine arithmetische Progression, deren erstes Glied $= 1$, die Differenz $= 1$ und die Zahl der Glieder $n+1$ ist. Ihre Summirung wird also durch die Formel $\frac{n\,(n+1)}{1\cdot 2}$ bestimmt, nur daß $n+1$ statt n geschrieben werden muß. Folglich ist die Summe derselben $= \frac{(n+1)\,(n+1+1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2}$. Diese Summe nun mit dem gemeinschaftlichen Faktor $\frac{n+2}{1\cdot 2}$ multiplizirt, gibt die Summe der Reihe $B = \frac{n+2}{1\cdot 2} \cdot \frac{(n+1)\,.\,(n+2)}{1\cdot 2}$.

Die Reihe C enthält lauter negative Glieder, welche sämmtlich den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{1\cdot 2}$ haben. Ihre Summe ist also $= -\frac{1}{1\cdot 2}[1\,.\,n + 2\,(n-1) + 3\,(n-2) \ldots + (n-1)\,2 + (n-1)]$.

Die in der Klammer befindlichen Glieder lassen sich auf folgende Art entwickeln.

Man nehme erstlich das Glied $1\,.\,n$ oder n, dann von $2\,(n-1)$ die Hälfte oder $1\,.\,(n-1) = n-1$, von $3\,(n-2)$ das Drittel oder $1\,(n-2) = n-2$, von $4\,(n-3)$ das Viertel oder $1\,(n-3) = n-3$ u. s. w., so entsteht daraus die Reihe:

$n, n-1, n-2, n-3 \ldots\ldots 3, 2, 1.$

Von $2(n-1)$ ist noch da $1(n-1)$ oder $n-1$; von $3(n-2)$ noch $2(n-2)$, davon nehme man wieder die Hälfte oder $1(n-2) = n-2$; von $4(n-3)$ ist noch da $3(n-3)$, davon nehme man das Drittel, oder $1(n-3) = n-3$ u. s. w., so entsteht die Reihe:

$$n-1,\ n-2,\ n-3 \ldots\ldots 3,\ 2,\ 1.$$

Von $3(n-2)$ ist noch da $1(n-2) = n-2$; von $4(n-3)$ ist noch da $2(n-3)$, davon nehme man wieder die Hälfte oder $1(n-3) = n-3$; von $5(n-4)$ ist noch da $3(n-4)$, davon nehme man ein Drittel oder $1(n-4) = n-4$ u. s. w., so entsteht die Reihe:

$$n-2,\ n-3,\ n-4 \ldots\ldots 3,\ 2,\ 1.$$

Wenn man nun so in Entwickelung der Glieder fortfährt, so kommt man endlich auf die Reihen 3, 2, 1; 2, 1; 1, und es ist nun

$$n+2(n-1)+3(n-2)\ldots\ldots+(n-1)2+n+1$$

$$= \begin{cases} n+(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots\ldots+3+2+1 \\ \quad +(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots\ldots+3+2+1 \\ \quad\quad +(n-2)+(n-3)\ldots\ldots+3+2+1 \\ \quad\quad\quad +(n-3)\ldots\ldots+3+2+1 \\ \quad\quad\quad\

und die Summe der fünften Reihe $= \frac{(n-4)(n-3)}{1 \cdot 2}$ u. s. w., worauf denn endlich die $(n-2)$te Reihe, d. h. die dritte vom Ende zur Summe $\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ und die $(n-1)$te oder zweite vom Ende zur Summe $\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ und endlich die nte zur Summe $\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$ gibt.

Die ganze negative Reihe C ist also

$$= -\frac{1}{1 \cdot 2}\left[\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} + \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2} \cdots\cdots + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}\right].$$

Nun war $A = B - C$.

Läßt man von der Reihe A das $(n+1)$te Glied weg, so ist die Summe der Glieder vom nten bis zum ersten, also von unten nach oben geordnet,

$$= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} + \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2} + \cdots\cdots + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}.$$

Diese Summe ist aber ganz einerlei mit der Summe der bei der Reihe C in Klammern eingeschlossenen Glieder. Wir wollen nun die Summe der Reihe A vom ersten bis zum nten Gliede und die ihr gleiche Summe aus der Reihe C durch S bezeichnen, so ist die ganze Reihe $A = S + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ und die ganze Reihe $C = -\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot S$. Da nun $A = B - C$ ist, so ist

$$S + \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2} = \frac{n+2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot S.$$

Man multiplizire auf beiden Seiten mit 2, so kommt

$$2S + \frac{2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} = \frac{2(n+2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} S$$

oder $2S + \frac{2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} = n+2 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - S.$

Auf beiden Seiten $+S$ addirt, kommt

$$3S + \frac{2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} = n+2 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}.$$

Auf beiden Seiten das Glied $\frac{2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ abgezogen, kommt

$$3S = n+2 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)(n+2) - 2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}.$$

Der positive und negative Theil des Zählers hat den gemeinschaftlichen Faktor $(n+1)(n+2)$, diesen kann man also allein und die ungleichen Faktoren $(n+2)$ und -2 in eine Klammer setzen. Dann kommt

$$3S = \frac{(n+1)(n+2).(n+2-2)}{1.2} = \frac{(n+1)(n+2).n}{1.2}$$

und dividirt man nun auf beiden Seiten mit 3, so kommt

$$S = \frac{(n+1)(n+2)n}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Das heißt, die Summe der dritten Reihe von n Gliedern ist $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$.

Die Summe der Reihe I. war $= n = \frac{n}{1}$, die Summe der Reihe II. $= \frac{n(n+1)}{1.2}$ und die Summe der Reihe III. $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$. Hieraus ergibt sich eine Analogie, vermöge der man, weil die Reihe IV. gerade eben so aus Reihe III., wie III. aus II. und die Reihe V. gerade eben so aus IV., wie IV. aus III., wie III. aus II., kurz die nte Reihe gerade eben so aus der $(n-1)$ten Reihe, wie die $(n-1)$ aus der $(n-2)$ und wie die $(n-2)$te aus der $(n-3)$ u. s. w. entsteht, zu dem Schlusse berechtigt ist, daß die Summe der Reihe IV. sein wird $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$ und die Summe der Reihe V. $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$ u. s. w. Man braucht nur die Reihe IV. eben so aus Reihe III. zu entwickeln, wie wir es bei der Entwickelung der Reihe III. aus Reihe II. gezeigt haben, und so jede folgende Reihe aus der nächst vorhergehenden, so ergeben sich diese Resultate.

§. 192.

Zusatz.

Das nte Glied einer Reihe ist allemal gleich der Summe von n Gliedern der nächst niedrigern Reihe, z. B. 70 in Reihe V. des ersten Systems ist das fünfte Glied, also ist 70 gleich der Summe der 5 ersten Glieder von Reihe IV. $= 1+4+10+20+35$. Man hat daher im ersten Systeme

das nte Glied der Reihe I. $= 1$,
" " " " " II. $= n$,
" " " " " III. $= \frac{n(n+1)}{1.2}$,

das

das nte Glied der Reihe IV. $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

" " " " " V. $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

u. s. w.

Es bedeutet nämlich hier n die Zahl des wirklichen Gliedes in jeder Reihe, z. B. in Reihe I. das achte, in Reihe II. das achte, in Reihe III. das siebente, in Reihe IV. das sechste, in Reihe V. das fünfte u. s. w., und darnach müssen denn obige Formeln berechnet werden. Bezieht man aber die Nummer des Gliedes immer auf die erste Reihe und nennt dieselbe $= m$, so ergibt sich folgendes:

In Reihe I. ist $m = n$,
" " II. " $m = n$,
" " III. " $m = n+1$ oder $n = m-1$,
" " IV. " $m = n+2$ " $n = m-2$,
" " V. " $m = n+3$ " $n = m-3$,

u. s. w.

Drückt man also jedes Glied jeder Reihe durch die dem ganzen Systeme vorgesetzte Nummer, also durch m aus, so ist das nte Glied in der Reihe I. $= 1$,

" " " II. $= m$,

" " " III. $= \frac{(m-1)(m-1+1)}{1 \cdot 2} = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$,

" " " IV. $= \frac{(m-2)(m-2+1)(m-2+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

" " " V. $= \frac{(m-3)(m-3+1)(m-3+2)(m-3+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

u. s. w.

§. 193.

Zusatz.

Die Summen der Reihen in den folgenden Systemen lassen sich auf ähnliche Art finden, da sie ganz auf dieselbe Art, wie im ersten Systeme gebildet werden und sich nur dadurch unterscheiden, daß die Reihe der beständigen Differenzen größer als 1 ist.

Um ihre Summirung darzustellen, wollen wir zeigen, wie die Reihen des ersten Systems, und somit auch jedes folgenden, sich noch anders, nämlich jede aus 2 Reihen zusammengesetzt, darstellen lassen. Es besteht nämlich jede Reihe eines jeden Systems aus einer Reihe, die lauter Produkte des ersten Gliedes,

und aus einer Reihe, die lauter Produkte der beſtändigen Differenz enthält. Dem zufolge würde ſich das erſte Syſtem ſo darſtellen laſſen:

Nummer:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
1	1	1					
2	1	1+1.1	1				
3	1	1+2.1	2.1+ 1.1	1			u.
4	1	1+3.1	3.1+ 3.1	3.1+ 1.1	1		
5	1	1+4.1	4.1+ 6.1	6.1+ 4.1	4.1+ 1.1	1	f.
6	1	1+5.1	5.1+10.1	10.1+10.1	10.1+ 5.1	5.1+ 1.1	
7	1	1+6.1	6.1+15.1	15.1+20.1	20.1+ 15.1	15.1+ 6.1	m.
8	1	1+7.1	7.1+21.1	21.1+35.1	35.1+ 35.1	35.1+ 21.1	
9	1	1+8.1	8.1+28.1	28.1+56.1	56.1+ 70.1	70.1+ 56.1	
10	1	1+9.1	9.1+36.1	36.1+84.1	84.1+126.1	126.1+126.1	

Die Reihe I. enthält die beſtändigen Differenzen; die Reihe II. erſtlich eine Reihe, von der jedes Glied dem erſten gleich iſt und zweitens eine Reihe, welche Produkte der beſtändigen Differenz in ſich begreift; die Reihe III. erſtlich Produkte aus dem erſten Gliede und zweitens wiederum Produkte aus der beſtändigen Differenz. So iſt es auch mit den folgenden Reihen. Nennt man nun das erſte Glied jeder Reihe im Allgemeinen a (es iſt in unſern Syſtemen immer = 1 angenommen) und die beſtändige Differenz d, ſo ergibt ſich folgende allgemeine Darſtellung aller möglichen Syſteme.

Nummer des Gliedes:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1	d	a				
2	d	a+ d	a			
3	d	a+ 2d	2a+ d	a		
4	d	a+ 3d	3a+ 3d	3a+ d	a	
5	d	a+ 4d	4a+ 6d	6a+ 4d	4a+ d	a
6	d	a+ 5d	5a+ 10d	10a+ 10d	10a+ 5d	5a+ d
7	d	a+ 6d	6a+ 15d	15a+ 20d	20a+ 15d	15a+ 6d
8	d	a+ 7d	7a+ 21d	21a+ 35d	35a+ 35d	35a+ 21d
9	d	a+ 8d	8a+ 28d	28a+ 56d	56a+ 70d	70a+ 56d
10	d	a+ 9d	9a+ 36d	36a+ 84d	84a+ 126d	126a+ 126d
11	d	a+10d	10a+ 45d	45a+120d	120a+ 210d	210a+ 252d
12	d	a+11d	11a+ 55d	55a+165d	165a+ 330d	330a+ 462d
13	d	a+12d	12a+ 66d	66a+220d	220a+ 495d	495a+ 792d
14	d	a+13d	13a+ 78d	78a+286d	286a+ 715d	715a+1287d
15	d	a+14d	14a+ 91d	91a+364d	364a+1001d	1001a+2002d
16	d	a+15d	15a+105d	105a+455d	455a+1365d	1365a+3003d
17	d	a+16d	16a+120d	120a+560d	560a+1820d	1820a+4368d
18	d	a+17d	17a+136d	136a+680d	680a+2380d	2380a+6188d
19	d	a+18d	18a+153d	153a+816d	816a+3060d	3060a+8568d
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

Aus dieser Darstellung ergibt sich nun Folgendes:

1) Setzt man $d = 1$, so hat man alle Reihen des ersten Systems ausgedrückt. Es ist z. B. das zehnte Glied des ersten Systems in Reihe VI. oder das sechste Glied dieser Reihe $= 252 = 126a + 126d = 126 \cdot 1 + 126 \cdot 1 = 126 + 126 = 252$.

2) Es kommt hauptsächlich bei Summirung der Reihen auf die Summirung der Koeffizienten von a und d in jeder Reihe an, weil man die Summe derselben nur mit a und d zu multipliziren braucht, um die Summe der Reihe selbst zu finden. Es ist z. B. die Summe der 8 ersten Glieder des Systems oder die Summe der ersten 5 Glieder in Reihe V.
$= a + (4a + d) + (10a + 5d) + (20a + 15d) + (35a + 35d)$
$= a + 4a + 10a + 20a + 35a + d + 5d + 15d + 35d$
$= a(1 + 4 + 10 + 20 + 35) + d(1 + 5 + 15 + 35)$.

3) Die Koeffizienten von a in einer nächst höhern Reihe sind einerlei mit den Koeffizienten von d in der nächst niedern Reihe, z. B. in Reihe IV. die Koeffizienten von a einerlei mit den Koeffizienten von d in Reihe III. und in dieser die Koeffizienten von a einerlei mit den Koeffizienten von d in Reihe II. u. s. w. Man braucht also nur zu wissen, wie man die Summe der Koeffizienten von d in jeder Reihe finden könne, so hat man auch die Summe der Koeffizienten von a in der nächst höhern Reihe.

4) Die vorgesetzte Nummer des Gliedes bezieht sich auf das ganze System. Spricht man aber von der Nummer des Gliedes in jeder Reihe, so ergibt sich folgende Übersicht:

Das erste Glied in Reihe I. ist auch das erste in Reihe II., aber das ote in den folgenden Reihen.

Das zweite Glied in Reihe I. ist das zweite in Reihe II., das erste in Reihe III. und das ote in den folgenden Reihen.

Das dritte Glied in Reihe I. ist das dritte in Reihe II., das zweite in Reihe III., das erste in Reihe IV. und das ote in den folgenden Reihen.

Das vierte Glied in Reihe I. ist das vierte in Reihe II., das dritte in Reihe III., das zweite in Reihe IV., das erste in Reihe V. und das ote in den folgenden Reihen.

Also überhaupt das nte Glied in Reihe I. ist das nte in Reihe II., das $(n-1)$te in Reihe III., das $(n-2)$te in Reihe IV., das $(n-3)$te in Reihe V. und also allgemein in der qten Reihe das $n-(q-2)$te Glied.

5) Jeder Koeffizient eines Gliedes in irgend einer Reihe ist gleich der Summe der Koeffizienten von eben so viel Gliedern der nächst vorhergehenden Reihe, als die Zahl des Gliedes anzeigt.

Es ist z. B. das sechste Glied in Reihe V. $= 56a + 70d$ und der Koeffizient von a, nämlich $56 = 1+3+6+10+15+21$ = der Summe der Koeffizienten der 6 ersten Glieder von a in Reihe IV. und der Koeffizient von d, nämlich $70 = 1+4+10+20+35$ = der Summe der Koeffizienten der 5 ersten Glieder von d in Reihe IV.

Also allgemein im nten Gliede der qten Reihe der Koeffizient von a gleich der Summe der n ersten Koeffizienten von a in der $(q-1)$ten Reihe und der Koeffizient von d gleich der Summe der n ersten Koeffizienten von d in der $q-1$ten Reihe.

In jeder Reihe ist aber die Anzahl der Glieder, die d zum gemeinschaftlichen Faktor haben, um 1 kleiner als die Zahl der Glieder, die a zum gemeinschaftlichen Faktor haben. Für d muß man also n um 1 kleiner rechnen, als für a.

§. 194.
Zusatz.

Wir wollen jetzt m für die Zahl des Gliedes nehmen, die dem ganzen Systeme vorsteht und unter n die Zahl des Gliedes jeder einzelnen Reihe verstehen. Alsdann ist

in Reihe I. $m = n$,
" " II. $m = n$ für a und $m = n+1$ für d,
" " III. $m = n+1$ " a " $m = n+2$ " d,
" " IV. $m = n+2$ " a " $m = n+3$ " d,
" " V. $m = n+3$ " a " $m = n+4$ " d,
u. s. w.

Oder auch

in Reihe I. $n = m$,
" " II. $n = m$ für a und $n = m-1$ für d,
" " III. $n = m-1$ " a " $n = m-2$ " d,
" " IV. $n = m-2$ " a " $n = m-3$ " d,
" " V. $n = m-3$ " a " $n = m-4$ " d.

In Reihe I., wo $n = m$ ist und $a = 0$, ist die Summe der Glieder $= nd = md$.

In Reihe II. ist die Summe aller $a = na = ma$, und die Summe aller d, deren Anzahl um 1 kleiner ist, als die Anzahl der a, gleich der Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $= d$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n-1 = m-1$ ist. Das letzte oder $(n-1)$te Glied dieser Reihe, oder u, ist also $= d + (n-2)d = (n-1)d$ und folglich die Summe $= \frac{[d+(n-1)d](n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{nd(n-1)}{1 \cdot 2}$

$= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d$. Die vollständige Summe der ganzen Reihe ist also $= na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d = ma + \frac{m(m-1)d}{1 \cdot 2}$.

In Reihe III. ist die Summe der Koeffizienten von a gleich der Summe der Koeffizienten von d in Reihe II.; was aber für d in Reihe II. $= n-1$ war, ist für a in Reihe III. $= n$ und also dieses $n = m-1$, folglich die Summe der $a = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a$.

Da die Reihe der d um 1 weniger Glieder hat, als die Reihe der a, so ist für d die Anzahl der Glieder $= n-1$. Nun ist aber die Summe der Koeffizienten von d in dieser Reihe ganz dieselbe, wie die Summe der Reihe III. im ersten Systeme, nur daß das dortige n jetzt $= n-1$ ist, folglich ist die Summe der $d = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$. Die Summe der ganzen Reihe ist also $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$.

In Reihe IV. ist wieder die Summe der Koeffizienten von a gleich der Summe der Koeffizienten von d in Reihe III., also da jetzt n ist, was in III. $n-1$ war, die Summe aller $a = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a$.

Die Anzahl der Glieder in der Kolumne für d ist um 1 kleiner als in der Kolumne für a, also muß man statt n setzen $n-1$. Es ist aber die Summe der Koeffizienten von d in dieser Reihe ganz einerlei mit der Summe der Glieder in Reihe IV. des ersten Systems, nur daß das dortige n jetzt $= n-1$ ist. Also ist diese Summe $= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d$ und folglich die Summe der ganzen Reihe IV. $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d$.

Auf eben diese Art erhellet denn, daß die Summe von Reihe V. sein wird $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d$

und die Summe von Reihe VI.

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}\,a + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5.6}$$

$$= \frac{n(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\,a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6}$$

u. s. w.

In jeder dieser Formeln bezeichnet also n die wirkliche Zahl des Gliedes der Reihe, welche man summiren will. Diese Zahl stimmt mit der Anzahl der Glieder in der Kolumne für a überein und wird in der Kolumne für d um 1 kleiner. Ferner bedeutet m die Nummer des Gliedes, die dem ganzen Systeme vorsteht, und dieses m wird immer gefunden, wenn man zur wirklichen Zahl des Gliedes irgend einer Reihe die Zahl der Reihe weniger 2 addirt. So ist z. B. das sechste Glied in Reihe III. das siebente des ganzen Systems und $7 = 6 + 3 - 2$; in Reihe VI. ist das achte Glied das zwölfte des ganzen Systems und $12 = 8 + 6 - 2$.

Um jedes einzelne Glied irgend einer Reihe zu finden, dienen ebenfalls die obigen Formeln, denn in jeder Reihe ist allemal das nte Glied gleich der Summe der n ersten Glieder der nächst vorhergehenden Reihe. Es ist also z. B. das nte Glied der Reihe IV. gleich der Summe der n ersten Glieder von Reihe III. und das nte Glied von III. gleich der Summe der n ersten Glieder von II. u. s. w. Z. B. das sechste Glied in IV., nämlich $21a + 35d$, gleich der Summe der 6 ersten Glieder von III., $= a + (2a + d) + (3a + 3d) + (4a + 6d) + (5a + 10d) + (6a + 15d)$. Also die Summe von n Gliedern einer Reihe gibt zugleich den Betrag des nten Gliedes in der nächst folgenden Reihe. Dem zufolge ist das nte Glied in II. $= a + (n-1)d$ (weil die Kolumne für d in jeder Reihe ein Glied weniger hat, als die ganze Reihe). Das nte Glied in III. ist $= na + \frac{n(n-1)}{1.2}d$; das nte Glied in IV. $= \frac{n(n+1)}{1.2}a + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}d$; das nte Glied in V. $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}a + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}d$ u. s. w.

So ist man denn im Stande, auch jedes einzelne Glied einer Reihe zu berechnen, wenn die Zahl des Gliedes, der Reihe und des Systems gegeben ist. Darüber wollen wir einige Aufgaben hersetzen.

§. 195.
Aufgabe.

Wie viel Kugeln gehen in eine dreieckichte Pyramide, wenn jede Seite der unterſten Schicht 20 Kugeln enthält.

Die dreieckichten Pyramidalzahlen ſind in Reihe IV. des erſten Syſtems enthalten. Begreift nun die Seite der unterſten Schicht 20 Kugeln, ſo iſt die Pyramidalzahl die zwanzigſte von Reihe IV., alſo gleich der Summe der 20 erſten Glieder aus Reihe III. Es iſt alſo $n = 20$ und folglich $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1540$. Die Reihe der Schichten wäre nämlich:

1	21	66	136	Totalſumme:
3	28	78	153	35
6	36	91	171	185
10	45	105	190	460
15	55	120	210	860
35	185	460	860	1540

Alſo die Summe, wie es die Formel gibt.

§. 196.
Aufgabe.

Die Menge der Kugeln zu finden, welche ſich in Form einer viereckichten Pyramide aufſchichten laſſen, wenn eine Seite der unterſten Schicht 20 Kugeln enthält.

Die viereckichten Pyramidalzahlen gehören zum zweiten Syſteme und zwar zur vierten Reihe. Hat jede Seite der unterſten Schicht 20 Kugeln, ſo gibt es auch 20 Schichten, deren jede ein Quadrat iſt. Die Menge der Kugeln in der unterſten Schicht iſt alſo $= 20^2$, die folgende Schicht $= 19^2$, dann 18^2, 17^2 u. ſ. w. Die Antwort auf die Frage wird alſo durch die zwanzigſte viereckichte Pyramidalzahl beantwortet und dieſe iſt nach dem Obigen $= \frac{n(n+1)}{2} a + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$. Alſo da $n = 20$, $a = 1$ und $d = 2$ iſt, ſo iſt die Menge der Kugeln $= \frac{20 \cdot 21}{1 \cdot 2} + \frac{19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 210 + 2660 = 2870$. Die Reihe der Schichten iſt nämlich:

1	36	121	256	Totalſumme:
4	49	144	289	55
9	64	169	324	330
16	81	196	361	855
25	100	225	400	1630
55	330	855	1630	2870

Die Summe dieser Addition stimmt also genau mit dem Resultate der Formel.

§. 197.

Anmerkung.

Es lassen sich hierbei noch andere Aufgaben denken. Wenn nämlich die Summe einer Reihe figürlicher Zahlen gegeben ist, so kann man fragen nach der Anzahl der Glieder, welche zu dieser Summe gehören, oder nach n, nach dem Inhalte einer jeden Schicht, nach der Reihe des Systems, zu welcher die figürlichen Zahlen gehören, nach der Nummer des Systems, in welches dieselben fallen. Diese Aufgaben können vor jetzt noch nicht beigebracht werden.

Siebentes Kapitel.

Von Logarithmen und ihrem Gebrauche.

§. 198.

Erklärung.

Der Name Logarithme bedeutet Zahl der Verhältnisse. Man versteht nämlich darunter Zahlen, welche angeben, wie viel Verhältnisse vom ersten Gliede einer geometrischen Progression bis zu irgend einem andern Gliede Statt finden.

Hat man z. B. die Progression 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 u. s. w., so weiß man aus dem Vorigen, daß alle Glieder nach einerlei Verhältnissen fortgehen, daß also $3 : 6 = 6 : 12 = 12 : 24 = 24 : 48 = 48 : 96 = 96 : 192 = 192 : 384$ u. s. w. ist. Da alle diese Verhältnisse gleich sind, so kann man eins statt aller übrigen setzen und bei jedem Gliede zählen, wie oft dies Eine Verhältniß bis zu diesem Gliede vorgekommen ist. Z. B. das erste Verhältniß ist $3 : 6$. Dies ist gleich dem Verhältnisse $6 : 12$, desgleichen $12 : 24$, oder $24 : 48$ u. s. w. Nehme ich nun das Glied 48, so ist bis dahin das Verhältniß $3 : 6$ gerade 4 mal vorgekommen, oder zwischen dem ersten Gliede 3 und dem Gliede 48 finden 4 Verhältnisse Statt, von denen jedes $= 3 : 6$ ist, oder das Verhältniß $3 : 48$ ist

viermal aus dem Verhältnisse 3 : 6 zusammengesetzt, d. h. 3 : 48 = (3 : 6) + (3 : 6) + (3 : 6) + (3 : 6) = 81 : 1296 = 3 : 48, wenn man 81 und 1296 mit 27 dividirt. Die Zahl 4 nun, welche die Menge dieser Verhältnisse angibt, heißt der Logarithme des Gliedes 48.

§. 199.

Zusatz.

Jede geometrische Progression läßt sich in eine andere verwandeln, deren erstes Glied = 1 ist, wenn man alle Glieder durch das erste Glied dividirt. Die neue Progression ist zwar mit der gegebenen nicht identisch, aber ihre Glieder haben dieselben Verhältnisse. Es sei die gegebene

$$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5, ae^6 \ldots ae^{n-1}.$$

Da in jedem Gliede das erste Glied a der eine Faktor, der andere aber irgend eine Potenz des Exponenten ist, so läßt sich jedes Glied durch a ohne Rest dividiren und der Quotient ist immer eine Potenz des Exponenten. Es kommt nämlich die Reihe

$$1, e, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6 \ldots e^{n-1}.$$

Die Verhältnisse in beiden Progressionen sind die nämlichen, denn $a : ae = 1 : e$; $ae : ae^2 = e : e^2$ u. s. w. Ganz identisch läßt sich also die erste Progression so ausdrücken:

$$(1 + e + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6 \ldots + e^{n-1})\,a.$$

Was in Klammer eingeschlossen ist, ist also die Grundprogression, die jeder andern gegebenen zur Basis dient, und alle Sätze über geometrische Progressionen beziehen sich auf diese Grundprogression und werden für jede andere Progression passend, wenn man die Resultate, welche sie liefern, mit dem ersten Gliede a multiplizirt. Dies berechtigt uns, in der Lehre von Logarithmen nur obige Grundprogression zu betrachten, nämlich eine Progression, deren Glieder lauter Potenzen des Exponenten enthalten, denn das erste Glied 1 ist auch eine Potenz des Exponenten, nämlich $= e^0$.

Das Verhältniß $1 : e$ oder $e^0 : e^1$ heißt das Grundverhältniß der Progression, weil jedes andere Verhältniß zwischen einem Paar nächster Glieder demselben gleich und jedes Verhältniß zwischen einem Paar entfernter Glieder ein Vielfaches des Grundverhältnisses ist, z. B. $e^4 : e^5 = 1 : e$ und $e^2 : e^6 = 1 : e^4$ (wenn man beide Glieder durch e^2 dividirt) $= (1 : e) + (1 : e) + (1 : e) + (1 : e)$.

§. 200.

Zusatz.

Der Logarithme eines jeden Gliedes der Grundprogression kommt mit dem Exponenten der Potenz überein, auf welche der Exponent der Progression in diesem Gliede erhoben ist.

Progression 1 oder $e^0, e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6 \ldots e^{n-1}$.
Logarithmen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots n-1$.

Bei dem ersten Gliede 1 oder e^0 findet noch gar kein Verhältniß Statt, also ist sein Logarithme $= 0 =$ dem Exponenten der Potenz e^0; bei dem zweiten Gliede e^1 findet Ein Verhältniß $1 : e$ Statt, also der Logarithme $= 1 =$ dem Exponenten der Potenz e^1; bei dem dritten Gliede e^2 finden 2 Verhältnisse Statt, jedes $= 1 : e$, nämlich $1 : e^2 = (1 : e) + (1 : e)$, also ist der Logarithme von $e^2 = 2 =$ dem Exponenten der Potenz e^2 u. s. w. Der Logarithme eines jeden Gliedes ist also immer um 1 kleiner, als die Zahl des Gliedes, folglich vom $n$ten Gliede $= n - 1 =$ dem Exponenten der Potenz e^{n-1}.

§. 201.

Zusatz.

Setzt man die Progression rückwärts fort, so entstehen Glieder mit negativen Potenzexponenten, deren Logarithmen also auch negativ sind, z. B.

Prog. $e^{-(n-1)} \ldots e^{-5}, e^{-4}, e^{-3}, e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, e^3, e^4, e^5 \ldots e^{n-1}$.
Log. $-(n-1) \ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots n-1$.

Wenn also zwischen 1 und e Ein Verhältniß Statt findet, so findet zwischen 1 und e^{-1} auch Ein Verhältniß Statt, aber dies ist das entgegengesetzte von dem vorigen, also negativ. Es ist aber $e^{-1} = \frac{1}{e}$, also das Verhältniß $1 : e^{-1} = 1 : \frac{1}{e}$ und dieses ist das entgegengesetzte von $1 : e$, weil $\frac{1}{e}$ von $1 . e$, Division von Multiplikation, der Gegensatz ist. So vielmal als e größer ist als 1, so vielmal ist e^{-1} oder $\frac{1}{e}$ kleiner als 1. Für die Glieder rückwärts ist also $1 : \frac{1}{e}$ das Grundverhältniß, denn $1 : e^{-2} = 1 : \frac{1}{e^2} = (1 : e^{-1}) + (1 : e^{-1}) = \left(1 : \frac{1}{e}\right) + \left(1 : \frac{1}{e}\right)$ und allgemein $1 : e^{-(n-1)} = 1 : \frac{1}{e^{n-1}} = \left(1 : \frac{1}{e}\right) + \left(1 : \frac{1}{e}\right) + \left(1 : \frac{1}{e}\right)$ u. s. w. bis das Verhältniß $1 : \frac{1}{e}$ gerade $n-1$ mal

zusammengesetzt ist. Es ist aber $1 : \frac{1}{e} = e : 1$ oder $\frac{1}{e} : 1 = 1 : e$, folglich $1 : e$ auch das Grundverhältniß für die Glieder mit negativen Exponenten, nur umgekehrt, d. h. entgegengesetzt genommen.

§. 202.

Zusatz.

Offenbar hängen also vom Grundverhältnisse alle Logarithmen der Glieder der Progression ab, d. h. man wird wissen, was für eine Zahl als Glied irgend einer geometrischen Reihe zu einem Logarithmen gehört, wenn man weiß, welche Zahl zu dem Logarithmen $= 1$ gehört. Denn die Reihe der Logarithmen ist immer die nämliche, aber zu welcher Progression sie gehöre, wird durch die Zahl bestimmt, die man $= e$ setzt. Es sei z. B. $e = 2$, so ist die

Prog. $= 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots$
Log. $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$

Es sei $e = 8$, so ist die

Prog. $= 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 \ldots$
Log. $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$

Es sei $e = 10$, so ist die

Prog. $= 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 \ldots$
Log. $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$

Im ersten Beispiele gehört z. B. der Logarithme 3 zur Zahl 8, im zweiten derselbe Logarithme zu 27, im dritten zu 1000 u. s. w. So wie man e verändert, verändern sich auch die Zahlen, die zu dem nämlichen Logarithmen gehören.

§. 203.

Zusatz.

Eine geometrische Reihe mit der Reihe ihrer Logarithmen zusammengenommen, heißt ein Logarithmisches System und die Zahl e, deren Logarithme $= 1$ ist, die Basis oder Grundzahl des Systems. Es kann also so viel Logarithmische Systeme geben, als man für e Werthe setzen kann, d. h. unendlich viele. Ist nun e bestimmt, und hat man also ein Logarithmisches System entworfen, so entsteht die Frage, welche Anwendung kann man davon in der Rechenkunst machen. Dies lehren folgende Sätze.

§. 204.

Lehrsatz.

Wenn man 2 Glieder einer geometrischen Progression mit einander multiplizirt, so wird der Logarithme des Produkts gefunden, wenn man die Logarithmen beider Faktoren zusammen addirt.

Beweis.

Multiplizirt man z. B. e^2 mit e^4, so kommt e^6 zum Produkte $= e^{2+4}$, aber der Logarithme eines Gliedes ist gleich dem Exponenten der Potenz, auf welche e in dem Gliede erhoben ist, also ist Logarithme von e^6 oder $e^{2+4} = 6 = 2+4$, also $=$ Log. e^2 + Log. $e^4 = 2+4 = 6$. Im Allgemeinen ist also Logarithme von $e^m . e^n = m+n$, weil $e^m . e^n = e^{m+n}$ ist.

Denkt man sich also, man habe ein Logarithmisches System verfertigt, worin die Glieder der geometrischen Reihe alle mögliche Zahlen enthielten, so würde man daraus das Produkt zweier gegebenen Zahlen so auf eine leichte Art finden können: Man sucht die gegebenen Zahlen im Systeme auf, bemerkt ihre dabei stehenden Logarithmen, addirt dieselben und sucht nun im Systeme die gefundene Summe unter den Logarithmen auf, so wird das dabei stehende Glied der Progression das gesuchte Produkt angeben. Anstatt einer vielleicht mühsamen Multiplikation hat man also nur eine leichte Addition zu verrichten und erspart dadurch offenbar an Zeit.

§. 205.

Zusatz.

Wenn man ein Glied der Progression auf irgend eine Potenz erhebt, so findet man den Logarithmen dieser Potenz, wenn man den Logarithmen des Gliedes mit dem Exponenten der Potenz multiplizirt. Denn wenn man z. B. e^2 auf die dritte Potenz erhebt, so ist $(e^2)^3 = e^{2.3} = e^6$, aber 6 ist der Logarithme von e^6 und diese 6 wird also gefunden, wenn man den Logarithmen von $e^2 = 2$ mit dem Exponenten der Potenz, nämlich mit 3, multiplizirt. Oder man kann auch sagen: $(e^2)^3 = e^2 . e^2 . e^2$ = Log. e^2 + Log. e^2 + Log. $e^2 = 2+2+2 = 2.3 = 6$.

Die Erhebung auf Potenzen wird also vermittelst der Logarithmen in eine leichte Multiplikation verwandelt. Man sucht im Logarithmischen Systeme die Zahl auf, welche auf

eine Potenz erhoben werden soll, multiplizirt deren Logarithmen mit dem Exponenten der Potenz und sucht das entstandene Produkt unter den Logarithmen des Systems auf, so ist die dabei stehende Zahl die gesuchte Potenz.

§. 206.
Zusatz.

Wenn man aus irgend einem Gliede der Progression die Wurzel irgend einer Potenz sucht, so findet man den Logarithmen dieser Wurzel, wenn man den Logarithmen des Gliedes durch den Exponenten der Wurzel dividirt. Es soll z. B. aus dem Gliede e^6 die Kubikwurzel gezogen werden, so ist $\sqrt[3]{e^6} = e^{\frac{6}{3}} = e^2$; aber Logarithme $e^6 = 6$, also Logarithme $e^{\frac{6}{3}} = \frac{6}{3} = 2$.

So wird also vermittelst der Logarithmen das Wurzelausziehen in eine leichte Division verwandelt. Soll also aus irgend einer Zahl, die als Glied der geometrischen Progression angesehen werden kann, eine Wurzel gezogen werden, so sucht man die Zahl im Systeme auf, und dividirt ihren Logarithmen durch den Exponenten des Wurzelzeichens. Der Quotient ist der Logarithme der Wurzel und wenn man diesen im Systeme aufsucht, so ist die dabei stehende Zahl die Wurzel.

§. 207.
Lehrsatz.

Wenn man ein Glied der Progression durch ein anderes dividirt, so wird der Logarithme des Quotienten gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendus abzieht.

Beweis.

Wenn man e^6 durch e^3 dividiren soll, so ist der Quotient $= \frac{e^6}{e^3} = e^{6-3} = e^3$. Aber 6 ist der Logarithme von e^6 und 3 der Logarithme von $e^3 = 6 - 3$, folglich gleich dem Logarithmen des Dividendus weniger dem Logarithmen des Divisors.

Im Allgemeinen also Log. $\frac{e^m}{e^n} = m - n$.

Durch die Logarithmen wird also jede Division in eine leichte Subtraktion verwandelt. Hat man ein Logarithmisches System,

so suche man in demselben die Zahl des Dividendus und Divisors auf, bemerke ihre Logarithmen und ziehe den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendus ab. Der Unterschied ist der Logarithme des Quotienten. Sucht man also diesen in den Tafeln auf, so findet man den wirklichen Quotienten dabei stehen.

§. 208.

Diese Bequemlichkeit, welche die Logarithmen geben, hat veranlaßt, daß man ein Logarithmisches System berechnet und davon Tafeln verfertigt hat, worin man Zahlen und ihre Logarithmen nachschlagen kann. Eine solche Berechnung war allerdings mühsam, gewährt aber nun, da sie geschehen ist, außerordentliche Vortheile und verstattet die Auflösung von Aufgaben, die außerdem zu lösen unmöglich wären.

Um ein solches System zu berechnen, kam es erstlich darauf an, eine schickliche Basis anzunehmen, und daraus die Grundprogression zu bilden. Am leichtesten bot sich dazu die Progression an, welche unserm ganzen Zahlensysteme zum Grunde liegt, nämlich die Reihe: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 u. s. w. Die Basis ist also 10 und das Grundverhältniß = 1 : 10. Da nun aber das Logarithmische System auch so eingerichtet sein soll, daß man darin die Logarithmen aller natürlichen Zahlen findet, so kam es zweitens darauf an, solche Zwischenglieder in der Progression zu finden, welche von den natürlichen Zahlen so wenig abwichen, daß man sie ohne Fehler für diese Zahlen selbst setzen konnte, und dann deren Logarithmen zu berechnen. Man mußte also zwischen 1 und 10, oder 10 und 100 u. s. w. so lange mittlere Proportionalzahlen suchen, bis man dieselben für die dazwischen fallenden natürlichen Zahlen selbst nehmen konnte. Da die Reihe der Logarithmen eine arithmetische Progression bildet, so mußte man hier eben so viel mittlere arithmetische Proportionalglieder suchen, als in der Grundprogression geometrische gesucht wurden. So fand man denn die Logarithmen der natürlichen Zahlen, d. h. solcher Glieder der Progression, die von den natürlichen Zahlen so wenig als möglich abwichen. Wenn man den Werth einer Sache bis auf den zehnmillionenten Theil kennt, so ist dies in den allermeisten Fällen hinlänglich. Berechnete man also mittlere Proportionalglieder in der Grundprogression, die in Zehnmillionentheilen nicht von den natürlichen Zahlen abwichen, so konnte man diese ohne bedeutenden Fehler für die natürlichen Zahlen selbst nehmen und ihre Logarithmen also für die Logarithmen

dieſer natürlichen Zahlen. Nach dieſer Vorausſetzung ſind die gewöhnlichen Logarithmiſchen Tafeln eingerichtet. Dieſe Betrachtungen laſſen ſich nun ſo noch erörtern.

Iſt 1 : e das Grundverhältniß = 1 : 10, ſo fallen zwiſchen 1 und 10 die natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Von dieſen braucht man nur die Logarithmen für 2, 3, 5, 7 zu berechnen, denn 4 = 2 . 2, alſo Log. 4 = Log. 2 + Log. 2 = 2 Log. 2; 6 = 3 . 2, alſo Log. 6 = Log. 3 + Log. 2; 8 = 2 . 2 . 2, alſo Log. 8 = 3 Log. 2; 9 = 3 . 3, alſo Log. 9 = 2 Log. 3. Zwiſchen 1 und 10 mußte man alſo Zwiſchenglieder ſuchen, die den natürlichen Zahlen 2, 3, 5, 7 wenigſtens bis auf 8 Dezimalſtellen gleich waren. Dies geſchah nach der Aufgabe: Zwiſchen zwei Zahlen die mittlere geometriſche Proportionalzahl zu finden. Nennt man dieſe x, ſo verhält ſich 1 : x = x : 10, alſo $x^2 = 1 . 10 = 10$ und $x = \sqrt{10} = 3{,}1622776625$. Den Logarithmen dazu findet man, wenn man zwiſchen Log. 1 = 0 und Log. 10 = 1 die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl ſucht, alſo 0 — y = y — 1, folglich $y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Geſetzt nun, man wollte gern den Logarithmen für 5 haben, ſo fällt 5 zwiſchen 3,1622776625 und 10, oder wenn wir jene Wurzel = C ſetzen, zwiſchen C und 10, alſo hat man die Proportion C : x = x : 10 und folglich $x = \sqrt{C . 10} = \sqrt{31{,}622776625} = 5{,}6234132540$, welche Zahl wir D nennen wollen. Der Logarithme dazu iſt die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen 0,5 und 1, alſo $= \frac{0{,}5+1}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$, welche Zahl wir d nennen wollen. Nun fällt 5 zwiſchen C und D, alſo mache man die Proportion C : x = x : D, folglich $x = \sqrt{CD} = 4{,}2169650366 = E$ und der Logarithme zwiſchen d und 0,5, alſo $= \frac{0{,}75+0{,}5}{2} = \frac{1{,}25}{2} = 0{,}625 = e$. Jetzt fällt 5 zwiſchen D und E, alſo $x = \sqrt{DE} = 4{,}8696752538 = F$ und der Logarithme zwiſchen d und $e = \frac{0{,}75+0{,}625}{2} = \frac{1{,}375}{2} = 0{,}6875 = f$. Auf dieſe Art fährt man nun mit dem Suchen mittler geometriſcher und arithmetiſcher Proportionalglieder fort, und ſo kommt man denn endlich in der geometriſchen Proportion auf 2 Glieder, nämlich das eine = 4,9999999691 und das andere = 5,0000000145, welche für 5 genommen werden können, weil ſie in den erſten 7 Dezimalſtellen nicht davon abweichen. Der Logarithme des erſtern Gliedes iſt = 0,6989700012 und der des letztern = 0,6989700049, alſo

beide in den 7 ersten Dezimalstellen übereinstimmend. Folglich kann man sagen Log. 5 = 0,6989700.

So muß man es nun mit allen Zahlen zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 u. s. w. machen, wenn man ihre Logarithmen berechnen will.

Auf diesem mühsamen Wege sind die ersten Logarithmentafeln wirklich berechnet. Gegenwärtig bietet aber die höhere Rechenkunst leichtere Mittel zu ihrer Berechnung dar.

Da die Logarithmen mit den Exponenten der Potenzen der Basis übereinkommen, so ist also die Zahl $5 = 10^{0,6989700} = 10^{0,69897} = 10^{\frac{69897}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{69897}}$, d. h. wenn man 10 auf die 69897ste Potenz erhebt und daraus die 100000ste Wurzel zieht, so erhält man ungefähr 5. Um 10 auf die 69897ste Potenz zu erheben, müßte man an 10 noch 69896 Nullen hängen. Nehmen etwa 10 Ziffern einen Zoll ein, so betrüge die Länge der Zahlenreihe 6989 Zoll oder 698 Fuß und das Ausziehen der 100000sten Wurzel möchte leicht eine Arbeit von mehr als einem Menschenalter sein.

§. 209.
Anmerkung.

Über den Gebrauch der Logarithmischen Tafeln sind folgende Bemerkungen nöthig.

1) Jeder Logarithme ist entweder bloß Dezimalbruch, dies ist bei den Logarithmen der Zahlen von 2 bis 9 der Fall, weil erst der Logarithme 10 = 1, der von 1 aber = 0 und also die aller vorhergehenden Zahlen von 2 bis 9 kleiner als 1 sind, oder er ist eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl und ein Dezimalbruch. Bloß ganze Zahlen sind nur die Logarithmen der Zahlen 10, 100, 1000, 10000 u. s. w., nämlich = 1, 2, 3, 4 u. s. w.; für alle übrige Zahlen bestehen die Logarithmen aus einer ganzen Zahl und einem Dezimalbruche. Die ganze Zahl, worunter jetzt auch die 0 bei den Logarithmen von 1 bis 9 mit verstanden wird, heißt die Kennziffer (figura characteristica), der angehängte Dezimalbruch die mantissa. An der ganzen Zahl nämlich kann man gleich wissen, zu welcher Ordnung die dem Logarithmen korrespondirende Zahl gehöre, weil eben die Kennziffer mit dem Ordnungsexponenten übereinstimmt, also zeigt 0 die Einer, 1 die Zehner, 2 die Hunderte, 3 die Tausende u. s. w. an.

2)

2) Einerlei Logarithme, nur mit veränderter Kennziffer, kann also Zahlen von verschiedenen Ordnungen anzeigen. So ist z. B. Log. 9 = 0,9542425, aber mit der Kennziffer 1 gehört dieser Logarithme zu 90, denn Log. 90 = Log. 9 . 10 = Log. 9 + Log. 10 = 0,9542425 + 1, also = 1,9542425, und mit der Kennziffer 4 zu 90000, denn Log. 90000 = Log. 9 . 10000 = Log. 9 + Log. 10000 = 0,9542425 + 4 = 4,9542425.

Auch Logarithmen von Dezimalbrüchen ergeben sich auf diese Art. Denn 0,9 ist = $\frac{9}{10}$, also Log. 0,9 = Log. $\frac{9}{10}$ = Log. 9 — Log. 10 = 0,9542425 — 1. So läßt man den Ausdruck stehen, weil in den Tafeln keine negative Logarithmen befindlich sind. Denn um Log. 0,9 zu finden, müßte man eigentlich 0,9542425 von 1 abziehen und den Rest negativ setzen, also = —0,0457574. Da aber dieser negative Logarithme nicht in den Tafeln steht, so begnügt man sich mit der bloßen Andeutung der Subtraktion. So ist denn auch Log. 0,009 = Log. $\frac{9}{1000}$ = Log. 9 — Log. 1000 = 0,9542425 — 3. Der Gebrauch solcher Logarithmen wird sich unten ergeben.

Logarithmen von Ganzen mit Dezimalbrüchen ergeben sich auch aus den Tafeln, wenn man sie unter höhern Kennziffern aufschlägt. Z. B. Man soll den Logarithmen von 6,879 finden. Man denke sich die Zahl 1000 mal größer, so ist 6,879 . 1000 = 6879; der Log. 6879 = 3,8375253, aber 6,879 = $\frac{6879}{1000}$, also Log. 6,879 = Log. $\frac{6879}{1000}$ = Log. 6879 — Log. 1000 = 3,8375253 — 3, folglich = 0,8375253.

3) Man hat Tafeln, in denen die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000, und auch größere, in denen sie für die Zahlen von 1 bis 100000 berechnet sind. Aus dem Vorigen ergibt sich schon, daß die Zahlen von 1 bis 1000, oder auch von 1 bis 10000, folglich auch ihre Logarithmen, unter den Zahlen von 1000 bis 10000 oder von 10000 bis 100000 und also auch ihre Logarithmen wieder vorkommen müssen, nur stehen die Zahlen in höhern Ordnungen und die Logarithmen unter höherer Kennziffer. Z. B. die Zahl 879 kommt wieder vor unter der höhern Ordnung 8790, oder 87900 und so auch ihre Logarithmen. Es brauchten also in den Tafeln bis 100000 nur die Zahlen von 10000 bis 100000 zu stehen und man würde die Logarithmen aller niedern Zahlen unter den Logarithmen dieser höhern finden, nur müßte die Kennziffer um so viel vermindert werden, als die Ordnung höher wäre. Wollte man z. B. den Logarithmen der Zahl 685 haben, so fände man, in der Ordnung der Zehntausende aufgeschlagen, den

Log. 68500 = 4,8356906, aber 68500 ist um 2 Ordnungen höher als 685, oder 685 = $\frac{68500}{100}$, folglich Log. 685 = Log. $\frac{68500}{100}$ = 4,8356906 — 2 = 2,8356906. In den Schulzischen und andern neuern Tafeln ist durch diese Weglassung der niedern Ordnungen viel Raum erspart worden.

4) Die Kennziffer braucht auch nicht mit in den Tafeln zu stehen. Soll der Logarithme für eine gegebene Zahl gesucht werden, so weiß man aus der Ordnung der höchsten Ziffer der Zahl auch die Kennziffer ihres Logarithmen, die man nun der in den Tafeln stehenden Mantissa voranschreibt, und ist ein Logarithme gegeben, so ist auch seine Kennziffer mitgegeben und diese bestimmt nun, wenn man die Mantissa in den Tafeln sucht, die Ordnung der zugehörigen Zahl. Z. B. Man soll den Logarithmen für 63754 suchen. In den Tafeln findet man die Mantissa 8045074; weil aber 63754 zur Ordnung der 10000, also zur vierten gehört, so muß der Mantissa die Kennziffer 4 vorgesetzt werden, und es ist also Log. 63754 = 4,8045074. Umgekehrt, ist der Logarithme 3,8850218 gegeben, so suche man die Mantissa in den Tafeln. Man findet dabei die Zahl 7674 und weil die Kennziffer des gegebenen Logarithmen = 3 ist, so gehört die Zahl zur Ordnung der Tausende, also ist sie gerade die gefundene 7674. Wäre aber der Logarithme 1,8850218 gegeben, so hätte die Kennziffer 1 gezeigt, daß die korrespondirende Zahl zur Ordnung der Zehner gehöre und diese Zahl wäre also 76,74.

5) Es ist oft der Fall, daß ein Logarithme, wie ihn die Rechnung gibt, nicht genau in den Tafeln steht. Ist nun die Kennziffer klein, so kann man die dazu gehörige Zahl genauer finden, wenn er unter höhern Kennziffern aufgeschlagen wird. Es sei der gegebene Logarithme = 0,8860958. Schlägt man ihn wirklich in solchen Tafeln, wo die Kennziffern mit stehen, unter der Kennziffer 0 auf, so findet man den nächst kleinern Logarithmen = 0,8450980 und dabei die Zahl 7, den nächst größern aber 0,9030900 und dabei die Zahl 8. Daraus erhellet, daß die zu dem gegebenen Logarithmen gehörige Zahl größer als 7 und kleiner als 8, daß sie also 7 und ein Bruch sein müsse. Schlägt man nun unter der Kennziffer 1 auf, so findet man Log. 76 = 1,8808136 und Log. 77 = 1,8864907, also Log. 7,6 = 0,8808136 und Log. 7,7 = 0,8864907. Es fällt also die zum gegebenen Logarithmen gehörige Zahl zwischen 7,6 und 7,7. Unter der Kennziffer 2 findet man Log. 769 = 2,8859263 und Log. 770 = 2,8864907, also Log. 7,69 = 0,8859263 und Log. 7,70 = 0,8864907. Also fällt die

Zahl zwischen 7,69 und 7,70. Schlägt man endlich den Logarithmen unter der Kennziffer 3 auf, so findet man Log. 7693 = 3,8860957, also Log. 7,693 = 0,8860957, und da dieser nur um $\frac{1}{10000000}$ von dem gegebenen unterschieden ist, so ist 7,693 die zu demselben gehörige Zahl. Man schlage also in solchen Fällen die gegebenen Logarithmen unter so hohen Kennziffern als möglich auf, so findet man auch die zugehörige Zahl so genau, als es nur die Tafeln erlauben.

6) Es kann leicht der Fall sein, daß man Logarithmen von Zahlen aufschlagen soll, die mehr Ziffern haben, als die in den Tafeln befindlichen. Um dann doch den Logarithmen zu finden, gibt es mancherlei Hülfsmittel.

a) Man kann die gegebene Zahl in Faktoren zerfällen, die Logarithmen der Faktoren aufschlagen und diese addiren. Es soll z. B. der Logarithme von 8696448 gefunden werden. Da nun 8696448 = 7549 . 9 . 8 . 16 ist, so schlage man die Logarithmen dieser Faktoren auf und addire sie.

Es ist nämlich	Log. 7549	= 3,8778894,
	Log. 9	= 0,9542425,
	Log. 8	= 0,9030900,
	Log. 16	= 1,2041200.
Also Log. 7549 . 9 . 8 . 16 = Log. 8696448 =		6,9393419.

b) Läßt sich die gegebene Zahl nicht in Faktoren zerfällen, so wende man die Rechnung mit den Proportionaltheilen an. Es ist nämlich der Fall, daß Änderungen der Zahlen, die in Vergleichung mit den Zahlen selbst nur klein sind, sich ziemlich genau, wie die Änderungen der zugehörigen Logarithmen verhalten, z. B. die Änderung zwischen 56854 und 56855 ist 1; die Änderung der zugehörigen Logarithmen 4,7547611 und 4,7547687 ist 76; die Änderung zwischen 56854 und 56856 ist 2 und die Änderung der zugehörigen Logarithmen 4,7547611 und 4,7547763 ist 152, also die Änderung der Zahlen doppelt so groß und die Änderung der Logarithmen auch das Doppelte, so daß sich die Proportion ergibt 1 : 2 = 76 : 152. Dies trifft zu, weil die Änderungen der Zahlen in Vergleichung mit den Zahlen selbst sehr klein sind. Nimmt man dagegen die Zahlen 5685 und 5686, deren Änderung = 1, desgleichen die Zahlen 5685 und 5687, deren Änderung = 2 ist, so sind die zugehörigen Logarithmen: 1) Log. 5685 = 3,7547305 und Log. 5686 = 3,7548069, also die Änderung = 764; 2) Log. 5685 = 3,7547305 und Log. 5687 = 3,7548832, also die

Änderung 1527. Diese ist nicht genau das Doppelte der ersten Änderung 764 und dies kommt daher, weil jetzt die Änderungen in Vergleichung mit den Zahlen selbst viel größer, nämlich 10 mal größer sind als im vorigen Beispiele. Noch weniger wird es in der Ordnung der Hunderte treffen. Von 568 und 569 ist die Änderung = 1, von 568 und 570 die Änderung = 2, aber Log. 568 = 2,7543483 und Log. 569 = 2,7551123, also die Änderung = 7640 und Log. 568 = 2,7543483 und Log. 570 = 2,7558749, also die Änderung = 15266 und diese ist noch weniger genau das Doppelte von 7640, als im vorigen Beispiele, aber die Änderungen sind auch jetzt in Vergleichung mit den Zahlen 10 mal größer als im vorigen und 100 mal größer als im ersten Beispiele.

Man sieht indessen, daß sich hieraus eine Methode ableiten lasse, den Logarithmen einer Zahl zu finden, die mehr Ziffern hat, als die, welche in den Tafeln stehen. Man sucht z. B. den Logarithmen für 2876352. In den Tafeln bis 100000 findet man nur die ersten 5 Ziffern 28763 und ihren Logarithmen = 4,4588342. Aber eben dieser Logarithme mit der Kennziffer 6 gehört auch zur Zahl 2876300. Nun fällt 2876352 zwischen 2876300 und 2876400, deren Änderung = 100 ist, die Änderung zwischen 2876300 und 2876352 ist 52; der Log. 2876300 = 6,4588342 und Log. 2876400 = 6,4588493, die Änderung = 151, also kann man jetzt schließen 100 : 52 = 151 : zur Änderung des kleinsten und gesuchten Logarithmen. Die Rechnung gibt 78,52. Davon nimmt man nur die ganzen Zahlen 78 und rechnet sie zu den letzten Ziffern des kleinsten Logarithmen, so erhält man Log. 2876352 = 6,4588342 + 78 = 6,4588420.

Die Rechnung läßt sich so ordnen:

Nächst größere Zahl in den Tafeln	=	2876400
Nächst kleinere Zahl in den Tafeln	=	2876300
Unterschied	=	100
Gegebene Zahl	=	2876352
Nächst kleinere Zahl	=	2876300
Unterschied	=	52

Log. der nächst größern Zahl, oder Log. 2876400	=	6,4588493
Log. der nächst kleinern Zahl, oder Log. 2876300	=	6,4588342
Unterschied	=	151

Rechnung.

100 : 52 = 151
52
302
755
100) 7852
78,52

Also Log. der nächst kleinern Zahl, oder Log. 2876300 = 6,4588342
Gefundene Änderung = + 78
Gesuchter Logarithme der gegebenen Zahl = 6,4588420

Dieser nämliche Logarithme mit veränderter Kennziffer gehört nun auch zu den Zahlen 287635,2, 28763,52 u. s. w.; also

Log. 2876352 = 6,4588420,
Log. 287635,2 = 5,4588420,
Log. 28763,52 = 4,4588420,
Log. 2876,352 = 3,4588420,
Log. 287,6352 = 2,4588420,
Log. 28,76352 = 1,4588420,
Log. 2,876352 = 0,4588420,
Log. 0,2876352 = 0,4588420 — 1,
Log. 0,02876352 = 0,4588420 — 2,
u. s. w.

Für Zahlen, die nur um 2 Ziffern größer sind, als die in den Tafeln, trifft diese Rechnung mit Proportionaltheilen genau, auch noch allenfalls für Zahlen, die 3 Ziffern mehr haben, besonders wenn die Ziffern ihrer höchsten Ordnung niedrig, etwa 1, 2, 3, sind und also die Änderungen der Logarithmen noch über 100 oder nahe an 100 betragen; aber weniger für größere Zahlen, weil die Logarithmen nur bis auf 7 Dezimalstellen berechnet sind. Man suche z. B. den Logarithmen von 13754634.

Nächst größere Zahl der Tafeln = 13755000
Nächst kleinere Zahl der Tafeln = 13754000
Unterschied = 1000

Gegebene Zahl = 13754634
Nächst kleinere Zahl = 13754000
Unterschied = 634

Log. der nächst größern Zahl, oder Log. 13755000 = 7,1384606
Log. der nächst kleinern Zahl, oder Log. 13754000 = 7,1384290
Unterschied = 316

Rechnung.

1000 : 634 = 316

316
3804
634
1902
1000) 200344
200,344

Log. 13754000 = 7,1384290
Gefundene Änderung = 200
Log. 13754634 = 7,1384490.

In diesem Beispiele ist der Logarithme noch ziemlich richtig gefunden. Wollte man aber den Logarithmen von 89758492 suchen, so wäre

die nächst größere Zahl der Tafeln = 89759000
die nächst kleinere Zahl der Tafeln = 89758000
Unterschied = 1000

Gegebene Zahl = 89758492
Nächst kleinere Zahl = 89758000
Unterschied = 492

Log. der nächst größern Zahl, oder Log. 89759000 = 7,9530780
Log. der nächst kleinern Zahl, oder Log. 89758000 = 7,9530732
Unterschied = 48

Rechnung.

1000 : 492 = 48

48
3936
1968
1000) 23616
23,616

Log. der nächst kleinern Zahl = 7,9530732
Gefundener Unterschied = + 23
Log. 89758492 = 7,9530755

Daß nun dieser Logarithme nicht genau ist, sieht man daraus, weil man für die Zahlen von 89758480 bis 89758499 in den ersten 7 Dezimalstellen durch die obige Rechnung genau denselben Logarithmen findet. Die Änderungen nämlich fangen bei solchen hohen Zahlen erst in der achten und neunten Dezimalstelle an bemerkbar zu werden.

c) In den Schulzischen, Vega'schen und andern neuern Tafeln für Logarithmen sind die Unterschiede zweier nächsten Logarithmen und die dazu gehörigen Proportionaltheile gleich in den Tafeln angegeben. Dadurch wird die Rechnung erspart und der Gebrauch dieser Proportionaltheile ist folgender.

Wir wollen vermöge derselben den Logarithmen von 2876352 suchen.

Man schlage erst den Logarithmen der nächst kleinern Zahl, also von 2876300 auf = 6,4588342. In der gegebenen Zahl folgt nach der 3 zuerst eine 5. Nun sind auf der rechten Seite der Tafeln zwei schmale Kolumnen, mit P. P. überschrieben. In der Kolumne links stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, in der Kolumne rechts bei jeder die zugehörigen Änderungen der Logarithmen. Also suche man obige 5 in der Kolumne links und merke aus der Kolumne rechts die dabei stehende Änderung 76 an. Nun folgt in der gegebenen Zahl nach der 5 noch 2. Diese suche man wieder in der Kolumne links und merke die dabei stehende Änderung 30 an. Da aber die Einheit der 2 um 10 mal kleiner ist, als die Einheit der vorigen 5, so muß man auch den Proportionaltheil 30 um 10 mal kleiner nehmen und ihn als 3,0 zu dem vorigen Proportionaltheil 76 rechnen. So findet man denn die ganze Änderung = 79 und dieses zum kleinsten Logarithmen addirt, kommt wie oben Log. 2876352 = 6,4588421. Es stand zwar oben zuletzt eine 0 und jetzt 1, aber wie man aus der obigen Rechnung sieht, war auch der weggelassene Dezimalbruch größer als $\frac{1}{2}$, also ist die 1 noch etwas richtiger, als 0.

7) Des nämlichen Verfahrens kann man sich bedienen, um umgekehrt zu einem Logarithmen, der nicht genau in den Tafeln steht, die zugehörige Zahl genauer zu finden. Man habe z. B. aus einer Rechnung den Logarithmen 6,3528947 erhalten, welche Zahl gehört zu demselben? Man suche in den Tafeln den nächst größern und nächst kleinern Logarithmen und merke sich die dabei stehenden Zahlen an, also

nächst größerer Log. = 6,3528961 = Log. 2253700
nächst kleinerer Log. = 6,3528768 = Log. 2253600.

Jetzt weiß man, die zum gegebenen Logarithmen gehörige Zahl muß zwischen 2253600 und 2253700 fallen. Man nehme den Unterschied des nächst größern und nächst kleinern Logarithmen = 193, den Unterschied der nächst größern und nächst kleinern Zahl = 100, endlich auch den Unterschied des nächst kleinern und gegebenen Logarithmen = 179 und setze nun auf: 193 : 179 = 100 : zum Unterschiede der nächst kleinern und gesuchten Zahl.

Die Rechnung gibt 92,7. Diesen Unterschied zur nächst kleinern Zahl addirt, gibt die gesuchte Zahl = 2253692,7.

Die ganze Rechnung läßt sich so ordnen:

Nächst größerer Log.	=	6,3528961
Nächst kleinerer Log.	=	6,3528768
Unterschied	=	193
Gegebener Log.	=	6,3528947
Nächst kleinerer Log.	=	6,3528768
Unterschied	=	179
Zahl des nächst größern Log.	=	2253700
Zahl des nächst kleinern Log.	=	2253600
Unterschied	=	100

Rechnung.

193 : 179 = 100

100

193 | 17900 | 92,7

1737

530

386

1440

1351

89

Noch weiter zu rechnen, würde von wenigem Nutzen sein, weil die folgenden Dezimalstellen doch nur unrichtig kommen würden. Man addire nun den gefundenen Unterschied zur nächst kleinern Zahl, so erhält man 6,3528947 = Log. 2253600 + 92,7 = Log. 2253692,7.

Wäre die Kennziffer des Logarithmen anders gewesen, so hätte man doch die nämliche Zahl, nur in anderer Ordnung, gefunden. Also z. B.

für Log.	6,3528947	die Zahl	2253692,7,
= =	7,3528947	= =	22536927,
= =	5,3528947	= =	225369,27,
= =	4,3528947	= =	22536,927,
= =	3,3528947	= =	2253,6927,
= =	2,3528947	= =	225,36927,
= =	1,3528947	= =	22,536927,
= =	0,3528947	= =	2,2536927,
= =	0,3528947 — 1	= =	0,22536927,
= =	0,3528947 — 2	= =	0,022536927,

u. s. w.

Das Nämliche läßt sich nun auch durch die Proportionaltheile in den Tafeln ohne Rechnung finden. Man sucht nämlich zuerst den Unterschied des gegebenen und nächst kleinern Logarithmen = 179. Diesen sucht man in der Kolumne rechts und wenn er nicht geradezu selbst dasteht, den nächst kleinern = 174. Links steht dabei die Zahl 9, diese schreibt man also rechts neben die letzte Ziffer der nächst kleinern Zahl 22536, so hat man 225369. Vorige 174 zieht man nun von 179 ab und hängt an den Rest 5 eine 0, sucht diese 50 wieder in der Kolumne rechts und findet die nächst kleinere = 39 und dabei die Zahl 2, welche neben die vorige 9 geschrieben wird. So erhält man denn 2253692. Zieht man nun wieder obige 39 von 50 ab, so bleibt 11, und daran wieder eine 0 gehängt, kommt 110; diese in Kolumne rechts aufgesucht, findet man die nächst kleinere Zahl = 97 und dabei links die Zahl 5, oder da die folgende nächst größere 116 nur um 6 größer ist als 110, 97 aber um 13 kleiner, so wird die links von 116 stehende 6 richtiger sein, als jene 5, und die gesuchte Zahl ist nun 2253692,6. Man sieht hieraus, daß die oben durch Rechnung gefundene letzte Ziffer 7 schon nicht mehr ganz richtig ist, wie viel weniger also die folgenden Ziffern, wenn man weiter hätte rechnen wollen.

Das oben erwähnte Anhängen der Null erklärt sich so: Für den Unterschied 174 steht die zugehörige Zahl unmittelbar in den Tafeln. Nun blieb 5 übrig. Diese findet sich nicht darin, wohl aber, wenn sie 10 mal größer gemacht wird, als 50. Die dabei stehende Zahl 2 ist nun aber 10 mal zu groß und muß also 10 mal kleiner genommen werden, d. h. ihre Einheit um eine Ordnung niedriger, als die Einheit der vorigen 9, darum wird sie rechts von derselben geschrieben. So ist es denn auch mit dem folgenden Anhängen der Null und der dritten Proportionalzahl 6.

8) Hat ein Lagarithme an der rechten Seite eine negative Kennziffer, so schlage man seinen positiven Theil unter einer höhern Kennziffer auf, suche nach den obigen Regeln die zugehörige Zahl und gebe dann ihrer höchsten Ziffer eine um so viel niedrigere Ordnung, als die negative Kennziffer angibt. Z. B. man soll zu dem Logarithmen 0,4588420 — 2 die Zahl suchen. Für den Log. 0,4588420 findet man die Zahl 2,876352; nun mache man die Ordnung der höchsten Ziffer und somit der ganzen Zahl um 2 niedriger, weil die negative Kennziffer = — 2 ist, so kommt die richtige Zahl 0,02876352.

Sollen solche Logarithmen zu andern addirt oder davon subtrahirt werden, so operire man zuerst, wie gewöhnlich, mit

dem positiven und negativen Theil und verändere dann die Kennziffer nach Maaßgabe des negativen, wie folgende Beispiele zeigen.

Man addire.

3,0548763
0,4758426 — 2
3,5307189 — 2 = 1,5307189.

0,3748265 — 1
0,4892563 — 3
0,8640828 — 4.

Man subtrahire.

4,3765328
0,2684792 — 3
4,1080536 + 3 = 7,1080536.

0,7286397 — 2
0,4587926 — 3
0,2698471 + 1 = 1,2698471.

Soll aber z. B. 3,4587926 von 0,2759364 — 2 abgezogen werden, so mache man die positive Kennziffer des Minuendus um so viel Einheiten größer, daß der Subtrahendus abgezogen werden kann, und vermehre dann um eben so viel Einheiten auch die negative Kennziffer, damit der Logarithme ungeändert bleibe. Also 0,2759364 — 2 verwandle man in 4,2759364 — 6 und ziehe nun 3,4587926 ab, so bleibt 0,8171438 — 6.

Sollen dergleichen Logarithmen mit einer Zahl multiplizirt werden, so multiplizire man sowol den negativen als positiven Theil und bringe dann die Kennziffer in Ordnung. Z. B. man soll 0,3872964—3 mit 8 multipliziren, so kommt 3,0983712—24, und dieser Logarithme ist dann = 0,0983712 — 21. Soll man in solche Logarithmen mit einer Zahl dividiren, so muß der Divisor in den negativen Theil gerade aufgehen; ist dies aber nicht von selbst der Fall, so muß man sowol die positive als negative Kennziffer um so viel vergrößern, bis der Divisor in der letztern aufgeht. Z. B. Man soll 0,3456789 — 3 durch 5 dividiren, so verwandle man erst 0,3456789 — 3 in 2,3456789 — 5 und dividire nun; der Quotient ist = 0,4691357 — 1. Die letzte Ziffer 7 im positiven Theil ist nicht ganz richtig, weil noch 4 übrig bleibt, man könnte also dafür lieber 8 nehmen, so daß der Logarithme = 0,4691358 — 1 wäre.

§. 210.
Aufgabe.

Zu finden, die wie vielste Potenz einer gegebenen Wurzel eine gegebene Zahl sei.

Der Sinn der Aufgabe ist folgender: Es sei eine Zahl, z. B. 8 gegeben; man will wissen, welche Potenz diese Zahl von einer andern gegebenen Zahl, z. B. 2 sei, d. h. auf welche Potenz 2 gehoben werden müsse, damit 8 herauskomme.

Diese Aufgabe kann nur vermittelst Logarithmen gelöst werden. Es sei die gegebene Zahl, die man als Potenz einer andern betrachten will, $= a$, und die Zahl, welche die Wurzel davon sein soll, $= b$, der Exponent der Potenz, auf welche b erhoben werden soll, damit a herauskomme, $= n$, so ist $a = b^n$, folglich $\text{Log. } a = n \text{ Log. } b$, also $n = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } b}$, d. h. man findet den gesuchten Exponenten, wenn man den Logarithmen von a durch den Logarithmen von b dividirt. Z. B. Auf welche Potenz muß 6 erhoben werden, damit 46656 herauskomme, oder welche Potenz ist 46656 von 6?

Es ist $\text{Log. } 46656 = 4{,}6689075$
und $\text{Log. } 6 = 0{,}7781513$,
also $\frac{\text{Log. } 46656}{\text{Log. } 6} = \frac{4{,}6689075}{0{,}7781513} = 6.$

Es gibt zwar eigentlich der Divisor, mit 6 multiplizirt, zum Produkte 46689078, aber daß zuletzt eine 8, nicht eine 5 kommt, davon ist die Ursache, weil die Logarithmen und die Zahlen, zu welchen sie gehören, nicht ganz genau das sind, was sie sein sollen.

Vierter Abschnitt.

Rechnung mit algebraischen Gleichungen.

§. 211.

Erklärung.

Unter Gleichung versteht man die Zusammenstellung von zwei verschiedenen Ausdrücken für einerlei Größe vermittelst des Zeichens der Gleichheit. Es sind z. B. 2 thlr. so viel als 3 Fl., wenn ich also setze 2 thlr. = 3 Fl., so ist dies eine Gleichung. Eben so ist $12 = 8 + 4$ eine Gleichung.

Die beiden Ausdrücke für einerlei Größe, welche durch das Zeichen der Gleichheit verbunden sind, heißen Hauptglieder der Gleichung; die einzelnen Größen, woraus jedes Hauptglied besteht, die Glieder. In der Gleichung $7+5 = 16-4$ sind $7+5$ und $16-4$ die Hauptglieder, die Größen $7, 5, 16, -4$ die Glieder.

Die Glieder können bekannte und unbekannte Größen sein. Der Zweck der Gleichung ist, die unbekannten durch die bekannten zu bestimmen, also dieselben zu finden. In der Gleichung $a+x = b-c$ sind $a, b, -c$ bekannte Glieder, x eine unbekannte Größe. Diese letztere soll bestimmt werden, und somit lehrt denn die Algebra, welche Methoden man anwenden müsse, um aus den bekannten Größen den Werth der unbekannten zu finden. Die Anwendung dieser Methoden in jedem einzelnen Falle heißt die Auflösung der Aufgabe. Darum nennt man die Algebra auch Analysis oder Auflösungskunst.

Die bekannten Größen können entweder durch bestimmte Zahlen, oder durch Buchstaben ausgedrückt werden. Im erstern Falle wird der Werth der unbekannten Größe bloß für den einzelnen gegebenen Fall bestimmt; im letztern erhält man eine allgemeine Bestimmung ihres Werths, die für alle mögliche Fälle paßt, welche in der Aufgabe enthalten gedacht werden können, und jeder einzelne Fall ergibt sich, wenn man die bekannten Buchstaben mit bestimmten Zahlwerthen vertauscht. Hat man z. B. die Auflösung gefunden $x = \frac{a+b}{c}$, so gibt es für x so viel Werthe, als man für a, b, c verschiedene Werthe setzen kann; hätte man aber bei Anwendung bestimmter Zahlen die Auflösung gefunden: $x = \frac{44}{2}$,

so gibt dies nur Einen Werth für x, nämlich Einen von denen, die unter jener allgemeinen Auflösung $x = \frac{a+b}{c}$ enthalten sind.

§. 212.

Erklärung.

Eine Gleichung heißt bestimmt, wenn in ihr nur Eine unbekannte Größe enthalten ist, unbestimmt, wenn mehrere unbekannte Größen darin vorkommen; denn offenbar hängt dann der Werth jeder unbekannten Größe nicht bloß von den bekannten, sondern auch von den übrigen unbekannten Größen ab, und der Werth der erstern muß sich verändern, so wie die andern unbekannten Größen andere Werthe bekommen. Habe ich die Gleichung $a+x = y+b$, so hängt der Werth von x nicht bloß von a und b, sondern auch von dem unbekannten y ab, und ich kann nicht eher x bestimmen, als bis ich auch y bestimmt habe. Daraus folgt, daß in Einer Gleichung sich nur dann die unbekannte Größe bestimmen lasse, wenn außer derselben keine andere unbekannte darin vorkommt. Sind also in einer Aufgabe mehr unbekannte Größen enthalten, so können dieselben nur dann bestimmt werden, wenn sich aus der Natur der Aufgabe so viel verschiedene Gleichungen bilden lassen, als unbekannte Größen da sind. Gesetzt es sind drei unbekannte Größen x, y, z vorhanden und man habe eben so viel verschiedene Gleichungen, so wird sich in der ersten Gleichung x durch y und z bestimmen lassen. Setzt man nun in der zweiten Gleichung diesen Werth von x statt x, so kommen in derselben nur noch y und z vor. Von diesen wird sich y durch z bestimmen lassen, und setzt man nun in der dritten Gleichung den Werth von x statt x und den Werth von y statt y, so erhält man eine Gleichung, worin nur z und lauter bekannte Größen vorkommen. Es kann also jetzt z genau bestimmt werden und dadurch ist denn auch y und x gefunden. Können also aus einer Aufgabe nicht so viel Gleichungen, als unbekannte Größen da sind, gebildet werden, so bleibt die Aufgabe unbestimmt und es lassen sich mehr oder weniger Werthe für die unbekannte Größe denken, die alle der Aufgabe Genüge leisten. Der Theil der Algebra, welcher von solchen unbestimmten Aufgaben handelt, heißt auch die unbestimmte Analysis.

§. 213.

Erklärung.

Eine Gleichung heißt rational, wenn die unbekannte Größe in derselben kein Wurzelzeichen vor sich hat, oder der

Exponent ihrer Potenz kein Bruch iſt, z. B. $ax = b$; $ax^2 = b - c$ ſind rationale Gleichungen. Im Gegentheil heißt die Gleichung irrational, z. B. $a - \sqrt{x} = c$ oder $a + x^{\frac{1}{2}} = cd$. Man kann jede irrationale Gleichung in eine rationale verwandeln.

§. 214.
Erklärung.

Eine Gleichung, worin die unbekannte Größe entweder urſprünglich oder nach allen mit der Gleichung vorgenommenen Veränderungen doch nur in der erſten Potenz vorkommt, heißt eine einfache Gleichung oder eine Gleichung vom erſten Grade. Solche Gleichungen aber, worin die unbekannte Größe entweder urſprünglich, oder nach allen damit vorgenommenen Veränderungen in einer höhern Potenz vorkommt, heißt eine höhere oder zuſammengeſetzte Gleichung und man benennt ſie nach dem Grade der Potenz, auf welche die unbekannte Größe erhoben iſt. Es gibt alſo höhere Gleichungen vom zweiten Grade oder quadratiſche, wenn die unbekannte Größe in der zweiten Potenz, Gleichungen vom dritten Grade oder kubiſche, wenn ſie in der dritten Potenz darin vorkommt u. ſ. w. So iſt z. B. $ax - d = c$, oder auch $ax - y = d + c$ eine Gleichung vom erſten Grade; dagegen $ax^2 + d = c$, oder $ax^2 - bx + c = d$ eine Gleichung vom zweiten; $x^3 - cx^2 + bx = d$, oder auch $ax^3 - cx = d$, oder $ax^3 - b = e$ eine Gleichung vom dritten Grade u. ſ. w.

§. 215.
Erklärung.

Wenn in einer Gleichung alle Glieder ſich auf der Einen Seite, auf der andern aber o befinden, ſo heißt die Gleichung eine vernichtete, z. B. $ax - b + c = o$.

§. 216.
Erklärung.

Die Algebra iſt alſo die Kunſt, aus den Umſtänden der Aufgabe eine ſolche Gleichung zu finden, worin die unbekannte Größe, von allen andern Größen abgeſondert, allein auf der linken oder rechten Seite des Gleichheitszeichens ſteht, auf der entgegengeſetzten Seite aber lauter bekannte Größen ſich befinden, die nun eben zuſammen den Werth der unbekannten Größe beſtimmen. Es gehören alſo zu dieſer Wiſſenſchaft zwei Stücke: 1) die Kunſt,

aus den in der Aufgabe angegebenen Umständen so viel Gleichungen zu bilden, als unbekannte Größen darin vorkommen, und 2) die Kunst, die gebildeten Gleichungen aufzulösen, d. h. sie so zu verändern, daß man zuletzt für jede unbekannte Größe eine Gleichung erhält, worin auf der einen Seite die unbekannte Größe allein und auf der andern lauter bekannte Größen sich befinden.

Für die Bildung der Gleichungen lassen sich keine Regeln geben; sie bleibt dem eigenen Nachdenken überlassen. Man muß alle in der Aufgabe angegebene Umstände wohl überlegen, sich deutlich denken, was in derselben bekannt oder unbekannt ist, beide Arten von Größen gehörig durch Buchstaben bezeichnen, und nun untersuchen, in welchen Verbindungen die bekannten und unbekannten Größen mit einander stehen und wie sich daraus zweierlei Ausdrücke für einerlei Sache, die man also einander gleich setzen kann, bilden lassen. Man muß also erstlich die Aufgabe verstehen, also Sachkenntniß haben, zweitens man muß das Talent des Nachdenkens, Vergleichens und Kombinirens besitzen, und drittens man muß durch Übung dieses Talent immer mehr ausbilden und vervollkommnen: dann ist es möglich, eine Wissenschaft zu erlernen, die ganz vorzüglich zur Ausbildung der höhern Geisteskräfte geschaffen ist.

Wie aber die gebildeten Gleichungen sich auflösen und so der Werth der unbekannten Größen bestimmen lasse, darüber gibt die Wissenschaft der Algebra bestimmte Regeln und dies ist ihr eigentlicher Gegenstand.

§. 217.

Grundsatz.

Gleiche Größen, auf gleiche Weise verändert, bleiben auch in ihrem veränderten Zustande einander gleich. Die Belege zu diesem allgemeinen Grundsatze finden sich in den einzelnen §. 8. angeführten Grundsätzen und diese letztern sind es daher eben, auf welchen die algebraische Auflösungskunst beruhet. Diese Kunst bestehe also darin, die gebildete Gleichung durch Anwendung jener Grundsätze und der späterhin bewiesenen Lehren der allgemeinen Arithmetik so zu verändern, daß die Hauptglieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens sich immer gleich bleiben, und dies so lange fortzusetzen, bis das Hauptglied auf der einen Seite bloß nur die unbekannte Größe und das andere lauter bekannte Größen enthält. Diese allgemeine Regel zerfällt in folgende spezielle.

§. 218.

1) Wenn das Unbekannte mit dem Bekannten durch Addition verbunden ist, so wird es durch Subtraktion allein auf Eine Seite gebracht.

Es sei die Gleichung gegeben $a+x=b$. Man ziehe auf beiden Seiten a ab, so erhält man $x=b-a$, eine Gleichung, worin die Hauptglieder auf beiden Seiten einander noch immer gleich sind (§. 8. Grundsatz 5.) und die unbekannte Größe x allein auf Eine Seite gebracht, also ihr Werth bestimmt ist. Es sei $a=8$ und $b=20$, so ist $x=20-8=12$.

§. 219.

2) Ist das Unbekannte durch Subtraktion mit dem Bekannten verbunden, so wird letzteres durch Addition weggeschafft.

Es sei die Gleichung gegeben $x-a=b$. Man addire auf beiden Seiten $+a$, so kommt $x=b+a$. Die Richtigkeit ergibt sich aus §. 8. Grundsatz 3.

§. 220.

Die vorigen beiden Regeln lassen sich allgemein so in Eine bringen: Wenn das Unbekannte mit dem Bekannten durch $+$ oder $-$ verbunden ist, so addire man auf beiden Seiten das Bekannte mit dem entgegengesetzten Zeichen, dann wird man das Unbekannte allein auf der Einen Seite erhalten. Also

wenn $x+a=b-c$,
so addire man $-a=-a$,
so kommt $x=b-c-a$.

Oder wenn $x-a+b=c+d$,
so addire man $+a-b=+a-b$,
so kommt $x=c+d+a-b$.

Und jetzt läßt sich die Regel noch kürzer so fassen: Wenn das Unbekannte auf Einer Seite steht und mit bekannten Größen durch $+$ oder $-$ verbunden ist, so befreiet man es von diesen, wenn man dieselben mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite schreibt. Aus der Gleichung $x+a-b=c$ erhält man also gleich $x=c-a+b$.

§. 221.

3) Steht das Unbekannte auf beiden Seiten, so bringt man es auch durch Anwendung der vorigen Regeln auf Eine.

Es

Es sei z. B. $3x + a = 2x + b$. Auf beiden Seiten $-2x - a$ addirt, kommt $x = b - a$.

§. 222.

4) Kommen in beiden Hauptgliedern vollkommen gleiche Glieder mit gleichen Zeichen vor, so kann man diese auf beiden Seiten gegen einander wegstreichen.

Es sei die Gleichung $2x - a + b = x + c - a + b - d$ gegeben, so muß man auf beiden Seiten $+a - b$ addiren, welches gibt $2x = x + c - d$, und eben dies erhält man, wenn man geradezu $-a$ und $+b$ auf beiden Seiten wegstreicht. Aus $2x = x + c - d$ erhält man dann $x = c - d$.

§. 223.

5) Ist das Unbekannte mit dem Bekannten durch Multiplikation verbunden, so wird es durch Division von demselben befreiet, vermöge §. 8. Grundsatz 13.

Es sei die Gleichung gegeben $5x - a = 8x - b$. Vermöge der vorigen Regeln das Unbekannte auf Eine Seite gebracht, erhält man $b - a = 3x$. Jetzt ist das Unbekannte nur noch mit dem Bekannten durch Multiplikation verbunden. Man befreiet es also offenbar davon, wenn man beide Hauptglieder durch das Bekannte (durch 3) dividirt und dann erhält man $\frac{b-a}{3} = x$.

Wären in diesem Beispiele in der ursprünglichen Gleichung statt der bestimmten Zahlen 5 und 8 Buchstabengrößen als Koeffizienten von x vorgekommen, also etwa die Gleichung $cx - a = dx - b$ gewesen, so hätte man, die Glieder mit x auf Eine Seite gebracht, gefunden $dx - cx = b - a$ oder auch $cx - dx = a - b$. Da nun linker Hand x ein gemeinschaftlicher Faktor ist, so kann man die Klammer anwenden und es kommt $x(d - c) = b - a$ oder $x(c - d) = a - b$, also im ersten Falle $x = \frac{b-a}{d-c}$ und im zweiten Falle $x = \frac{a-b}{c-d}$. Beide Werthe sind einerlei, denn wenn man $\frac{b-a}{d-c}$ im Zähler und Nenner mit -1 multiplizirt, wodurch der Werth des Bruchs sich nicht verändert, aber die Zeichen die entgegengesetzten werden, so kommt auch $\frac{a-b}{c-d}$.

§. 224.

6) Ist die unbekannte Größe durch Division mit der bekannten verbunden, so befreiet man sie davon durch Multiplikation.

Es sei die Gleichung $ax + \frac{cx}{b} = \frac{dx}{a} - c$ gegeben.

Nach §. 8. Grundsatz 11. wird die Gleichung unverändert bleiben, wenn man alle Glieder mit einerlei Zahl multiplizirt. Man multiplizire also erstlich alle Glieder mit dem Divisor b, so kommt

$$abx - cx = \frac{bdx}{a} - bc,$$

und nun alle Glieder mit a, so kommt

$$a^2bx + acx = bdx - abc.$$

Die vorigen Regeln nun angewendet, kommt

$$a^2bx + acx - bdx = -abc,$$

folglich $x(a^2b + ac - bd) = -abc,$

also $x = \frac{-abc}{a^2b + ac - bd} = \frac{-abc}{a(ab + c) - bd}.$

In der Gleichung $a^2bx + acx - bdx = -abc$ kommt das Hauptglied rechter Hand negativ. Will man, so kann man es positiv machen, wenn man alle Glieder mit -1 multiplizirt, d. h. allen Gliedern die entgegengesetzten Zeichen gibt. Dadurch erhält man, wenn man die positiven Glieder zuerst setzt,

$$bdx - a^2bx - acx = abc,$$

und folglich $x(bd - a^2b - ac) = abc,$

also $x = \frac{abc}{bd - a^2b - ac} = \frac{abc}{b(d - a^2) - ac},$

oder $\frac{abc}{bd - a(ab + c)}$, je nachdem man im Nenner den gemeinschaftlichen Faktor annehmen will.

Durch dieses Mittel kann man alle Brüche aus einer Gleichung wegschaffen und die Glieder in ganze Zahlen verwandeln. Man bringt eigentlich dadurch alle Glieder auf einerlei Nenner, und da gleiche Brüche, wenn sie gleiche Nenner haben, auch gleiche Zähler haben müssen, so kann man bloß die Zähler gleich setzen und die Nenner weglassen, wodurch denn eben jedes Glied in eine ganze Zahl verwandelt wird.

Es sei gegeben

$$a + \frac{x}{b} - \frac{c}{d} = b - m + \frac{dx}{c}.$$

Hier sind einige Glieder ganze Zahlen, aber man kann sie auch als Brüche vom Nenner 1 ansehen, und also die Gleichung schreiben:

$$\frac{a}{1} + \frac{x}{b} - \frac{c}{d} = \frac{b}{1} - \frac{m}{1} + \frac{dx}{c}.$$

Man multiplizire nun jedes Glied im Zähler und Nenner mit den Nennern der übrigen Brüche, so kommt

$$\frac{abdc}{bdc} + \frac{xdc}{bdc} - \frac{c^2b}{bcd} = \frac{b^2cd}{bcd} - \frac{bcdm}{bcd} + \frac{bd^2x}{bcd}.$$

Daraus folgt

$$\frac{abdc + xdc - c^2b}{bdc} = \frac{b^2cd - bcdm + bd^2x}{bcd},$$

also, da die Nenner gleich sind, auch die Zähler, und so erhält man denn die Gleichung

$$abdc + xdc - c^2b = b^2cd - bcdm + bd^2x,$$

folglich $xdc - xbd^2 = b^2cd + bc^2 - bcdm - abdc,$

oder nach Anwendung der Klammer

$$x(dc - bd^2) = bc(bd + c) - bcd(m + a),$$

oder $xd(c - bd) = bc[(bd + c - d)(m + a)],$

folglich $$x = \frac{bc[(bd + c - d)(m + a)]}{d(c - bd)}.$$

Besonders muß man die Gleichung unter einerlei Nenner bringen, wenn die unbekannte Größe im Divisor selbst vorkommt. Z. B. es sei die Gleichung gegeben

$$a + \frac{c}{x} = d - \frac{e}{x} + \frac{a}{b}.$$

Aus dieser kommt

$$axb + bc = bdx - be + ax.$$

Folglich $axb - bdx - ax = -be - bc,$

oder den Gliedern entgegengesetzte Zeichen gegeben, kommt

$$bdx + ax - abx = be + bc,$$

also $x(bd + a - ab) = b(e + c)$

oder $x[b(d - a) + a] = b(e + c),$

folglich $$x = \frac{b(e + c)}{b(d - a) + a}.$$

Wenn die unbekannte Größe im Divisor steht und auch in den Gliedern, welche ganze Zahlen sind, vorkommt, so geht die Gleichung in eine vom zweiten Grade über. Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$\frac{a - b}{x} + c = dx - m,$$

so kommt $a - b + cx = dx^2 - mx.$

Von solchen Gleichungen sehe man weiter unten.

§. 225.

7) Haben alle Glieder einer Gleichung einen gemeinschaftlichen Faktor, so dividire man sämmtliche Glieder durch denselben.

Z. B. ist die Gleichung gegeben

$$ax + ba - abx = ac - adx + ae,$$

so kommt nach der Division mit a die Gleichung

$$x + b - bx = c - dx + e,$$

also $x + dx - bx = c + e - b,$

folglich $x(1 + d - b) = c + e - b,$

also $$x = \frac{c + e - b}{1 + d - b}.$$

Man nehme sich in Acht, bei solchen Quotienten zu denken, daß man das $-b$ im Zähler und Nenner gegenseitig wegstreichen könne, denn jener Bruch

$\frac{c+e-b}{1+d-b}$ ist eigentlich $= \frac{c}{1+d-b} + \frac{e}{1+d-b} - \frac{b}{1+d-b}$,

woraus sich denn der Fehler jener vermeinten Abkürzung von selbst ergibt.

Ist die unbekannte Größe in allen Gliedern der gemeinschaftliche Faktor, so wird durch die Division mit derselben eine höhere Gleichung in eine andere verwandelt, die einen Grad niedriger ist; aus einer quadratischen z. B. eine einfache Gleichung. Z. B. Aus

$$ax^3 + bx^2 - x = dx^2 + cx$$

wird

$$ax^2 + bx - 1 = dx + c,$$

also aus einer kubischen eine quadratische, und aus

$$bx^2 - cx + dx = ex^2 - mx$$

wird

$$bx - c + d = ex - m,$$

also aus der quadratischen eine einfache Gleichung. Käme bei einer Gleichung in allen Gliedern die unbekannte Größe nur in der ersten, oder überhaupt in einerlei Potenz vor, so würde sie ganz aus derselben wegfallen und also durch die Gleichung gar nicht zu bestimmen sein. Z. B.

$$ax + bx = cx - dx \text{ gibt } a + b = c - d$$

und $dx^2 - ex^2 = bx^2 + ax^2$ $\quad d - e = b + a,$

also kann x durch keine von beiden Gleichungen bestimmt werden. Folgt eine solche Gleichung aus einer Aufgabe, so ist diese von der Art, daß man für die unbekannte Größe setzen kann, was man will; den Bedingungen der Aufgabe geschieht doch Genüge.

§. 226.

8) Eine irrationale Gleichung wird in eine rationale verwandelt, wenn man die unbekannte Größe mit ihrem Wurzelzeichen erstlich von aller Verbindung mit bekannten Größen befreiet, dann auf Eine Seite bringt und nun die Hauptglieder auf die Potenz erhebt, welche der Exponent des Wurzelzeichens anzeigt.

Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$a + b\sqrt{x} = c - x,$$

so hat man erstlich $b\sqrt{x} = c - x - a,$

dann $\sqrt{x} = \frac{c-x-a}{b},$

und nun $(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{c-x-a}{b}\right)^2,$

oder $x = \left(\frac{c-x-a}{b}\right)^2.$

Auf der rechten Seite wirklich quadrirt, kommt

$$x = \frac{c^2 - 2cx + x^2 - 2ac + 2ax + a^2}{b^2},$$

also $b^2x = c^2 - 2cx + x^2 - 2ac + 2ax + a^2,$
oder $2ac - c^2 - a^2 = x^2 - 2cx + 2ax - b^2x.$
Dies ist nun eine rationale quadratische Gleichung, deren Auflösung unten erklärt wird.

Es sei die Gleichung gegeben

$$b + a\sqrt{x} = c + b\sqrt{x},$$

so kommt

1) $b - c = b\sqrt{x} - a\sqrt{x},$

und da $\sqrt{x}$ jetzt der gemeinschaftliche Faktor auf der rechten Seite ist, so kommt

2) $b - c = (b - a)\sqrt{x},$ folglich

3) $\frac{b-c}{b-a} = \sqrt{x},$ und also

4) $\left(\frac{b-c}{b-a}\right)^2 = x.$

Manchmal ist in einer Wurzel noch eine Wurzel enthalten; dann bringe man erst die Hauptwurzel weg und nachher die eingeschlossene. Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$a + b = c - \sqrt{(a - b\sqrt{x})},$$

so hat man

1) $a + b - c = -\sqrt{(a - b\sqrt{x})}.$

Daraus

2) $(a + b - c)^2 = a - b\sqrt{x}.$

Hieraus folgt

3) $(a + b - c)^2 - a = -b\sqrt{x},$ und nun

4) $\frac{(a+b-c)^2 - a}{b} = -\sqrt{x},$ also endlich

5) $\left(\frac{(a+b-c)^2 - a}{b}\right)^2 = x.$

Die Wurzelzeichen haben jetzt — vor sich, aber das Quadrat einer negativen Zahl ist allemal positiv, also x auch positiv.

Es sey z. B. $a = 15$, $b = 3$, $c = 21$, so ist

$$x = \left(\frac{21-4-c^2-x}{b}\right)^2 = \left(\frac{15+3-x^2-15}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{15-x^2-15}{3}\right)^2 = \left(\frac{-x^2-15}{3}\right)^2 = \left(\frac{9-15}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-6}{3}\right)^2 = \frac{36}{9} = 4.$$

Setzt man nun diesen Werth für x in die gegebene Gleichung, so wird

$a+b = c-\sqrt{a-b\sqrt{x}}$, aufgelöst durch

$15+3 = 21-\sqrt{15-3\sqrt{4}}$,

oder $18 = 21-\sqrt{15-3\cdot 2}$,

oder $18 = 21-\sqrt{15-6}$,

oder $18 = 21-\sqrt{9}$,

oder $18 = 21-3$,

oder $18 = 18$, wie es sein muß.

Gerade so verfährt man auch bei Wurzeln mit höhern Exponenten. Es sei gegeben

$$a\sqrt[2]{x}+b-c = d\sqrt[3]{x}-e\sqrt[3]{x}+f,$$

so hat man

1) $a\sqrt[2]{x}-d\sqrt[2]{x}+e\sqrt[2]{x} = f-b+c$, oder

2) $(a-d+e)\sqrt[2]{x} = f-b+c$, also

$\sqrt[2]{x} = \frac{f-b+c}{a-d+e}$; folglich auf beiden Seiten den Kubus genommen, kommt

$$x = \left(\frac{f-b+c}{a-d+e}\right)^3.$$

Es sei $a=5$, $d=3$, $e=7$, $f=8$, $b=6$, $c=4$, so ist $x = \left(\frac{8-6+4}{5-3+7}\right)^3 = \left(\frac{6}{9}\right)^3 = \frac{216}{729} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$, und wirklich ist

$5\sqrt[2]{\frac{8}{27}}+6-4 = 3\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-7\sqrt[2]{\frac{8}{27}}+8$, denn $5\sqrt[3]{\frac{8}{27}}+6-4 = 5\cdot\frac{2}{3}+6-4 = 3\frac{1}{3}+6-4 = 3\frac{1}{3}+2 = 5\frac{1}{3}$ und $3\sqrt[2]{\frac{8}{27}}-7\sqrt[2]{\frac{8}{27}}+8 = 3\cdot\frac{2}{3}-7\cdot\frac{2}{3}+8 = 2-4\frac{2}{3}+8 = 2+8-4\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Hat die unbekannte Größe Wurzelzeichen mit verschiedenen Exponenten vor sich, so suche man sie nach und nach wegzuschaffen. Z. B. es sei die Gleichung gegeben

$$a = \sqrt[2]{x}+\sqrt{x},$$

so hat man

1) $a - \sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$, also

2) $(a - \sqrt{x})^3 = x$.

Man erhebe nun wirklich das Glied linker Hand auf den Kubus, indem man das Produkt $(a - \sqrt{x}) \cdot (a - \sqrt{x}) \cdot (a - \sqrt{x})$ ausrechnet

$$\begin{array}{r} a - \sqrt{x} \\ a - \sqrt{x} \\ \hline - a\sqrt{x} + x \\ a^2 - a\sqrt{x} \\ \hline a^2 - 2a\sqrt{x} + x \\ a - \sqrt{x} \\ \hline - a^2\sqrt{x} + 2ax - x\sqrt{x} \\ a^3 - 2a^2\sqrt{x} \quad ax \\ \hline a^3 - 3a^2\sqrt{x} + 3ax - x\sqrt{x}. \end{array}$$

Es ist also

$$a^3 - 3a^2\sqrt{x} + 3ax - x\sqrt{x} = x,$$

folglich $a^3 + 3ax - x = 3a^2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$,

oder $a^3 + 3ax - x = (3a^2 + x)\sqrt{x}$,

also $\frac{a^3 + 3ax - x}{3a^2 + x} = \sqrt{x}$.

Nun mache man auf beiden Seiten das Quadrat, so kommt

$$\left(\frac{a^3 + 3ax - x}{3a^2 + x}\right)^2 = x,$$

oder $\left(\frac{a^3 + x(3a - 1)}{3a^2 + x}\right)^2 = x.$

Macht man vom Zähler und Nenner wirklich das Quadrat, so kommt

$$\frac{a^6 + 2a^3x(3a - 1) + x^2[(3a - 1)^2]}{9a^4 + 6a^2x + x^2} = x.$$

Daraus folgt denn die Gleichung

$a^6 + 2a^3x(3a - 1) + x^2[(3a - 1)^2] = 9a^4x + 6a^2x^2 + x^3$,

und daraus folgende:

$x^3 + 6a^2x^2 - x^2[(3a - 1)^2] + 9a^4x - 2a^3x(3a - 1) = a^6$,

oder

$x^3 + x^2[6a^2 - (3a - 1)^2] + x[9a^4 - 2a^3(3a - 1)] = a^6$,

oder

$x^3 + x^2(6a^2 - 9a^2 + 6a - 1) + x(9a^4 - 6a^4 + 2a^3 = a^6$,

oder

$x^3 + x^2(-3a^2 + 6a - 1) + x(3a^4 + 2a^3) = a^6$,

oder

$x^3 + x^2[3a(2 - a) - 1] + x[a^3(3a + 2)] = a^6$.

So hat man nun eine irrationale Gleichung, die nach den unten folgenden Regeln sich auflösen läßt.

Es sei die Gleichung gegeben

$$a\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}=\sqrt[3]{ax}+b\sqrt{x},$$

so folgt daraus

$$a\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{ax}=b\sqrt{x}+\sqrt{x},$$

oder $$a\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}(b+1),$$

oder $$\sqrt[3]{x}(a-\sqrt[3]{a})=\sqrt{x}(b+1).$$

Auf beiden Seiten zum Kubus erheben, kommt

$$x[(a-\sqrt[3]{a})^3]=[\sqrt{x}(b+1)]^3,$$

oder $$x[(a-\sqrt[3]{a})^3]=(\sqrt{x})^3(b+1)^3,$$

oder $$x[(a-\sqrt[3]{a})^3]=x\sqrt{x}(b+1)^3.$$

Mit x auf beiden Seiten dividirt, kommt

$$(a-\sqrt[3]{a})^3=\sqrt{x}(b+1)^3.$$

Und nun auf beiden Seiten das Quadrat gemacht, erhält man

$$(a-\sqrt[3]{a})^6=x(b+1)^6.$$

Also $$\frac{(a-\sqrt[3]{a})^6}{(b+1)^6}=x.$$

Es sei $a=27$, $b=11$, so ist

$$\frac{(a-\sqrt[3]{a})^6}{(b+1)^6}=\frac{(27-3)^6}{(11+1)^6}=\frac{24^6}{12^6}=\frac{2^6}{1^6}=2^6=64=x,$$

und es ist wirklich

$$a\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}=\sqrt[3]{ax}+b\sqrt{x},$$

nämlich $27\sqrt[3]{64}-\sqrt{64}=\sqrt[3]{27\cdot 64}+11\sqrt{64},$

oder $27\cdot 4-8=3\cdot 4+11\cdot 8,$

oder $108-8=12+88,$

oder $100=100.$

Man hätte auch die Wurzelzeichen in gebrochene Exponenten verwandeln können. Der Übung wegen wollen wir dies noch hersetzen. Alsdann ist $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, also

$$a\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}=ax^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}$$

und $$\sqrt[3]{ax}+b\sqrt{x}=\sqrt[3]{a}.x^{\frac{1}{3}}+b.x^{\frac{1}{2}},$$

folglich die Gleichung

$$ax^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{a}.x^{\frac{1}{3}}+b.x^{\frac{1}{2}}.$$

Man dividire durchgängig mit $x^{\frac{1}{6}}$, so kommt

$$a - x^{\frac{3}{6}-\frac{3}{6}} = \sqrt[3]{a} + b \cdot x^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}},$$

oder $$a - x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{a} + b \cdot x^{\frac{1}{6}}.$$

Also $$a - \sqrt[3]{a} = bx^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{6}},$$

oder $$a - \sqrt[3]{a} = (b+1)x^{\frac{1}{6}}.$$

Alles auf die sechste Potenz erhoben, kommt

$$(a - \sqrt[3]{a})^6 = (b+1)^6 x,$$

folglich $$\frac{(a - \sqrt[3]{a})^6}{(b+1)^6} = x,$$ wie oben.

§. 227.
Erklärung.

Wenn die bekannten Größen allgemein durch Buchstaben ausgedrückt werden, wie wir bisher gethan haben, so gibt der zuletzt für die unbekannte Größe gefundene Werth eine **Formel**, nach welcher man in allen ähnlichen Aufgaben die unbekannte Größe berechnen kann, ohne daß man sie aufs neue algebraisch zu suchen braucht. Dies ist ein Hauptvortheil des Gebrauchs der Buchstabengrößen. Alle in den bisherigen Auflösungen gefundene Ausdrücke für x sind dergleichen algebraische Formeln.

§. 228.
Anmerkung.

Die bisherigen Regeln gelten für die Auflösung aller Arten von Gleichungen des ersten Grades mit Einer unbekannten Größe. Ehe wir aber zu den Gleichungen der höhern Grade fortgehen, wollen wir erst die Aufgaben mit mehrern unbekannten Größen betrachten.

§. 229.
Aufgabe.

Wenn in einer Aufgabe mehrere unbekannte Größen vorkommen und aus derselben so viel von einander unabhängige Gleichungen entwickelt werden können, als unbekannte Größen da sind, diese Gleichungen aufzulösen und das Unbekannte zu finden.

Auflösung.

Die Auflösung solcher Gleichungen besteht im Allgemeinen darin, daß man aus allen gegebenen Gleichungen eine einzige

zu finden sucht, wodurch alle unbekannte Größen bestimmt werden. Dieses kann nun nach drei Methoden geschehen.

§. 230.

I. Methode der Substitution.

Man bestimme in irgend einer Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe, indem man alle übrige unbekannte einstweilen als bekannt ansieht und so behandelt. Setzt man nun diesen gefundenen Werth in der zweiten Gleichung statt der unbekannten Größe, so erhält man eine Gleichung, worin die vorige unbekannte Größe nicht mehr vorkommt. Aus dieser kann man also den Werth einer zweiten unbekannten Größe entwickeln und diesen nun in der dritten Gleichung statt der zweiten, so wie auch den Werth der ersten unbekannten Größe statt dieser ersten unbekannten setzen. So wird man nun eine Gleichung erhalten, worin zwei unbekannte Größen fehlen. Fährt man nun auf diese Art immer fort, so muß man endlich auf eine Gleichung kommen, worin sich nur noch eine unbekannte Größe befindet, die dann nach den schon gegebenen Regeln entwickelt wird. Hat man nun diese gefunden, so lassen sich durch Substitutionen rückwärts auch die übrigen unbekannten bestimmen.

Beispiele.

1) Es werden 2 unbekannte Größen x und y gesucht, für welche die Gleichungen gegeben sind $x+y=a$ und $x-y=b$.

Aus der ersten Gleichung hat man

$$x = a - y.$$

Diesen Werth für x in die zweite Gleichung statt x gesetzt, kommt

$$a-y-y = b,$$

oder $$a-2y = b,$$

oder $$-2y = b-a,$$

oder $$2y = a-b,$$

also $$y = \frac{a-b}{2}.$$

Setzt man nun diesen Werth für y in die Gleichung für x, so erhält man

$$x = a - \frac{a-b}{2},$$

also $$2x = 2a-(a-b),$$

oder $$2x = 2a-a+b,$$

oder $$2x = a+b,$$

also $$x = \frac{a+b}{2}.$$

2) Es werden 3 unbekannte Größen: x, y und z gesucht, für welche man die 3 Gleichungen hat:

1) $ax+y-c=z$;
2) $x+z=y+a$;
3) $z-x+y=ca$.

Sucht man aus der zweiten Gleichung den Werth für x, so kommt $x=y+a-z$.

Diesen Werth setze man statt x in die dritte Gleichung, so kommt $z-(y+a-z)+y=ca$,

oder $z-y-a+z+y=ca$,

also da $-y$ und $+y$ sich heben und $z+z=2z$ ist, so kommt $2z-a=ca$,

oder $2z=ca+a$,

oder $2z=a(c+1)$,

also $z=\frac{a(c+1)}{2}$.

Nun schreibe man den Werth für z statt z in die erste Gleichung und setze in derselben auch für x den Werth, so kommt

$$a(y+a-z)+y-c=\frac{a(c+1)}{2},$$

oder $$ay+a^2-az+y-c=\frac{a(c+1)}{2},$$

oder $$ay+a^2-\frac{a^2(c+1)}{2}+y-c=\frac{a(c+1)}{2}.$$

Alle Glieder mit 2 multiplizirt, um die Brüche wegzuschaffen, kommt

$2ay+2a^2-a^2(c+1)+2y-2c=a(c+1)$,
oder $2ay+2y=a^2(c+1)+a(c+1)-2a^2+2c$,
oder $y[2(a+1)]=(c+1)[a(a+1)]-2(a^2-c)$,

also $$y=\frac{a(a+1)(c+1)-2(a^2-c)}{2(a+1)}.$$

Diesen Werth für y, so wie auch den Werth für z, setze man in die erste Gleichung für x.

Es war nämlich $x=y+a-z$, folglich

$$x=\frac{a(a+1)(c+1)-2(a^2-c)}{2(a+1)}+a-\frac{a(c+1)}{2}.$$

Man bringe alle Glieder rechts auf den Nenner $2(a+1)$, so erhält man

$$x=\frac{a(a+1)(c+1)-2(a^2-c)+2a(a+1)-a(a+1)(c+1)}{2(a+1)},$$

oder $$x=\frac{a(a+1)(c+1)-a(a+1)(c+1)-2(a^2-c)+2a(a+1)}{2(a+1)}.$$

Hier heben sich im Zähler die ersten zwei Glieder gegen einander auf, also kommt

$$x = \frac{2a(a+1)-2(a^2-c)}{2(a+1)}$$
$$= \frac{2a^2+2a-2a^2+2c}{2(a+1)}$$
$$= \frac{2a+2c}{2(a+1)} = \frac{a+c}{a+1}.$$

Man hat also gefunden

$$x = \frac{a+c}{a+1},$$
$$y = \frac{a(a+1)(c+1)-2(a^2-c)}{2(a+1)} = \frac{a(c+1)}{2} - \frac{(a^2-c)}{a+1},$$
$$z = \frac{a(c+1)}{2}.$$

Es sei $a = 3$, $c = 4$, so ist

$$x = \frac{3+4}{3+1} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4},$$
$$y = \frac{3(4+1)}{2} - \frac{9-4}{3+1} = \frac{15}{2} - \frac{5}{4} = \frac{30}{4} - \frac{5}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4},$$
$$z = \frac{3(4+1)}{2} = \frac{3\cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Die erste Gleichung $ax + y - c = z$ ist also $3\cdot\frac{7}{4} + 6\frac{1}{4} - 4 = 7\frac{1}{2}$ und zwar richtig, denn $3\cdot\frac{7}{4} + 6\frac{1}{4} - 4$ ist $= \frac{21}{4} + \frac{2}{4} = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$.

Die zweite Gleichung $x + z = y + a$ ist $1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} = 6\frac{1}{4} + 3$ und zwar auch richtig, denn $1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} = 9\frac{1}{4}$ und $6\frac{1}{4} + 3$ auch $= 9\frac{1}{4}$.

Die dritte Gleichung $z - x + y = ca$ ist $7\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} + 6\frac{1}{4} = 4\cdot 3$, ebenfalls richtig, denn $4\cdot 3 = 12$ und $7\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} + 6\frac{1}{4} = 7\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 12$.

§. 231.

II. Methode der Kombination.

Diese besteht darin, daß man aus jeder Gleichung den Werth einer und derselben unbekannten Größe sucht, indem man einstweilen alle übrige unbekannte für bekannte ansieht. Nun setzt man die gefundenen Werthe einander gleich und bestimmt daraus zwei oder mehr Werthe für die zweite unbekannte Größe. Diese einander gleich gesetzt, geben wieder Werthe für die dritte unbekannte Größe u. s. w. Auf diese Art muß man endlich für die letzte unbekannte Größe einen Werth in lauter bekannten Größen bekommen, woraus sich denn durch Substitutionen

rückwärts die übrigen unbekannten Größen werden bestimmen lassen.

Anmerkung. Fallen bei Entwickelung der Gleichungen eine oder einige unbekannte Größen weg, so kommt man zu seinem Ziele, ohne daß man nöthig hat, alle sonst erforderliche Gleichungen zu machen. Man erhält nämlich alsdann bald einen Werth für eine unbekannte Größe, der lauter bekannte enthält. Diesen Werth substituire man in den andern Gleichungen, suche so die zweite unbekannte Größe u. s. w.

Beispiele.

Man sucht vier unbekannte Größen: x, y, z, v, für welche folgende 4 Gleichungen gegeben sind:

I. $x+y+z-v=a$,
II. $x+y+v-z=b$,
III. $x+z+v-y=c$,
IV. $z+v+y-x=d$.

Aus I. folgt $x=a-y-z+v$, welche Gleichung wir A nennen wollen.
" II. " $x=b-y-v+z$, welche Gleichung wir B nennen wollen.
" III. " $x=c-z-v+y$, welche Gleichung wir C nennen wollen.
" IV. " $x=z+v+y-d$, welche Gleichung wir D nennen wollen.

Man setze die Werthe für x in A und B einander gleich, so bekommt man

$$a-y-z+v=b-y-v+z.$$

Hier hebt sich $-y$ auf beiden Seiten, also kommt

$$a-z+v=b-v+z,$$

folglich, wenn man z auf Eine Seite allein bringt, kommt

$$a+v-b+v=z+z,$$

oder $a-b+2v=2z$,

also $\frac{a-b+2v}{2}=z$,

oder $v+\frac{a-b}{2}=z$. Diese Gleichung heiße E.

Nun setze man die Werthe für x in E und D einander gleich, so wird sich ein zweiter Werth für z ergeben, nämlich

$$z+v+y-d=c-z-v+y.$$

Da sich y auf beiden Seiten hebt, so kommt

$$z+v-d=c-z-v,$$

und z allein auf Eine Seite gebracht, kommt

$$z + z = c - v - v + d,$$

oder $$2z = c - 2v + d,$$

also $$z = \frac{c - 2v + d}{2},$$

oder $$z = \frac{c + d}{2} - v.$$ Diese Gleichung heiße F.

Setzt man nun die Werthe für z in E und F einander gleich, so wird sich v in lauter bekannten Größen ergeben, nämlich

$$v + \frac{a - b}{2} = \frac{c + d}{2} - v.$$

Alles auf Einen Nenner gebracht und die Zähler gleich gesetzt, kommt $$2v + a - b = c + d - 2v.$$

Und v auf Eine Seite allein gebracht, kommt

$$2v + 2v = c + d - a + b,$$

oder $$4v = b + c + d - a,$$

also $$v = \frac{b + c + d - a}{4}.$$ Diese Gleichung heiße G.

Substituirt man diesen Werth für v in der Gleichung E, so wird sich z in bekannten Größen ergeben, nämlich es ist dann

$$z = \frac{b + c + d - a}{4} + \frac{a - b}{2}.$$

Die Brüche auf Einen Nenner gebracht, kommt

$$z = \frac{b + c + d - a}{4} + \frac{2a - 2b}{4}$$

$$= \frac{b + c + d - a + 2a - 2b}{4}$$

$$= \frac{c + d + a - b}{4} \text{ oder } \frac{a + c + d - b}{4}.$$ Diese Gleichung heiße H.

Setzt man nun die Werthe für x in A und C einander gleich, so wird sich ein Werth für y ergeben. Es ist nämlich

$$a - y - z + v = c - z - v + y.$$

Da sich $-z$ auf beiden Seiten hebt, so kommt

$$a - y + v = c - v + y.$$

Man bringe y allein auf Eine Seite, so kommt

$$a - c + v + v = y + y,$$

oder $$a - c + 2v = 2y.$$

Setzt man nun statt v den in G gefundenen Werth, so erhält man

$$a - c + \frac{2(b + c + d - a)}{4} = 2y,$$

oder $$a - c + \frac{b + c + d - a}{2} = 2y,$$

und alles linker Hand auf den Nenner 2 gebracht, kommt

$$\frac{2a+2c+b+c+d-a}{2} = 2y,$$

oder $$\frac{a+b+d-c}{2} = 2y,$$

also $$\frac{a+b+d-c}{4} = y.$$

Endlich erhält man auch den Werth für x, wenn man die für z, v und y gefundenen Werthe in Eine von den 4 Gleichungen für x setzt, also z. B. in D, wo $x = z+v+y-d$ war. Alsdann ist

$$x = \frac{a+c+d-b}{4} + \frac{b+c+d-a}{4} + \frac{a+b+d-c}{4} - d.$$

Alles auf Einen Nenner gebracht, kommt

$$x = \frac{a+c+d-b+b+c+d-a+a+b+d-c-4d}{4} = \frac{a+b+c-d}{4}.$$

Es sei in Zahlen $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$, so ist

$$x = \frac{3+4+5-6}{4} = 1\tfrac{1}{2},$$
$$y = \frac{3+4+6-5}{4} = 2,$$
$$z = \frac{3+5+6-4}{4} = 2\tfrac{1}{2},$$
$$v = \frac{4+5+6-3}{4} = 3.$$

Diese Werthe für x, y, z, v gesetzt, wird sich die Richtigkeit derselben aus der Übereinstimmung mit den angenommnen Gleichungen ergeben. Es ist nämlich die Gleichung

I. $= 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} - 3 = 3,$
II. $= 1\frac{1}{2} + 2 + 3 - 2\frac{1}{2} = 4,$
III. $= 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3 - 2 = 5,$
IV. $= 2\frac{1}{2} + 3 + 2 - 1\frac{1}{2} = 6.$

§. 232.

III. Methode der Addition und Subtraktion.

Diese Methode besteht darin, daß man die gegebenen Gleichungen zu einander addirt oder von einander subtrahirt, um durch dieses Mittel eine unbekannte Größe nach der andern wegzuschaffen und so den Werth der übrigen leichter zu finden. Zu dem Ende wählt man willkührlich Eine der unbekannten Größen, die man wegschaffen will, und zwei Gleichungen, aus denen sie weggebracht werden soll. Nun sind zwei Fälle möglich:
1) Die wegzuschaffende Größe hat in beiden Gleichungen einerlei

Koeffizienten; alsdann addirt man beide Gleichungen, wenn die wegzuschaffende Größe in beiden entgegengesetzte Zeichen, oder subtrahirt sie, wenn sie einerlei Zeichen hat. 2) Die wegzuschaffende Größe hat in beiden Gleichungen verschiedene Koeffizienten; alsdann multiplizirt man die Glieder der einen Gleichung mit dem Koeffizienten der wegzuschaffenden Größe in der andern Gleichung, wodurch man zwei neue Gleichungen erhält, in denen die wegzuschaffende Größe einerlei Koeffizienten hat, weil dieser gleich dem Produkte aus den beiden Koeffizienten der unbekannten Größe in den beiden gegebenen Gleichungen ist. Mit diesen neuen Gleichungen verfährt man nun, wie beim ersten Falle und so erhält man eine dritte Gleichung, in welcher die fortzuschaffende Größe fehlt. Eben so schafft man nun die nämliche unbekannte Größe aus jedem Paare der übrigen Gleichungen fort, und indem man auf diese Art mit allen unbekannten Größen bis auf Eine verfährt und sie wegschafft, so behält man zuletzt eine Gleichung, worin nur noch Eine unbekannte Größe vorkommt, deren Werth sich also jetzt bestimmen läßt. Durch Substitution erhält man dann die Werthe der übrigen unbekannten Größen.

Beispiel.

Es seien folgende 4 Gleichungen, worin die unbekannten Größen einerlei Koeffizienten haben, gegeben

I. $x+y+z-v=a$,
II. $y-x+z-v=b$,
III. $z-x-y+v=c$,
IV. $-v+z+x-y=d$.

In I. und II. hat x einerlei Zeichen; man addire also II. zu I., nachdem man die Glieder in II. so geordnet hat, daß gleiche Buchstaben unter I. kommen. Es ist also

I. $= x+y+z-v=a$
II. $= -x+y+z-v=b$

Summe $= 2y+2z-2y=a+b$. Diese Gleichung heiße A.

In II. und III. hat x einerlei Zeichen, man ziehe also III. von II. ab und ordne die Glieder von III. nach den Gliedern von II. Also

II. $= y-x+z-v=b$
$-$III. $= +y+x-z-v=-c$

II.$-$III. $= 2y-2v=b-c$. Diese Gleichung heiße B.

In

In III. und IV. hat x wieder verschiedene Zeichen, man addire also IV. zu III., nachdem man die Glieder in IV. wie in III. geordnet hat. Also

III. $= z - x - y + v = c$
IV. $= z + x - y - v = d$

Summe $= 2z - 2y = c + d$. Diese Gleichung heiße C.

Will man nun y wegschaffen, so wähle man die Gleichungen B und C, in welchen y mit verschiedenen Zeichen vorkommt. Man braucht also beide nur zu addiren. Es war aber

$B = 2y - 2v = b - c$
$C = -2y + 2z = c + d$

Summe $= 2z - 2v = b + d$. Diese Gleichung heiße D.

Eben so schaffe man y aus A und B weg, indem man B von A abzieht, so ist

$A = 2y + 2z - 2v = a + b$
$-B = -2y + 2v = -b + c$

Also $A - B = -2z = a + c$,

woraus sich gleich $z = \frac{a+c}{2}$ bestimmen läßt.

Diesen Werth für z setze man in die Gleichung D, so erhält man einen Werth für v. Also

$D = a + c - 2v = b + d$,
oder $2v - a - c = -b - d$,
oder $2v = a - b + c - d$,
also $v = \frac{a-b+c-d}{2}$.

Setzt man diesen Werth für v in die Gleichung B, so wird y bestimmt. Also

$B = 2y - (a - b + c - d) = b - c$
oder $2y - a + b - c + d = b - c$,
oder $2y = b - c + a - b + c - d$,
oder $2y = a - d$,
also $y = \frac{a-d}{2}$.

Nun setze man in eine von den ursprünglichen Gleichungen statt z, v, y die gefundenen Werthe, so wird x bestimmt. Es war z. B. I. $= x + y + z - v = a$. Also

$$x + \frac{a-d}{2} + \frac{a+c}{2} - \frac{a-b+c-d}{2} = a.$$

Alles auf Einen Nenner gebracht und die Zähler gleich gesetzt, kommt

$2x + a - d + a + c - a + b - c + d = 2a$.

Folglich $2x = 2a - a + d - a - c + a - b + c - d$,
oder $2x = a - b$,
also $x = \frac{a-b}{2}$.

Setzen wir $a = 8$, $b = -4$, $c = 6$, $d = -12$, so ist

$x = \frac{a-b}{2} = \frac{8-(-4)}{2} = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$,

$y = \frac{a-d}{2} = \frac{8-(-12)}{2} = \frac{8+12}{2} = 10$,

$z = \frac{a+c}{2} = \frac{8+6}{2} = 7$,

$v = \frac{a-b+c-d}{2} = \frac{8-(-4)+6-(-12)}{2} = \frac{8+4+6+12}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

Daß nun diese Werthe richtig sind, erhellet, wenn man die ursprünglichen Gleichungen in dieselben verwandelt. Es war nämlich

I. $= x + y + z - v = a$, also $6 + 10 + 7 - 15 = 8$,
II. $= y - x + z - v = b$, $= 10 - 6 + 7 - 15 = -4$,
III. $= z - x - y + v = c$, $= 7 - 6 - 10 + 15 = 6$,
IV. $= x - v + z - y = d$, $= 6 - 15 + 7 - 10 = -12$.

§. 233.

Im vorigen Beispiele hatten die unbekannten Größen einerlei Koeffizienten. Jetzt wollen wir noch ein Beispiel durchführen, worin verschiedene Koeffizienten vorkommen, diese aber zuerst durch bestimmte Zahlen ausdrücken.

Es seien die Gleichungen gegeben

I. $3x + 2y - z = a$,
II. $2x - 3y + 2z = b$,
III. $4z - x + y = c$.

Man bringe, wenn man x wegschaffen will, in I. und II. x unter einerlei Koeffizienten, so ist, wenn man die Glieder in I. mit 2, dem Koeffizienten von x in II., und die Glieder von II. mit 3, dem Koeffizienten von x in I., multiplizirt,

I. $= 6x + 4y - 2z = 2a$ und II. $= 6x - 9y + 6z = 3b$.

Das Glied x hat in beiden Gleichungen einerlei Zeichen, also ziehe man II. von I. ab, oder addire II. zu I. mit entgegengesetzten Zeichen. Also

I. $= 6x + 4y - 2z = 2a$
und $-$II. $= -6x + 9y - 6z = -3b$
folglich I. $-$ II. $= 13y - 8z = 2a - 3b$.

Diese Gleichung heiße A.

Nun schaffe man x aus II. und III. weg, indem man III. mit 2, dem Koeffizienten von x in II., multiplizirt, II. aber unverändert läßt, weil x in III. zum Koeffizienten 1 hat. Es ist also II. $= 2x - 3y + 2z = b$ und III. $= 8z - 2x + 2y = 2c$. In II. und III. hat x verschiedene Zeichen. Man addire also III. zu II., indem man die Glieder so ordnet, daß einerlei Buchstaben unter einander kommen. Also

II. $= 2x - 3y + 2z = b$

und III. $= -2x + 2y + 8z = 2c$

folglich II. + III. $= -y + 10z = b + 2c$. Diese Gleichung heiße B.

Jetzt schaffe man aus A und B das Glied y weg, indem man die Glieder von B mit 13, dem Koeffizienten von y in A, multiplizirt, die Gleichung A aber unverändert läßt, weil y in B zum Koeffizienten 1 hat. Also ist

$A = 13y - 8z = 2a - 3b$ u. $B = -13y + 130z = 13b + 26c$.

Da y in beiden Gleichungen entgegengesetzte Zeichen hat, so addire man. Also

$A = 13y - 8z = 2a - 3b$

$B = -13y + 130z = 13b + 26c$

Also $A + B = 122z = 2a + 10b + 26c$. Diese Gleichung heiße C.

Aus C läßt sich nun z unmittelbar bestimmen, nämlich

$$122z = 2a + 19b + 26c.$$

Mit 2 gehoben, kommt

$$61z = a + 5b + 13c,$$

$$\text{also } z = \frac{a + 5b + 13c}{61}.$$

Diesen Werth für z setze man nun in A oder B statt z, so findet sich y. Nehmen wir A, so ist

$$13y - \frac{8a + 40b + 104c}{61} = 2a - 3b.$$

Alles unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$\frac{61 \cdot 13y - 8a - 40b - 104c}{61} = \frac{122a - 183b}{61}.$$

Da nun die Zähler gleich sind, so ist

$$793y - 8a - 40b - 104c = 122a - 183b.$$

Folglich $793y = 130a - 143b + 104c$.

Hebt man alle Glieder mit 13, so kommt

$$61y = 10a - 11b + 8c;$$

$$\text{also } y = \frac{10a - 11b + 8c}{61}.$$

Nun setze man die Werthe für y und z in die Gleichung I, oder II., oder III., so findet sich x. Nehmen wir I. $= 3x + 2y - z = a$, so erhält man

$$3x + \frac{20a - 22b + 16c}{61} - \frac{a + 5b + 13c}{61} = a.$$

Alles auf Einerlei Nenner gebracht, kommt

$$183x + 20a - 22b + 16c - a - 5b - 13c = 61a.$$

Also $183x = 61a - 20a + a + 22b + 5b - 16c + 13c.$

Oder, addirt, was sich addiren läßt,

$$183x = 42a + 27b - 3c,$$

$$\text{folglich} \quad x = \frac{42a + 27b - 3c}{183}.$$

Es sei $a = 16$, $b = 3$, $c = 7$, so ist

$$x = \frac{42 \cdot 16 + 27 \cdot 3 - 3 \cdot 7}{183} = \frac{672 + 81 - 21}{183} = \frac{753 - 21}{183} = \frac{732}{183} = 4,$$

$$y = \frac{10 \cdot 16 - 11 \cdot 3 + 8 \cdot 7}{61} = \frac{160 - 33 + 56}{61} = \frac{216 - 33}{61} = \frac{183}{61} = 3,$$

$$z = \frac{16 + 5 \cdot 3 + 13 \cdot 7}{61} = \frac{16 + 15 + 91}{61} = \frac{122}{61} = 2.$$

Setzt man diese Werthe in die gegebenen Gleichungen, so ist wirklich

I. $= 3x + 2y - z = a$; II. $= 2x - 3y + 2z = b$;
$3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 2 = 16$; $2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3$;
III. $= 4z - x + y = c$.
$4 \cdot 2 - 4 + 3 = 7$.

Jetzt wollen wir zur Übung für den Anfänger auch noch ein Beispiel beifügen, wo die Koeffizienten durch Buchstaben ausgedrückt sind.

Es seien also die 3 Gleichungen gegeben:

I. $px + qy - z = a$,
II. $qx - py + qz = b$,
III. $rz - x + y = c$.

Zuerst bringe man x in I. und II. unter einerlei Koeffizienten, indem man I. mit q und II. mit p multiplizirt, so erhält man

I. $= pqx + q^2y - qz = qa$
II. $= pqx - p^2y + pqz = pb$.

Die Gleichung II. mit entgegengesetzten Zeichen zu I. addirt, kommt

$$\begin{array}{rl} \text{I.} = & pqx + q^2y - qz = qa \\ -\text{II.} = & -pqx + p^2y - pqz = -pb \end{array}$$

Also $\text{I.} - \text{II.} = y(q^2 + p^2) - zq(p + 1) = qa - pb.$ Diese Gleichung heiße A.

Nun bringe man auch x aus II. und III. weg, indem man nur III. mit q, dem Koeffizienten von x in II., zu multiplizieren

braucht. Es kommt III. $= qrz - qx + qy = qc$. Dieses wird, weil die Glieder mit x in II. und III. verschiedene Zeichen haben, unverändert zu II. addirt, vorher aber die Glieder so geordnet, daß gleichnamige unbekannte Größen unter einander kommen. Also

$$\begin{aligned} \text{II.} &= qx - py + qz &&= b \\ \text{III.} &= -qx + qy + qrz &&= qc \end{aligned}$$

Folglich $\text{II.} + \text{III.} = y(q-p) + zq(r+1) = qc + b$. Diese Gleichung heiße B.

Nun schaffe man aus den Gleichungen A und B das Glied mit y weg, indem man A mit $q - p$ und B mit $q^2 + p^2$ multiplizirt und wegen der gleichen Zeichen B mit entgegengesetzten Zeichen zu A addirt. Es kommt also

$$\begin{aligned} A &= y(q^2+p^2)(q-p) - zq(p+1)(q-p) = (qa-pb)(q-p) \\ -B &= -y(q-p)(q^2+p^2) - zq(r+1)(q^2+p^2) = -(qc+b)(q^2+p^2) \end{aligned}$$

Also $A - B = -zq[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)] = (qa-pb)(q-p) - (qc+b)(q^2+p^2)$.

Man mache z positiv, indem man auf beiden Seiten mit -1 multiplizirt, so kommt

$$zq[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)] = (qc+b)(q^2+p^2) - (qa-pb)(q-p).$$

Daraus folgt

$$z = \frac{(qc+b)(q^2+p^2) - (qa-pb)(q-p)}{q[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)]}.$$

Setzt man nun in die Gleichung A oder B statt z den eben gefundenen Werth, so wird sich y bestimmen lassen. Wir wollen die Gleichung $B = y(q-p) + zq(r+1) = qc + b$ wählen. Diese ist also nun $=$

$$y(q-p) + \frac{q(r+1)[(qc+b)(q^2+p^2) - (qa-pb)(q-p)]}{q[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)]} = qc + b.$$

Im Bruche heben sich die beiden q, also kommt

$$y(q-p) + \frac{(r+1)[(qc+b)(q^2+p^2) - (qa-pb)(q-p)]}{(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)} = qc + b.$$

Man bringe alle Glieder unter einerlei Nenner und setze dann die Zähler gleich, so kommt

$$\begin{aligned} &y(q-p)[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)] \\ &+ (r+1)[(qc+b)(q^2+p^2) - (qa-pb)(q-p)] \\ &= (qc+b)[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)]. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} &y(q-p)[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)] \\ &= (qc+b)[(p+1)(q-p) + (r+1)(q^2+p^2)] \\ &- (r+1)[(qc+b)(q^2+p^2) - (qa-pb)(q-p)]. \end{aligned}$$

Man multiplizire rechter Hand das erste Glied wirklich mit $(qc+b)$ und das zweite Glied mit $-(r+1)$, so kommt

$$y(q-p)[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]$$
$$= (qc+b)(p+1)(q-p)+(qc+b)(r+1)(q^2+p^2)$$
$$-(r+1)(qc+b)q^2+p^2+(r+1)(qa-pb)(q-p).$$

Jetzt hebt sich auf der rechten Seite das zweite und dritte Glied, und es kommt also

$$y(q-p)[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]$$
$$= (qc+b)(p+1)(q-p)+(r+1)(qa-pb)(q-p)$$
$$= (q-p)[(qc+b)(p+1)+(qa-pb)(r+1)].$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit $(q-p)$, so kommt

$$y[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]$$
$$= (qc+b)(p+1)+(qa-pb)(r+1).$$

Folglich ist $y = \frac{(qc+b)(p+1)+(qa-pb)(r+1)}{(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)}$.

Diesen Werth von y, so wie den von z, schreibe man nun in eine der ursprünglichen Gleichungen, so wird auch x bestimmt werden. Es war z. B. die Gleichung $L = px+qy-z = a$, so ist

$$qy = \frac{q[(qc+b)(p+1)+(r+1)(qa-pb)]}{(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)}$$

und

$$-z = -\frac{(qc+b)(q^2+p^2)-(qa-pb)(q-p)}{q[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}.$$

Folglich ist

$$L = px+\frac{q[(qc+b)(p+1)+(r+1)(qa-pb)]}{(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)}$$
$$-\frac{(qc+b)(q^2+p^2)-(qa-pb)(q-p)}{q(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)} = a.$$

Die Nenner beider Brüche unterscheiden sich nur durch den Faktor q, um welchen der eine größer ist, als der andere. Man bringe also alle Glieder unter einerlei Nenner, so kommt

$$px = \frac{xqp[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}{q[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}$$
$$+qy = \frac{q^2[(qc+b)(p+1)+(r+1)(qa-pb)]}{q[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}$$

$-z$ kommt wie oben und auf der rechten Seite

$$a = \frac{aq[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}{q[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}.$$

Läßt man nun die Nenner weg und setzt die Zähler links dem Zähler rechts gleich, so kommt

$$xpq[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]$$
$$+q^2[(qc+b)(p+1)+(r+1)(qa-pb)]$$
$$-(qc+b)(q^2+p^2)-(qa-pb)(q-p)$$
$$= aq[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)].$$

Das Glied mit x auf Eine Seite gebracht, kommt

$$\begin{aligned} &xpq\,[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]\\ &=aq\,[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]\\ &\quad -q^2\,[(qc+b)(p+1)+(r+1)(qa-pb)]\\ &\quad +(qc+b)(q^2+p^2)-(qa-pb)(q-p) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$x=\frac{\begin{array}{l}aq[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]-q^2[(qc+b)(p+1)+(r+1)\\ (qa-pb)]+(qc+b)(q^2+p^2)-(qa-pb)(q-p)\end{array}}{pq[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}$$

Nehmen wir jetzt, wie oben, $a=16$, $b=3$, $c=7$, $p=3$, $q=2$, $r=4$, so wird

$$\begin{aligned} x&=\frac{\begin{array}{l}16.2[(3+1)(2-3)+(4+1)(2^2+3^2)]-2^2[(2.7+3)(3+1)\\ +(4+1)(2.16-3.3)]+(2.7+3)(2^2+3^2)-(2.16-3.3)(2-3)\end{array}}{3.2[(3+1)(2-3)+(4+1)(2^2+3^2)]}\\ &=\frac{32(4.-1+5.13)-4(17.4+5.23)+17.13-(23.-1)}{6(4.-1+5.13)}\\ &=\frac{32(-4+65)-4(68+115)+221+23}{6.(-4+65)}=\frac{32.61-4.183+244}{6.61}. \end{aligned}$$

Alle Glieder mit 61 gehoben, kommt

$$x=\frac{32-4.3+4}{6}=\frac{32-12+4}{6}=\frac{24}{6}=4,\text{ wie oben.}$$

$$\begin{aligned} y&=\frac{(qc+b)(p+1)+(qa-pb)(r+1)}{(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)}\\ &=\frac{(2.7+3)(3+1)+(2.16-3.3)(4+1)}{(3+1)(2-3)+(4+1)(2^2+3^2)}\\ &=\frac{(14+3).4+(32-9).5}{4.-1+5.(4+9)}=\frac{17.4+23.5}{-4+5.13}\\ &=\frac{68+115}{-4+65}=\frac{183}{61}=3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z&=\frac{(qc+b)(q^2+p^2)-(qa-pb)(q-p)}{q[(p+1)(q-p)+(r+1)(q^2+p^2)]}\\ &=\frac{(2.7+3)(2^2+3^2)-(2.16-3.3)(2-3)}{2[(3+1)(2-3)+(4+1)(2^2+3^2)]}\\ &=\frac{17.(4+9)-(32-9).-1}{2[4.-1+5(4+9)]}=\frac{17.13-(23.-1)}{2(-4+5.13)}\\ &=\frac{221+23}{2.(-4+65)}=\frac{244}{2.61}=\frac{122}{61}=2. \end{aligned}$$

Also alle Werthe wie oben.

§. 234.

Um die bisherigen Regeln zu erläutern, wollen wir einige Aufgaben mit Einer oder mehrern unbekannten Größen hinzufügen und die Art der Bildung, so wie die Auflösung derselben zeigen.

§. 235.

Erste Aufgabe.

Es fragt jemand, wie viel Personen sind in einer Gesellschaft? Man antwortet: Fügst du noch zu den vorhandenen Personen ihre Hälfte und ihr Viertel, so kommen gerade 70 heraus.

Bildung.

Setzt man die unbekannte Anzahl der Personen $= x$, so ist ihre Hälfte $= \frac{1}{2}x$ und ihr Viertel $= \frac{1}{4}x$. Beides zum ganzen x addirt, gibt die Gleichung

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 70.$$

Auflösung.

Man bringe alle Glieder unter einerlei Nenner und setze die Zähler gleich, zähle nun alle x linker Hand zusammen und dividire mit dem Koeffizienten von x die bekannte Größe rechter Hand, so erhält man das Gesuchte. Also

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 70.$$

Daraus kommt $4x + 2x + x = 280,$

also $7x = 280,$

folglich $x = 40.$

Es waren also 40 Personen in der Gesellschaft.

§. 236.

Zweite Aufgabe.

Es wird nach jemandes Alter gefragt, und die Antwort ist: wenn man sein Alter mit 4 multiplizirt und 8 Jahre dazu rechnet, so kommt eben so viel heraus, als wenn man das Alter mit 5 multiplizirt und 40 abrechnet.

Bildung.

Wenn man das unbekannte Alter $= x$ setzt, so hat man nach der Bedingung der Aufgabe $4x + 8$ eben so groß, als $5x - 40$. Also ist die Gleichung

$$4x + 8 = 5x - 40.$$

Auflösung.

Man bringe das Unbekannte und Bekannte jedes auf eine Seite und dividire dann das Letztere mit dem Koeffizienten des

Erstern. Dem zufolge erhält man aus der gefundenen Gleichung diese:

$$8 + 40 = 5x - 4x,$$

oder

$$48 = x.$$

Das verlangte Alter ist also 48 Jahre, und es ist wirklich $4 \cdot 48 + 8$ so viel als $5 \cdot 48 - 40$.

§. 237.

Dritte Aufgabe.

In ein Vermögen von 8500 thlrn. sollen sich 7 Kinder, Söhne und Töchter, so theilen, daß jeder Sohn 1000 thlr. und jede Tochter 1500 thlr. bekomme, wie viel Söhne und Töchter waren es?

Bildung.

Man setze die Anzahl der Söhne $= x$, so ist die Anzahl der Töchter $= 7 - x$. Jeder Sohn bekommt 1000 thlr., also alle x Söhne zusammen $1000x$ thlr., jede Tochter 1500 thlr., also alle $7 - x$ Töchter $1500 \cdot (7 - x)$ thlr. $= 10500 - 1500x$ thlr. Beides zusammengerechnet, muß so viel als das ganze Vermögen betragen. Also ergibt sich die Gleichung

$$1000x + 10500 - 1500x = 8500.$$

Indem man nach der vorigen Auflösung verfährt, erhält man

$$1000x - 1500x = 8500 - 10500,$$

oder

$$-500x = -2000.$$

Man multiplizire auf beiden Seiten mit -1, um alles positiv zu machen, so kommt

$$500x = 2000,$$

also

$$x = \frac{2000}{500} = 4.$$

Es waren also 4 Söhne und 3 Töchter. Jeder Sohn bekam 1000 thlr., also alle 4 zusammen 4000 thlr., jede Tochter aber 1500, also alle 3 zusammen 4500 thlr. und $4000 + 4500$ ist das ganze Vermögen von 8500 thlrn.

§. 238.

Vierte Aufgabe.

Ein Sohn fragt den Vater nach seinem Alter. Dein jetziges Alter, antwortet dieser, ist ein Viertheil des meinigen, vor 7 Jahren aber war es ein Siebentheil meines damaligen Alters. Wie alt ist also der Vater und der Sohn?

Bildung.

Gesetzt, der Vater ist jetzt x Jahre alt, so ist das Alter des Sohnes $= \frac{1}{4}x$. Vor 7 Jahren war der Vater $x - 7$ Jahre alt, der Sohn aber $\frac{1}{4}x - 7$ Jahre, und dieses Alter ist der siebente Theil vom damaligen Alter des Vaters, also $= \frac{x-7}{7}$. Folglich ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{4}x - 7 = \frac{x-7}{7}.$$

Man bringe unter einerlei Nenner und das Unbekannte auf Eine Seite, so kommt

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{4}x - 49 &= x - 7, \\ \text{und } 7x - 196 &= 4x - 28, \\ \text{also } 7x - 4x &= 196 - 28, \\ \text{oder } 3x &= 168, \\ \text{folglich } x &= 56, \\ \text{und } \tfrac{1}{4}x &= 14. \end{aligned}$$

Der Vater ist also jetzt 56 Jahre alt, der Sohn aber 14 Jahre, sein Alter also $\frac{1}{4}$ vom Alter des Vaters. Vor 7 Jahren war der Vater 49 und der Sohn 7 Jahre alt, also sein Alter $= \frac{1}{7}$ vom damaligen Alter des Vaters.

§. 239.
Fünfte Aufgabe.

Es soll eine Sache für eine gewisse Summe ausgespielt werden. Setze ich nun das Loos zu 4 thlr. an, so kommen 50 thlr. zu wenig, setze ich es aber zu 5 thlr., so kommen 100 thlr. zu viel, wie viel Loose müssen es sein und wie theuer wird der Werth der Sache gerechnet?

Bildung.

Gesetzt, man habe x Loose, so geben diese zu 4 thlrn. gerade $4x$ thlr., aber dies ist um 50 thlr. weniger, als der Werth der Sache, folglich dieser $= 4x + 50$. Zu 5 thlrn. aber geben x Loose $5x$ thlr. und dies ist 100 thlr. mehr als der Werth der Sache, folglich dieser $= 5x - 100$. Man hat also die Gleichung

$$4x + 50 = 5x - 100,$$

woraus sich gleich ergibt

$$\begin{aligned} 50 + 100 &= 5x - 4x, \\ \text{oder } 150 &= x. \end{aligned}$$

Es sind also 150 Loose und der Werth der Sache beträgt $150 . 4 + 50 = 600 + 50 = 650$ thlr. Soll der Betrag

der Loose den Werth der Sache gerade ausmachen, so muß ein Loos kosten $\frac{650}{150} = \frac{65}{15} = 4\frac{1}{3}$ thlr.

Allgemein ließe sich die Aufgabe so fassen: Man soll eine Zahl finden, welche, mit a multiplizirt, um c zu wenig, und mit b multiplizirt, um d zu viel gibt.

Nennt man x die gesuchte Zahl, so ist ax um c kleiner als eine gewisse Zahl, folglich $ax + c$ eben so groß; bx aber ist um d größer als jene Zahl, folglich $bx - d$ eben so groß. Also ist die Gleichung

$$ax + c = bx - d,$$

folglich $$c + d = bx - ax,$$

oder $$c + d = x(b - a),$$

also $$\frac{c+d}{b-a} = x;$$

d. h. man addire die beiden Zahlen, um welche das eine Produkt zu groß und das andere zu klein ist und dividire die Summe durch den Unterschied der beiden Faktoren, mit denen die gesuchte Zahl multiplizirt wird.

Man sieht aus diesem Beispiele, wie der Gebrauch der Buchstaben dient, um Regeln für die Auflösung einer Aufgabe zu finden.

§. 240.

Sechste Aufgabe.

Es ist oft der Fall, daß Materien von verschiedenem Gehalte mit einander vermischt werden, um eine Mischung von einem mittlern Gehalte zu erlangen. Es entsteht dann die Frage, wie viel man von jeder der beiden Materien nehmen müsse. Es hat z. B. jemand zweierlei Wein, von der einen Sorte kostet die Flasche 20 gr., von der andern 12 gr.; er will 8 Flaschen von einer Mischung aus beiden Sorten machen, von der die Flasche 14 gr. kostet, wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Denken wir uns die Aufgabe gleich allgemein und setzen den Preis der ersten Sorte = a, den Preis der andern = b, den Preis der Mischung = c, und die Quantität, welche er davon machen will = d. Setzen wir nun das, was er von der ersten Sorte nehmen muß, = x, so ist das, was er von der zweiten Sorte nimmt, $= d - x$. Da der Preis der ersten Sorte = a war, so kostet die davon zu nehmende Menge ax, die Menge von der andern Sorte $b(d - x) = bd - bx$;

beides zusammen muß nun so groß sein, als der Preis der Mischung $= cd$, also hat man die Gleichung

$$ax + bd - bx = cd,$$

also $ax - bx = cd - bd,$

oder $x(a-b) = d(c-b),$

folglich $x = \frac{d(c-b)}{a-b},$

und also $d - x = d - \frac{d(c-b)}{a-b} = \frac{d(a-b)-d(c-b)}{a-b}$

$$= \frac{d(a-b-c+b)}{a-b} = \frac{d(a-c)}{a-b}.$$

Man findet also die Quantität von der bessern Sorte, wenn man den Unterschied des Preises der Mischung und der schlechtern Sorte durch den Unterschied des Preises der bessern und schlechtern Sorte dividirt und den Quotienten mit der Quantität der ganzen Mischung multiplizirt.

Die Quantität der geringern Sorte aber findet man, wenn man den Unterschied des Preises der bessern Sorte und der Mischung durch den Unterschied des Preises der bessern und schlechtern Sorte dividirt und den Quotienten mit der Quantität der ganzen Mischung multiplizirt.

Im Exempel ist $a = 20$, $b = 12$, $c = 14$, $d = 8$, also

$$x = \frac{8(14-12)}{20-12} \text{ und } d - x = \frac{8(20-14)}{20-12}$$

$$= \frac{8 \cdot 2}{8} \qquad = \frac{8 \cdot 6}{8}$$

$$= 2 \qquad = 6.$$

Es müssen also von der bessern Sorte 2 Flaschen, von der schlechtern 6 Flaschen genommen werden. Die 2 Flaschen kosten $2 \cdot 20$ gr. $= 1$ thlr. 16 gr.; die 6 Flaschen $6 \cdot 12$ gr. $= 3$ thlr., also alle 8 Flaschen 4 thlr. 16 gr.; folglich eine Flasche 14 gr., wie verlangt war.

Hätte man statt der schlechtern Sorte Wasser genommen, welches gar nichts kostet, so wird $b = 0$, also

$$x = \frac{d(c-0)}{a-0} = \frac{dc}{a} \text{ und } d - x = \frac{d(a-c)}{a-0} = \frac{d(a-c)}{a},$$

also in Zahlen

$$x = \frac{8 \cdot 14}{20} = 5\frac{12}{20} \text{ und } d - x = \frac{8(20-14)}{20} = \frac{8 \cdot 6}{20} = \frac{48}{20} = 2\frac{8}{20},$$

also $5\frac{3}{5}$ Flasche Wein und $2\frac{2}{5}$ Flasche Wasser, zusammen 8 Flaschen, davon kostet der Wein $(5\frac{3}{5}) \cdot 20$ gr. $= 100$ gr. $+ 12$ gr. $= 4$ thlr. 16 gr. und das Wasser gar nichts, also die Flasche der Mischung 14 gr.

Anderes Beispiel.

Aus 16 löthigem und 12 löthigem Silber soll 13 löthiges gemacht werden, wie viel von jedem?

Da die Quantität der Mischung nicht angegeben ist, so kann man $d = 1$ setzen, alsdann ist

$$x = \frac{c-b}{a-b} = \frac{13-12}{16-12} = \frac{1}{4},$$

$$d-x = \frac{a-c}{a-b} = \frac{16-13}{16-12} = \frac{3}{4}.$$

Man nimmt von dem 16 löthigen Silber $\frac{1}{4}$ und von dem 12 löthigen $\frac{3}{4}$, oder von dem erstern einen und von dem letztern 3 Theile, wenn das Ganze 4 Theile hat.

Je nachdem man a, oder b, oder c, oder d als unbekannt und x als bekannt nimmt, ergeben sich eben so viel verschiedene Aufgaben, als bekannte Größen da sind.

Es sei a unbekannt, so hat man die Gleichung

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b},$$

also $ax - bx = d(c-b)$,
folglich $ax = d(c-b) + bx$,
mithin $a = \frac{d(c-b)+bx}{x} = \frac{d(c-b)}{x} + b.$

Z. B. Es hat jemand eine Mischung von 8 Maaß Wein gemacht, welche 2 Maaß von der bessern und 6 Maaß von der schlechtern Sorte enthält. Das Maaß von der Mischung kostet 14 gr., von der schlechtern Sorte 12 gr., wie viel wird das Maaß von der bessern Sorte kosten?

Es ist also $d = 8$, $c = 14$, $b = 12$, $x = 2$, folglich

$$a = \frac{8(14-12)+12\cdot 2}{2} = \frac{8\cdot 2+24}{2} = \frac{40}{2} = 20\,\text{gr.}$$

Es sei b unbekannt, so ist

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b},$$

also $ax - bx = dc - db$,
oder $db - bx = dc - ax$,
oder $b(d-x) = dc - ax$,
also $b = \frac{dc-ax}{d-x}$.

Z. B. In einer Mischung Wein von 8 Maaß, das Maaß zu 14 gr., sind von der bessern Sorte à 20 gr. 2 Maaß, von

der schlechtern 6 Maaß enthalten, wie viel kostet ein Maaß von der letztern?

Also $d = 8$, $a = 20$, $c = 14$, $x = 2$, folglich

$$b = \frac{8 \cdot 14 - 20 \cdot 2}{8 - 2} = \frac{112 - 40}{6} = \frac{72}{6} = 12 \text{ gr.}$$

Es sei c unbekannt, so ist

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b},$$

also $x(a-b) = dc - db$,

und $x(a-b) + db = dc$,

folglich $\frac{x(a-b) + db}{d} = c$,

oder $\frac{x(a-b)}{d} + b = c$.

Eine Mischung Wein von 8 Maaß besteht aus 2 Sorten, von der einen à 20 gr. 2 Maaß und von der andern à 12 gr. 6 Maaß, wie theuer das Maaß der Mischung?

Es ist also $c = \frac{x(a-b)}{d} + b = \frac{2(20-12)}{8} + 12$

$= \frac{2 \cdot 8}{8} + 12 = 2 + 12 = 14$ gr.

Ist endlich d unbekannt, so hat man

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b}.$$

Also $x(a-b = d(c-b)$,

folglich $\frac{x(a-b)}{c-b} = d$.

Jemand hat in einer Mischung von zweierlei Wein 2 Maaß von der bessern Sorte à 20 gr., das übrige von der schlechtern à 12 gr., wie viel Maaß hält die ganze Mischung, wenn das Maaß 14 gr. werth ist?

Also $d = \frac{2 \cdot (20-12)}{14-12} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$ Maaß.

§. 241.

Siebente Aufgabe.

Ein Kourier, der in 3 Stunden $2\frac{1}{2}$ Meile macht, wird von dem Orte A ausgeschickt. Aber nach 24 Stunden wird von dem Orte B, der 7 Meilen rückwärts von A liegt, ein anderer Kourier ihm nachgesandt, der in 8 Stunden 7 Meilen zurücklegt, wann wird der letztere den erstern einholen?

Man kann die Aufgabe allgemein so fassen: Ein Körper F bewegt sich von A aus und legt in der Zeit a den Raum m zurück. Nachdem aber die Zeit q verflossen ist, folgt ihm ein anderer G, der von einem Punkte B ausgeht, welcher um den Raum p von A rückwärts liegt. Wenn nun der zweite Körper in der Zeit b den Raum n zurücklegt, in wie viel Zeit wird er den erstern einholen?

Man berechne erst, wie viel Raum der Körper F zurücklegt, ehe G anfängt, sich zu bewegen. Wenn F in der Zeit a durch den Raum m sich bewegt und q die Zwischenzeit bezeichnet, so brauche ich nur zu a, m und q die vierte Proportionalzahl zu suchen, also $a : m = q : \frac{mq}{a}$. Nachdem also F den Raum $\frac{mq}{a}$ zurückgelegt hat, fängt G an, sich zu bewegen und muß nun, wenn es F einholen will, eben so viel Raum in der unbekannten Zeit x zurücklegen, als F in dieser Zeit zurücklegt und überdies noch den Raum $\frac{mq}{a}$, so wie auch den Raum p, um den der Ort B von A rückwärts liegt. Es legt aber F in der Zeit x den Raum $\frac{mx}{a}$ zurück, denn es verhält sich wieder $a : m = x : \frac{mx}{a}$. Der Körper G muß also, wenn er F einholen soll, in der Zeit x den Weg $\frac{mq}{a} + \frac{mx}{a} + p$ durchlaufen. Seine Geschwindigkeit ist aber so, daß er in der Zeit b den Raum n zurücklegt, also findet man den Weg, den er in der Zeit x durchläuft, vermittelst der Proportion $b : n = x : \frac{nx}{b}$. Dieser Raum $\frac{nx}{b}$ muß also so groß sein als $\frac{mq}{a} + \frac{mx}{a} + p$, und folglich hat man die Gleichung

$$\frac{nx}{b} = \frac{mq}{a} + \frac{mx}{a} + p,$$

oder $$\frac{nx}{b} = \frac{mq + mx}{a} + p.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$\frac{anx}{ab} = \frac{bmq + bmx + abp}{ab},$$

oder $$anx = bmq + bmx + abp,$$

also $$anx - bmx = bmq + abp,$$

oder $$(an - bm)x = b(mq + ap),$$

folglich $$x = \frac{b(mq + ap)}{an - bm}.$$

Im Exempel ist $a = 3$ Stunden, $m = 2\frac{1}{2}$ Meile, $q = 24$ Stunden, $p = 7$ Meilen, $b = 8$ Stunden, $n = 7$ Meilen. Also ist

$$x = \frac{8(2\frac{1}{2}.24+3.7)}{3.7-8.2\frac{1}{2}} = \frac{8(\frac{5}{2}.24+21)}{21-8.\frac{5}{2}} = \frac{8(60+21)}{21-20}$$

$$= \frac{8.81}{1} = 648 \text{ Stunden} = 27 \text{ Tagen}.$$

Ehe nämlich der zweite Kourier abgesandt wird, legt der erste zurück $\frac{21.2\frac{1}{2}}{3} = 20$ Meilen und dann noch in den 27 Tagen, welche der zweite bis zum Punkte des Zusammentreffens braucht $\frac{24.27.2\frac{1}{2}}{3} = 8.27.\frac{5}{2} = 4.27.5 = 540$ Meilen, zusammen also 560 Meilen. Der zweite Kourier muß erst die 7 Meilen, welche B von A entfernt ist und dann noch die 20 Meilen, die A voraus hat und endlich noch die 540 Meilen desselben zurücklegen; er hat also 567 Meilen zu machen und zwar in 27 Tagen, und da er in 8 Stunden 7 Meilen zurücklegt, so macht er in 27 Tagen $\frac{24.27.7}{8} = 3.27.7 = 567$ Meilen, und muß also mit dem ersten Kourier zusammentreffen.

§. 242.

Es lassen sich bei dieser Aufgabe mehrere Fälle denken: 1) Beide Kouriere können von einerlei Ort ausgehen; dann fällt in der vorigen Formel die Größe p weg und es ist also $ap = 0$, folglich $x = \frac{bmq}{an-bm}$. Also im Exempel

$$x = \frac{8.2\frac{1}{2}.24}{3.11-8.2\frac{1}{2}} = \frac{8.\frac{5}{2}.24}{21-20} = 4.5.24 = 480 \text{ Stunden}$$

$= 20$ Tage. In 20 Tagen macht nämlich der erste Kourier $\frac{20.24.2\frac{1}{2}}{3} = \frac{20.24.5}{6} = 400$ Meilen; in den 24 Stunden, die er früher abgegangen ist, hat er 20 Meilen zurückgelegt, also hat der zweite 420 Meilen zu machen, und da er in 8 Stunden 7 Meilen macht, so braucht er zu diesen 420 Meilen gerade $\frac{420.8}{7}$ Stunden $= 480$ Stunden $= 20$ Tage.

2) Man kann bei beiden das Zeitmaaß, wonach die Geschwindigkeit gemessen wird, einerlei annehmen, z. B. der erste Kourier legt in einer Stunde $\frac{7}{8}$ Meile und der zweite in einer Stunde $\frac{7}{8}$ Meile zurück, so ist in der allgemeinen Formel $a = b$, und es ist also, wenn man die Größe p noch gelten läßt,

$x =$

$x = \frac{a(mq+ap)}{au-am} = \frac{mq+ap}{u-m}$. Im Exempel also ist, da m nun $= \frac{5}{6}$ und n $= \frac{7}{8}$ Meile ist, $x = \frac{\frac{5}{6}.24+1.7}{\frac{7}{8}-\frac{5}{6}}$ $= \frac{20+7}{\frac{21}{24}-\frac{20}{24}} = \frac{27}{\frac{1}{24}} = 27.24$ Stunden $= 648$ Stunden $= 27$ Tage, wie oben. Ist aber auch $p = 0$, so wird $x = \frac{mq}{n-m} = \frac{\frac{5}{6}.24}{\frac{7}{8}-\frac{5}{6}} = \frac{20}{\frac{1}{24}} = 20.24$ Stunden $= 20$ Tage.

3) Man kann sich aber auch denken, daß der Ort B, von dem der zweite Kourier ausgeht, p Meilen vorwärts von A liegt. Alsdann hat der zweite Kourier diese p Meilen zu gut und sein Weg $\frac{nx}{b}$ ist dann gleich $\frac{mq}{a} + \frac{mx}{a} - p$. Daraus folgt $anx = bmq + bmx - abp$ oder $anx - bmx = bmq - abp$ oder $x(an-bm) = b(mq-ap)$; folglich $x = \frac{b(mq-ap)}{an-bm}$. Werden nun die Zahlen des Exempels beibehalten, so ist $x = \frac{8(2\frac{1}{2}.24-3.7)}{3.7-8.2\frac{1}{2}} = \frac{8.(\frac{5}{2}.24-21)}{21-20} = \frac{8(5.12-21)}{1}$ $= \frac{8.39}{1} = 312$ Stunden $= 13$ Tage, und ist $a = b$, also $m = \frac{5}{6}$ und $n = \frac{7}{8}$, so ist $x = \frac{mq-ap}{n-m} = \frac{\frac{5}{6}.24-1.7}{\frac{7}{8}-\frac{5}{6}}$ $= \frac{20-7}{\frac{1}{24}} = 13.24$ Stunden $= 13$ Tage.

Der erste Kourier wird also vom zweiten schon in 13 Tagen eingeholt. Es hat nämlich der erste in den 24 Stunden, die er voraus hat, 20 Meilen zurückgelegt und nun macht er in 13 Tagen oder 312 Stunden noch $312.\frac{5}{6}$ Meile $= \frac{312.5}{6}$ $= 260$ Meilen, also legt er zusammen 280 Meilen bis zum Zusammentreffen zurück. Der zweite Kourier aber hat 7 Meilen weniger, also nur 273 Meilen zu machen und in 13 Tagen oder 312 Stunden macht er wirklich $312.\frac{7}{8}$ Meile $= \frac{312.7}{8}$ $= 39.7 = 273$ Meilen.

4) Endlich ist auch der Fall möglich, daß der zweite Kourier von einem um p Meilen rückwärts liegenden Ort, aber mit dem ersten zu gleicher Zeit fortgeschickt wird. Dann ist in der Formel für x die Größe $q = 0$ und also auch mq, folglich ist $x = \frac{abp}{an-bm}$ und wenn die obigen Zahlen beibehalten werden, $x = \frac{3.8.7}{3.7-8.2\frac{1}{2}} = \frac{168}{21-20} = 168$ Stunden $= 7$ Tage.

Der erste Kourier macht nämlich in dieser Zeit $168.\frac{5}{6}$ $= 140$ Meilen und der zweite Kourier hat zu machen erstlich

die 7 Meilen, um welche der Ort B rückwärts liegt, und dann noch jene 140, zusammen also 147 Meilen. Dazu braucht er $\frac{147}{\frac{7}{8}} = 147 \cdot \frac{8}{7} = 21 \cdot 8 = 168$ Stunden oder 7 Tage.

Ein Beispiel dazu könnte man von einer Taschenuhr nehmen. Der Minutenzeiger durchläuft 60 Theile, während der Stundenzeiger 5 Theile durchläuft, also ersterer 12 mal schneller. Es stehe der Stundenzeiger auf 2 Uhr, der Minutenzeiger also auf 60, folglich 10 Theile rückwärts vom erstern. Beide fangen ihre Bewegung zu gleicher Zeit an, und die Frage ist nun, wann werden sie zusammentreffen? Hier ist $a = b = 1$ Stunde, $m = 5$, $n = 60$, also $x = \frac{10}{60-5} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$ Stunde $= \frac{120}{11}$ Minute $= 10\frac{10}{11}$ Minute, d. h. beide Zeiger werden $10\frac{10}{11}$ Minute nach 2 Uhr zusammentreffen.

Wenn beide Körper sich in einem Kreise bewegen, so ließe sich auch der Fall denken, daß der erste, vorangehende A schneller wäre, als der zweite nachfolgende B, dann würde der erstere den letztern einholen können, wenn beide ihre Kreisbewegung immer fortsetzen. Der Fall träte bei einer Uhr zwischen Stunden- und Minutenzeiger ein. Steht der Stundenzeiger A auf halb 2 Uhr, also da, wo $12\frac{1}{2}$ Minute verzeichnet ist und der Minutenzeiger B auf 30, so fangen beide ihre Bewegung zu einerlei Zeit an, aber der Minutenzeiger hat $17\frac{1}{2}$ Minute voraus. Da indessen die Bewegung im Kreise geschieht, so kann man auch sagen, B fange seine Bewegung zwar mit A zu gleicher Zeit, aber $60 - 17\frac{1}{2} = 42\frac{1}{2}$ Theile rückwärts von A an, also wäre es der vorige Fall und $x = \frac{p}{n-m} = \frac{42\frac{1}{2}}{60-5} = \frac{85}{2.55}$ $= \frac{17}{2.11} = \frac{17}{22}$ Stunde $= \frac{17 \cdot 60}{22}$ Minuten $= 46\frac{4}{11}$ Minute. Der Minutenzeiger muß also von seinem Standpunkte aus noch $46\frac{4}{11}$ Minute durchlaufen, ehe er mit dem Stundenzeiger zusammenkommt. Dieses geschieht also um 3 Uhr $16\frac{4}{11}$ Minute.

Stehen beide Zeiger genau auf 12 Uhr, so fangen sie ihre Bewegung nicht nur zu gleicher Zeit, sondern auch von einem Orte an. Man kann dann sagen: Der Minutenzeiger stehe 60 Theile rückwärts vom Stundenzeiger und also ist $x = \frac{p}{n-m}$ $= \frac{60}{60-5} = \frac{60}{55} = 1\frac{1}{11}$ Stunde $= 65\frac{5}{11}$ Minute, d. h. beide Zeiger werden wieder zusammentreffen, wenn der Minutenzeiger volle 60 Minuten und noch $5\frac{5}{11}$ Minute durchlaufen hat. Man hat also nur nöthig, $5\frac{5}{11}$ Minute zum Punkte des vorigen

Zusammentreffens zu addiren. So läßt sich denn auch für jeden andern Punkt des beobachteten Zusammentreffens der Zeitpunkt des folgenden finden, weil allemal, beide Zeiger mögen zusammenstehen, wo sie wollen, der Minutenzeiger 60 Minuten rückwärts gedacht werden kann. Man addire also zu dem beobachteten Zusammentreffen $5\frac{5}{11}$ Minute, so hat man das folgende. Es sei das erste Zusammentreffen geschehen um 2 Uhr $10\frac{10}{11}$ Minute, so geschieht das folgende um 2 Uhr $10\frac{10}{11} + 5\frac{5}{11}$ Minute = 2 Uhr $16\frac{4}{11}$ Minute, gerade, wie es oben aus andern Umständen berechnet war.

§. 243.

Aus der Formel in §. 241. $x = \frac{b(mq + ap)}{an - bm}$ lassen sich noch so viele Aufgaben herleiten, als Größen in dem Werthe für x sind, wenn man x als bekannt annimmt.

Es sei 1) b unbekannt, so hat man aus obiger Formel die Gleichung

$$\begin{aligned} xan - xbm &= bmq + bap, \\ \text{oder} \quad xan &= bmq + bmx + bap, \\ \text{oder} \quad xan &= b(mq + mx + ap), \\ &= b[m(q + x) + ap]; \end{aligned}$$

folglich $\frac{xan}{m(q + x) + ap} = b.$

Exempel. Ein Kourier wird von A aus fortgeschickt und soll in 3 Stunden $2\frac{1}{2}$ Meile zurücklegen. Aus dem 7 Meilen von A rückwärts gelegenen Orte B wird ein anderer 24 Stunden später ihm nachgesandt, der ihn in 27 Tagen einholt. In wie viel Zeit muß derselbe 7 Meilen zurücklegen, wenn dies möglich sein soll?

Hier ist x = 27 Tage = 648 Stunden, a = 3 Stunden, m = $2\frac{1}{2}$ Meile, q = 24 Stunden, p = 7 Meilen, n = 7 Meilen, also

$$b = \frac{648 \cdot 3 \cdot 7}{2\frac{1}{2}(24 + 648) + 3 \cdot 7} = \frac{648 \cdot 21}{\frac{5}{2} \cdot 672 + 21} = \frac{648 \cdot 21}{5 \cdot 336 + 21}$$
$$= \frac{648 \cdot 21}{1680 + 21} = \frac{648}{80 + 1} = \frac{648}{81} = 8 \text{ Stunden}.$$

2) Es sei m unbekannt, so hat man wieder die Gleichung

$$\begin{aligned} xan - xbm &= bmq + abp, \\ \text{also} \quad xan - abp &= bmq + xbm, \\ \text{oder} \quad a(xn - bp) &= mb(q + x), \\ \text{also} \quad \frac{a(xn - bp)}{b(q + x)} &= m. \end{aligned}$$

Exempel. Ein Kourier wird von dem Orte A ausgesandt, und 24 Stunden nach dem Abgange desselben muß von dem 7 Meilen rückwärts gelegenen Orte B ein Kourier ihm nachgesandt werden, der, wenn er ihn in 27 Tagen einholen soll, 7 Meilen in 8 Stunden zurücklegen muß. Wie viel Meilen wird der erste Kourier in 3 Stunden zu machen haben?

Da alle vorige Bedeutungen der Buchstaben gelten, so ist

$$m = \frac{3(648.7 - 8.7)}{8(24 + 648)} = \frac{3(4536 - 56)}{8.672} = \frac{3.4480}{8.672}$$

$$= \frac{3.560}{672} = \frac{560}{224} = \frac{70}{28} = 2\tfrac{14}{28} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Meile.}$$

3. Es sei q unbekannt, so hat man die Gleichung

$$xan - xbm = bmq + abp,$$

also $x(an - bm) - abp = bmq,$

folglich $\frac{x(an - bm) - abp}{bm} = q.$

Exempel. Ein Kourier, der in 3 Stunden $2\frac{1}{2}$ Meile zurücklegt, wird von dem Orte A ausgeschickt. Wie viel Zeit nachher muß ein anderer Kourier, der in 8 Stunden 7 Meilen zurücklegt, von dem 7 Meilen rückwärts gelegenen Orte B ihm nachgesandt werden, wenn er ihn in 27 Tagen einholen soll? Es ist also

$$q = \frac{648(3.7 - 8.2\frac{1}{2}) - 3.8.7}{8.2\frac{1}{2}} = \frac{648(21 - 20) - 3.56}{20}$$

$$= \frac{648 - 168}{20} = \frac{480}{20} = 24 \text{ Stunden.}$$

4. Es sei a unbekannt, so hat man die Gleichung

$$xan - xbm = bmq + abp,$$

also $xan - abp = bmq + bmx,$

oder $a(xn - bp) = bm(q + x),$

folglich $a = \frac{bm(q + x)}{xn - bp}.$

Exempel. Ein Kourier wird von A ausgesandt, in wie viel Stunden muß derselbe $2\frac{1}{2}$ Meile zurücklegen, wenn ein anderer Kourier, der 24 Stunden später aus dem 7 Meilen rückwärts gelegenen Orte B ihm nachgesandt wird und der in 8 Stunden 7 Meilen zurücklegt, ihn in 27 Tagen einholen soll? Es ist also

$$a = \frac{8.2\frac{1}{2}(24 + 648)}{648.7 - 8.7} = \frac{20.672}{4536 - 56} = \frac{20.672}{4480} = \frac{672}{224}$$

$= 3$ Stunden.

5) Es sei p unbekannt, so hat man die Gleichung

$$xan - xbm = bmq + abp,$$

also $xan - xbm - bmq = abp,$

oder $xan - bm(x+q) = abp,$

oder $\frac{xan - bm(x+q)}{ab} = p.$

Exempel. Ein Kourier, der in 3 Stunden $2\frac{1}{2}$ Meile macht, wird von A ausgesandt. Wie viel Meilen muß ein Ort B rückwärts von A liegen, wenn von demselben ein anderer Kourier, der in 8 Stunden 7 Meilen zurücklegt, 24 Stunden später ausgeschickt wird und dieser den erstern in 27 Tagen einholt? Es ist also

$$p = \frac{648.3.7 - 8.2\frac{1}{2}(648+24)}{3.8} = \frac{648.21 - 20.672}{3.8}$$

$$= \frac{24(27.21 - 20.28)}{24} = 27.21 - 20.28$$

$$= 7(3.27 - 20.4) = 7(81 - 80) = 7.1$$

$$= 7 \text{ Meilen.}$$

6) Es sei n unbekannt, so hat man die Gleichung

$$xan - xbm = bmq + abp,$$

also $xan = bmq + xbm + abp,$

oder $xan = b(mq + xm + ap),$

oder $xan = b[m(q+x) + ap],$

folglich $n = \frac{b[m(q+x)+ap]}{ax}.$

Exempel. Ein Kourier, der in 3 Stunden $2\frac{1}{2}$ Meile zurücklegt, wird von A abgeschickt. Von dem 7 Meilen von A rückwärts gelegenen Orte B wird ein anderer nach 24 Stunden ihm nachgesandt; wie viel Meilen muß dieser in 8 Stunden machen, wenn er den erstern in 27 Tagen einholen soll? Es ist also

$$n = \frac{8[2\frac{1}{2}(24+648)+3.7]}{3.648} = \frac{8(\frac{5}{2}.672+21)}{3.648}$$

$$= \frac{8(5.336+21)}{3.648} = \frac{1680+21}{3.81} = \frac{1701}{3.81}$$

$$= \frac{1701}{243} = 7 \text{ Meilen.}$$

§. 244.

Achte Aufgabe.

Ein Legat soll unter 4 Personen so vertheilt werden, daß A im voraus 100 thlr. und dann die Hälfte des Restes, B von dem übrigen den fünften Theil und außerdem noch 200 thlr.,

C aber von dem jetzt gebliebenen Reste den achten Theil und noch 400 thlr., D endlich die noch vorhandenen 600 thlr. bekommen solle; wie stark ist das Legat und wie viel bekommt jeder?

Setzen wir das ganze Legat $= x$, so erhält A 100 thlr. und die Hälfte des Restes, also $100 + \frac{x-100}{2}$. Es ist also jetzt vom Legate noch da $x - \left(100 + \frac{x-100}{2}\right)$ $= x - 100 - \frac{x-100}{2} = \frac{2x-200-x+100}{2} = \frac{x-100}{2}$. Davon erhält B den fünften Theil und noch 200 thlr., also $200 + \frac{x-100}{2.5} = 200 + \frac{x-100}{10}$. Vom Legate sind also noch da $\frac{x-100}{2} - \left(200 + \frac{x-100}{10}\right) = \frac{x-100}{2} - 200 - \frac{x-100}{10}$ $= \frac{5x-500-2000-x+100}{10} = \frac{4x-2400}{10}$. Davon erhält C den achten Theil und noch 400 thlr., also $400 + \frac{4x-2400}{8.10}$ $= 400 + \frac{x-600}{20}$. Was nun vom Legat noch übrig bleibt, beträgt 600 thlr. Es ist aber dieser Rest $= \frac{4x-2400}{10} - \left(400 + \frac{x-600}{20}\right)$ $= \frac{4x-2400}{10} - 400 - \frac{x-600}{20} = \frac{8x-4800-8000-x+600}{20}$ $= \frac{7x-12200}{20}$. Folglich hat man die Gleichung

$$\frac{7x-12200}{20} = 600,$$

also $7x - 12200 = 12000$,
folglich $7x = 24200$,
also $x = 3457\frac{1}{7}$.

Das Legat war also $3457\frac{1}{7}$ thlr. Davon bekam A 100 thlr. und vom Reste $3357\frac{1}{7}$ die Hälfte, folglich $1678\frac{4}{7}$ thlr., also zusammen $1778\frac{4}{7}$ thlr. Nun bleiben noch $1678\frac{4}{7}$ thlr. Davon erhält B den fünften Theil, also $335\frac{5}{7}$ und noch 200 thlr., also zusammen $535\frac{5}{7}$ thlr. Nun bleiben noch übrig $1142\frac{6}{7}$ thlr. Davon bekommt C den achten Theil, also $142\frac{6}{7}$ thlr. und noch 400 thlr., also zusammen $542\frac{6}{7}$ thlr. Es bleiben daher für D gerade noch 600 thlr. übrig. Addirt man alle Erbtheile zusammen, so kommt das ganze Legat wieder heraus.

A bekam $1778\frac{4}{7}$ thlr.
B = $535\frac{5}{7}$ =
C = $542\frac{6}{7}$ =
D = 600 =

Also A + B + C + D = $3457\frac{1}{7}$ thlr. = dem ganzen Legate.

§. 245.

Neunte Aufgabe.

Ein Vater verordnet, daß sein Vermögen auf folgende Art unter seine Söhne vertheilt werden solle. Der älteste A solle 100 thlr. vorausnehmen und dann noch den achten Theil des Übriggebliebenen, der zweite B 200 thlr. von dem Reste voraus und dann noch den achten Theil des Übrigen; eben so der dritte C 300 thlr. vom Reste voraus und dann noch den achten Theil des Übrigen u. s. w. jeder folgende Sohn immer 100 thlr. mehr voraus und dann noch den achten Theil des Übrigen. Zuletzt findet sich, daß ein Sohn so viel hat, als der andere. Wie stark war die Erbschaft, wie viel Söhne waren es und wie viel bekam jeder?

Man setze die Erbschaft $= x$, so nahm A 100 thlr. und den achten Theil des Restes. Der Rest ist $x - 100$, also bekam A $100 + \frac{x-100}{8}$. Von der Erbschaft blieb nun noch $x - \left(100 + \frac{x-100}{8}\right) = x - 100 - \frac{x-100}{8} = \frac{8x-800-x+100}{8}$ $= \frac{7x-700}{8}$. Davon nahm B 200 thlr., also blieb noch $\frac{7x-700}{8} - 200$, und von diesem Reste erhielt er den achten Theil, also zusammen 200 thlr. $+ \frac{\frac{7x-700}{8} - 200}{8}$ $= 200 + \frac{7x-700-1600}{64} = 200 + \frac{7x-2300}{64}$. Von der Erbschaft blieb also noch $\frac{7x-700}{8} - \left(200 + \frac{7x-2300}{64}\right)$ $= \frac{7x-700}{8} - 200 - \frac{7x-2300}{64} = \frac{56x-5600-12800-7x+2300}{64}$ $= \frac{49x-16100}{64}$. Davon nahm nun C 300 thlr. und vom Reste $\frac{49x-16100}{64} - 300$ noch den achten Theil, also bekam er $\frac{300 + \frac{49x-16100}{64} - 300}{8} = 300 + \frac{49x-16100-19200}{512}$ $= 300 + \frac{49x-35300}{512}$. So lassen sich denn auch die Theile der übrigen bestimmen; man hat aber eigentlich nur nöthig, den Antheil des ersten und zweiten Sohnes zu entwickeln, da

einer so viel bekommen soll, als der andere und folglich ergibt sich die Gleichung

$$100 + \frac{x-100}{8} = 200 + \frac{7x-2300}{64}.$$

Alles auf einerlei Nenner gebracht und die Zähler gleich gesetzt, kommt $6400 + 8x - 800 = 12800 + 7x - 2300$,
also $8x - 7x = 12800 - 6400 - 2300 + 800$,
folglich $x = 13600 - 8700 = 4900$.

Die ganze Erbschaft war also 4900 thlr. Davon bekam der erste Sohn 100 thlr. und vom Reste 4800 den achten Theil, also 600 thlr., er hatte also zusammen 700 thlr.; der zweite Sohn nahm vom Reste 4200 thlr. erst 200 thlr., bleiben 4000, und davon den achten Theil, macht 500 thlr., also hatte er auch 700 thlr.; der dritte Sohn nahm vom Reste 3500 thlr. erst 300 thlr. und von den übrigen 3200 thlrn. den achten Theil, also 400 thlr., folglich hatte er auch 700 thlr. u. s. w. Dividirt man nun mit 700, als dem Antheile eines jeden in die Erbschaftsmasse, so ist der Quotient $= 7$ und dies ist die Zahl der Brüder.

Diese Aufgabe läßt sich auch allgemein so darstellen:

Ein Vermögen soll unter mehrere Söhne vertheilt werden.

A nimmt a thlr. voraus und vom Reste den mten Theil.

B nimmt vom noch Vorhandenen 2a und vom Übrigen den mten Theil.

C nimmt vom Reste 3a und vom noch Vorhandenen den mten Theil u. s. w.

Es findet sich, daß einer so viel hat, als der andere. Wie groß ist die Erbschaft, wie viel Söhne, wie viel ein jeder?

Da A vom Vermögen x erst a thlr. und vom Reste $x - a$ den mten Theil nimmt, so bekommt er $a + \frac{x-a}{m}$.

Es bleibt von der Erbschaft noch $x - a - \frac{x-a}{m} = \frac{mx - am - x + a}{m} = \frac{x(m-1) - am + a}{m}$. Davon nimmt B erstlich 2a und vom Reste $\frac{x(m-1)-am+a}{m} - 2a$ noch den mten Theil, also bekommt B zusammen $2a + \frac{\frac{x(m-1)-am+a}{m} - 2a}{m}$

$= 2a + \frac{x(m-1)-am+a-2am}{m^2} = 2a + \frac{x(m-1)-3am+a}{m^2}$.

Da nun der Antheil von A gleich dem von B ist, so hat man die Gleichung

$$a + \frac{x-a}{m} = 2a + \frac{x(m-1)-3am+a}{m^2}.$$

Alles auf Einen Nenner gebracht, kommt

$$am^2 + mx - am = 2am^2 + mx - x - 3am + a.$$

Das Unbekannte auf die linke Seite allein gebracht, erhält man

$$mx - mx + x = 2am^2 - am^2 - 3am + am + a,$$

oder $$x = am^2 - 2am + a,$$

oder $$x = a(m^2 - 2m + 1).$$

Es ist aber $m^2 - 2m + 1$ das Quadrat von $m - 1$, also $x = a(m-1)^2$.

Setzt man diesen Werth von x in die Formel für den Antheil des ersten Sohnes, so ist dieser $= a + \frac{a(m-1)^2 - a}{m}$

$$= \frac{ma + a(m-1)^2 - a}{m} = \frac{a[m + (m-1)^2 - 1]}{m}$$

$$= \frac{a(m + m^2 - 2m + 1 - 1)}{m} = \frac{a(m^2 - m)}{m} = \frac{am(m-1)}{m}$$

$$= a(m-1).$$

Mit diesem Antheile, der dem eines jeden Sohnes gleich ist, in die ganze Erbschaft $a(m-1)^2$ dividirt, kommt die Anzahl der Söhne $= \frac{a(m-1)^2}{a(m-1)} = \frac{(m-1)^2}{m-1} = m - 1$.

Die Anzahl der Söhne ist also immer um 1 kleiner, als die Zahl, welche anzeigt, den wie vielsten Theil jeder vom gebliebenen Reste nehmen soll. Übrigens kann man a und m ganz beliebig nehmen.

Die Formeln für die ganze Erbschaft $x = a(m-1)^2$ und für den Antheil eines jeden $= a(m-1)$ lassen sich bequem in eine Regel ausdrücken. Wenn auf die angezeigte Art eine Geldsumme getheilt werden soll, so ist der Antheil eines jeden ein Produkt aus der Summe, die der erste vorausnimmt, und der um 1 verminderten Zahl, welche anzeigt, den wie vielsten Theil jeder vom Reste nimmt. Das Kapital aber ist ein Produkt aus dem Quadrate dieser um 1 verminderten Zahl und der Summe, die der erste vorausnimmt.

§. 246.

Zehnte Aufgabe.

Wenn jemand den Scheffel mit a thlrn. bezahlt, so kann er b Schfl. kaufen; er will aber gern c Schfl. haben, wie theuer muß er den Scheffel bezahlen?

Setzen wir den gesuchten Preis des Scheffels $= y$, so kosten c Schfl. offenbar cy thlr., die b Schfl. aber kosten ab thlr. Beide Summen drücken das Geld aus, das er an den Kauf wenden will, sind also einander gleich und so ergibt sich die Gleichung

$$cy = ab,$$

$$\text{also} \quad y = \frac{ab}{c},$$

d. h. man dividire das Geld, das er an den Kauf wenden will, durch die Zahl der Scheffel, die er zu kaufen wünscht, und jenes Geld findet sich, wenn man b Schfl. mit dem Preise a thlr. multiplizirt.

Aus der Gleichung $cy = ab$ ergibt sich auch die Proportion $c : b = a : y$, d. h. die Zahl der Scheffel, die er zu kaufen wünscht, verhält sich zur Zahl der Scheffel, die er für den Preis a thlr. bekommen kann, wie dieser Preis zu dem gesuchten.

Beispiele.

a) Wenn jemand den Scheffel mit 1 thlr. 18 gr. 10 pf. bezahlt, so kann er $17\frac{5}{6}$ Wspl. kaufen; er will aber gern $20\frac{3}{4}$ Wspl. haben, wie theuer also der Scheffel?

b) Wenn jemand das Pfund mit $8\frac{3}{4}$ gr. bezahlt, so kann er $11\frac{7}{8}$ Ztn. kaufen; er will aber gern $12\frac{3}{4}$ Ztn. haben, wie theuer muß er also 1 Pfd. bezahlen?

c) Wenn jemand $2\frac{5}{8}$ Elle mit 7 thlr. $15\frac{3}{4}$ gr. bezahlt, so kann er $20\frac{7}{8}$ Elle kaufen; er möchte aber gern für sein Geld $25\frac{1}{2}$ Elle haben, wie theuer muß er 1 Elle bezahlen?

§. 247.

Elfte Aufgabe.

Wenn ein Kaufmann das Pfund für a thlr. verkauft, so gewinnt er an der ganzen Waare c thlr.; verkauft er aber das Pfund für b thlr., so gewinnt er d thlr., wie viel betrug die Waare?

Es sei die ganze Waare $= x$, so ist die Einnahme bei der ersten Art des Verkaufs ax thlr.; davon den Gewinn c thlr. abgezogen, erhält man die Ausgabe beim Einkaufe $= ax - c$. Die Einnahme bei der zweiten Art des Verkaufs $= bx$ thlr. und also die Ausgabe $= bx - d$. Diese beiden Ausgaben sind die nämlichen, also ergibt sich die Gleichung

$$ax - c = bx - d,$$

also $d - c = bx - ax$,
oder $d - c = x(b - a)$,
folglich $\frac{d-c}{b-a} = x$,

d. h. man findet die Größe der Waare, wenn man den Unterschied der Gewinne durch den Unterschied der Verkaufspreise dividirt.

Man kann aus der letzten Gleichung auch eine Proportion machen, weil $x = 1 \cdot x$ ist, also

$$b - a : d - c = 1 : x,$$

d. h. der Unterschied der Verkaufspreise für 1 Pfd. verhält sich zum Unterschiede der Gewinne am Ganzen, wie 1 Pfd. zur ganzen Waare.

Beispiele.

a) Wenn das Pfund für $10\frac{3}{8}$ gr. verkauft wird, so werden an der Waare 280 thlr. gewonnen, zu $11\frac{3}{4}$ gr. aber 340 thlr., wie viel beträgt die Waare?

Es ist also $x = \frac{340 - 280}{\frac{11\frac{3}{4}}{24}\text{ thlr.} - \frac{10\frac{3}{8}}{24}\text{ thlr.}} = \frac{60}{\frac{11\frac{3}{4} - 10\frac{3}{8}}{2}\text{ gr.}}$

$= \frac{24 \cdot 60}{1\frac{3}{8}} = \frac{24 \cdot 60}{\frac{11}{8}} = \frac{24 \cdot 60 \cdot 8}{11} = \frac{11520}{11} = 1047\frac{3}{11}$ Pfd.

$= 9$ Ztn. $57\frac{3}{11}$ Pfd.

b) Wird der Scheffel zu 1 thlr. $20\frac{3}{4}$ gr. verkauft, so werden 860 thlr., zu 2 thlr. $3\frac{5}{6}$ gr. aber 1280 thlr. gewonnen, wie viel Getreide ist verkauft worden?

c) Verkauft man die Elle zu 3 thlr. $15\frac{3}{8}$ gr., so gewinnt man 45 thlr., zu 3 thlr. $20\frac{2}{3}$ gr. aber 70 thlr., wie viel Ellen waren es?

d) Verkauft man das Pfund für $18\frac{5}{9}$ gr., so werden 340 thlr. gewonnen, zu $12\frac{3}{4}$ gr. aber, 35 thlr. verloren, wie viel Pfund waren es?

Verlust ist negativer Gewinn, in obiger Formel also ist, wenn $a = 18\frac{5}{9}$ gr. und $b = 12\frac{3}{4}$ gr., $c = 340$ thlr., der Verlust 35 thlr. $= -d$, also $x = \frac{-35 - 340}{\frac{12\frac{3}{4} - 18\frac{5}{9}}{24}}$

$= \frac{24 \cdot -375}{12\frac{3}{4} - 18\frac{5}{9}} = \frac{24 \cdot -375}{12\frac{27}{36} - 18\frac{20}{36}} = \frac{24 \cdot -375}{-5\frac{29}{36}} = \frac{24 \cdot 375}{5\frac{29}{36}}$

$= \frac{24 \cdot 375}{\frac{209}{36}} = \frac{24 \cdot 375 \cdot 36}{209} = \frac{324000}{209} = 1550\frac{50}{209}$ Pfd.

$= 14$ Ztn. $10\frac{50}{209}$ Pfd.

e) Jemand muß das Pfund für 2 thlr. $13\frac{3}{4}$ gr. verkaufen, er verliert dabei 586 thlr.; hätte er aber 3 thlr. $4\frac{5}{6}$ gr. dafür bekommen, ſo würde er 872 thlr. gewonnen haben, wie viel betrug die Waare?

f) Wird die Elle gr. 2 thlr. $18\frac{3}{8}$ gr. verkauft, ſo gewinnt der Kaufmann 1800 thlr., für 2 thlr. $3\frac{4}{7}$ gr. aber verliert er 960 thlr., wie viel Ellen waren es?

Iſt bei beiden Verkaufspreiſen Verluſt, ſo wird die Rechnung dadurch nicht geändert. Es wird ſowol d als c negativ und

$$x = \frac{-d-(-c)}{b-a} = \frac{-d+c}{b-a} = \frac{c-d}{b-a}.$$

g) Jemand verkauft den Ballen Papier für 20 thlr. $10\frac{3}{4}$ gr. und verliert dabei 200 thlr.; hätte er ihn aber einige Wochen früher für 17 thlr. $12\frac{3}{4}$ gr. hingegeben, ſo hätte er gar 300 thlr. verloren, wie viel Ballen waren es?

Alſo $c = -200$ thlr., $d = -300$ thlr., $b = 17$ thlr. $12\frac{3}{4}$ gr., $a = 20$ thlr. $10\frac{3}{4}$ gr., folglich $x = \frac{-300-(-200)\text{ thlr.}}{17\text{thlr.}12\frac{3}{4}\text{gr.}-20\text{thlr.}10\frac{3}{4}\text{gr.}}$

$$= \frac{-300+200\text{ thlr.}}{-2\text{ thlr. }22\frac{1}{12}\text{ gr.}} = \frac{-100\text{ thlr.}}{-70\frac{1}{12}\text{ gr.}} = \frac{-200.24\text{ gr.}}{-\frac{841}{12}}$$

$$= \frac{-2400.12}{-841} = \frac{28800}{841} = 34\frac{206}{841}\text{ Ballen.}$$

§. 248.

Zwölfte Aufgabe.

Es hat Jemand a Wſpl. Getreide gekauft, davon läßt er einem Freunde b Wſpl. für den Einkaufspreis ab, verkauft das Übrige für c thlr. den Scheffel und gewinnt nun noch d thlr., wie theuer hat er eingekauft?

Setzen wir den Einkaufspreis für den Wiſpel $= x$, ſo findet ſich die Ausgabe durch den Aufſatz

1 Wſpl. : x thlr. = a Wſpl. : ax thlr.

Was er vom Freunde erhält, gibt der Aufſatz

1 Wſpl. : x thlr. = b Wſpl. : bx thlr.

Der Reſt des Getreides iſt $a-b$ Wſpl.; die Einnahme dafür gibt der Aufſatz

1 Wſpl. : c thlr. = $(a-b)$ Wſpl. : $c(a-b)$ thlr.

Beide Einnahmen zuſammen müſſen ſo groß ſein, als die Ausgabe nebſt dem Gewinne, folglich hat man die Gleichung

$$ax+d = c(a-b)+bx.$$

Also $ax - bx = c(a-b) - d$,
oder $x(a-b) = c(a-b) - d$,
also $x = \frac{c(a-b)-d}{(a-b)}$,
oder $x = c - \frac{d}{(a-b)}$,

d. h. man dividire den Gewinn durch den Rest der Waare und ziehe den Quotienten vom Verkaufspreise des Restes ab, so hat man den Einkaufspreis. Da der Verkäufer nämlich bloß beim Verkaufe des Restes gewonnen hat, so gibt der Quotient $\frac{d}{a-b}$ den Gewinn an jedem Scheffel, also denselben vom Verkaufspreis des Restes abgezogen, muß den Einkaufspreis geben.

Beispiele.

a) Es hat jemand gekauft 315 Wspl. 18¾ Schfl. Getreide; davon hat er einem Freunde 60⅚ Wspl. für den Einkaufspreis abgelassen, das Übrige aber den Scheffel für 2 thlr. 20⅔ gr. verkauft und so noch 4200 thlr. gewonnen, wie theuer ist der Scheffel eingekauft?

Hier ist a = 315 Wspl. 18¾ Schfl., b = 60⅚ Wspl., c = 2 thlr. 20⅔ gr., d = 4200 thlr.

Da der Preis des Scheffels gesucht wird, so muß man die Wispel als Scheffel ausdrücken, und da sich vermuthen läßt, daß der Abzug von c nur Groschen betragen werde, so kann man auch die Thaler im Gewinne gleich als Groschen ausdrücken.

Also ist $x = c - \frac{24d}{24(a-b)} = c - \frac{d}{a-b}$.

Also $x = 2\text{ thlr. }20\frac{2}{3}\text{ gr.} - \frac{4200}{315\text{W. }18\frac{3}{4}\text{Sch.} - 60\text{W. }20\text{Sch.}}$

$= 2\text{thlr. }20\frac{2}{3}\text{gr.} - \frac{4200}{254\text{W. }22\frac{3}{4}\text{Sch.}} = 2\text{thlr. }20\frac{2}{3}\text{gr.} - \frac{4200}{254\frac{91}{96}\text{W.}}$

$= 2\text{ thlr. }20\frac{2}{3}\text{ gr.} - \frac{4200}{\frac{24475}{96}} = 2\text{ thlr. }20\frac{2}{3}\text{ gr.} - \frac{4200 \cdot 96}{24475}$

$= 2\text{ thlr. }20\frac{2}{3}\text{ gr.} - \frac{168 \cdot 96}{979} = 2\text{ thlr. }20\frac{2}{3}\text{ gr.} - \frac{16128}{979}$

$= 2\text{ thlr. }20\frac{2}{3}\text{ gr.} - 16\frac{464}{979}\text{ gr.} = 2\text{ thlr. }4\frac{566}{29377}\text{ gr.}$

Anmerkung. Man muß bei Aufgaben dieser Art b nicht zu groß gegen a, und also den Rest a − b nicht zu klein gegen den Gewinn d annehmen, weil sonst leicht ein Quotient kommen könnte, der größer als c wäre, welches den Einkaufs-

preis negativ machen, also etwas geben würde, was im wirklichen Leben nicht vorkommen könnte. Ist $\frac{d}{a-b} = c$, käme $x = 0$, d. h. die Waare hätte beim Einkaufe gar nichts gekostet, und da in diesem Falle $d = c(a-b)$ ist, so muß man den Gewinn d so annehmen, daß er kleiner ist, als das Produkt aus dem Verkaufspreise des Restes in den Rest, also kleiner, als die Einnahme für den Rest.

b) Von $78\frac{5}{9}$ Ztn. werden an einen Freund $18\frac{5}{6}$ Ztn. für den Einkaufspreis, das Übrige aber $2\frac{3}{4}$ Pfd. für $20\frac{5}{8}$ gr. verkauft und dabei 1075 thlr. gewonnen, wie theuer ist 1 Pfd. eingekauft?

Da beim Verkaufe nicht der Preis von 1 Pfd. bestimmt ist, so muß man diesen erst suchen, dann die Zentner in Pfund und die Thaler in Groschen verwandeln, damit durchgängig alles auf einerlei Einheit gebracht werde. Es ist also in der Formel

$$c = \frac{20\frac{5}{8}}{2\frac{3}{4}} = \frac{\frac{165}{8}}{\frac{11}{4}} = \frac{165 \cdot 4}{8 \cdot 11} = \frac{165}{22} = 7\tfrac{1}{2}\text{ gr.}$$

$$\text{Also } x = 7\tfrac{1}{2} - \frac{24 \cdot 1075}{59\frac{13}{18} \cdot 110} = 7\tfrac{1}{2} - \frac{24 \cdot 1075}{\frac{1075 \cdot 110}{18}}$$

$$= 7\tfrac{1}{2} - \frac{24 \cdot 1075 \cdot 18}{1075 \cdot 110} = 7\tfrac{1}{2} - \frac{24 \cdot 18}{110} = 7\tfrac{1}{2} - \frac{432}{110}$$

$$= 7\tfrac{1}{2} - 3\tfrac{102}{110} = 7\tfrac{55}{110} - 3\tfrac{102}{110} = 3\tfrac{63}{110}\text{ gr.}$$

Wir wollen zu diesem Exempel die Probe hinzufügen, um die Richtigkeit zu zeigen.

Wenn der Einkaufspreis $3\frac{63}{110}$ gr. pro Pfund ist, so ist die Ausgabe für $79\frac{5}{9}$ Ztn. = 1286 thlr. $8\frac{1}{3}$ gr. Von dem Freunde bekommt er für die $18\frac{5}{6}$ Ztn. 308 thlr. $9\frac{1}{2}$ gr., für die $59\frac{13}{18}$ Ztn. 2052 thlr. $22\frac{5}{6}$ gr., also ist die ganze Einnahme 2361 thlr. $8\frac{1}{3}$ gr. Zieht man nun davon die Ausgabe ab, so bleiben 1075 thlr. Gewinn übrig, wie angenommen war.

c) Von $375\frac{7}{8}$ Wspl. werden $85\frac{4}{7}$ für den Einkaufspreis verkauft, das Übrige der Scheffel für 1 thlr. $21\frac{2}{3}$ gr., wie theuer ist eingekauft worden, wenn noch 3840 thlr. gewonnen werden?

d) Es hat jemand $432\frac{5}{8}$ Wspl., den Scheffel zu 1 thlr. $3\frac{1}{4}$ gr. eingekauft; er verkauft davon $105\frac{3}{8}$ Wspl. für den Einkaufspreis und gewinnt bei dem Verkauf des Restes 5860 thlr., wie theuer hat er den Scheffel verkauft?

Offenbar ergibt sich der Verkaufspreis, wenn man den Gewinn durch den Rest dividirt und den Quotienten zum Einkaufspreise addirt.

e) Jemand hat $756\frac{3}{4}$ Ztn., wovon ihm das Pfund $9\frac{3}{4}$ gr. kostet. Davon werden $174\frac{3}{8}$ Ztn. für den Einkaufspreis, der Rest aber das Pfund zu $11\frac{2}{3}$ gr. verkauft, wie viel hat er dabei gewonnen?

Man ziehe den Einkaufspreis vom Verkaufspreise ab, so hat man den Gewinn an einem Pfunde, folglich erhält man den ganzen Gewinn durch die Proportion: An 1 Pfd. gewinne ich so viel, wie viel an dem Reste der Waare?

f) Jemand hat 416 Wspl. Getreide, wovon ihm der Scheffel 1 thlr. $8\frac{2}{3}$ gr. kostet; er läßt einem Freunde einen Theil für den Einkaufspreis ab, verkauft das Übrige den Scheffel zu 1 thlr. $20\frac{3}{4}$ gr. und gewinnt noch 2320 thlr., wie viel hat er dem Freunde abgelassen?

Der Unterschied des Einkaufs- und Verkaufspreises ist der Gewinn an einem Scheffel und der Gewinn am Ganzen wurde bloß beim Verkaufe des Restes gemacht. Folglich erhalte ich das Verlangte durch den Aufsatz: Der Gewinn an einem Scheffel verhält sich zum ganzen Gewinne, wie 1 Schfl. zu dem Reste der Waare, der theurer verkauft wurde. Diesen Rest nun, von der ganzen Waare abgezogen, läßt den Theil übrig, der für den Einkaufspreis abgelassen wurde.

Das Nämliche gibt die Buchstabenrechnung. Ist die ganze Waare $= a$, der Einkaufspreis $= b$, der für den letztern abgelassene Theil $= x$, weil er unbekannt ist, der Rest also $a - x$, der Verkaufspreis desselben e und der Gewinn f, so ist die Ausgabe $= ab$, die Einnahme vom Freunde $= bx$, die Einnahme vom Reste $ae - ex$, also ergibt sich die Gleichung

$$ab + f = bx + ae - ex,$$

also $ab - ae + f = bx - ex,$

oder, weil ae größer ist als ab, und ex größer als bx, mit veränderten Zeichen

$$ae - ab - f = ex - bx,$$

oder $$a(e-b) - f = x(e-b),$$

also mit $e - b$ auf beiden Seiten dividirt, kommt

$$a - \frac{f}{e-b} = x,$$

d. h. man dividire den Gewinn durch den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises und ziehe den Quotienten von der ganzen Waare ab, so hat man den dem Freunde abgelassenen Theil.

Wenn $a - \frac{f}{e-b} = x$, so ist $-\frac{f}{e-b} = x - a$,

also $\frac{f}{e-b} = a - x$ und $a - x$ ist der Rest der Waare, und

da nun $f = (a-x) \cdot (e-b)$, f aber $= 1 \cdot f$, so ergibt sich die Proportion:

$$e-b : 1 = f : a-x,$$

worin die oben in Worten ausgedrückte Regel enthalten ist. Man erhält also den Rest $a-x$, und dieser, von a abgezogen, läßt x übrig.

Kürzer ist unstreitig gleich die Formel $x = a - \frac{f}{e-b}$.

Im Exempel ist $f = 2320$ thlr., $e = 1$ thlr. $20\frac{3}{4}$ gr., $b = 1$ thlr. $8\frac{3}{4}$ gr., also $e-b = 12\frac{1}{12}$ gr. $= \frac{145}{12}$ gr. $= \frac{145}{288}$ thlr., weil f in Thaler ausgedrückt ist, also $\frac{f}{e-b} = \frac{2320}{\frac{145}{288}} = 2320 \cdot \frac{288}{145} = \frac{2320 \cdot 288}{145}$ Schs. $= \frac{2320 \cdot 288}{145 \cdot 24}$ W. $= \frac{2320 \cdot 12}{145}$ Wspl. $= \frac{464 \cdot 12}{29}$ Wspl. $= 16 \cdot 12$ Wspl. $=$ 192 Wspl., folglich ist $a - \frac{f}{e-b} = 416 - 192$ Wspl. $=$ 224 Wspl. $= x$.

Es sind also dem Freunde 224 Wspl. für den Einkaufspreis abgelassen und 192 Wspl. mit Profit verkauft worden.

Anmerkung. Auch in diesem Falle muß man sich bei Aufgaben der Art in Acht nehmen, daß der Quotient $\frac{f}{e-b}$ nicht größer, als a werde, weil sonst der Rest größer als die ganze Waare sein würde. Man muß also f gegen $e-b$ nicht zu groß annehmen. Ist $a = \frac{f}{e-b}$, so ist $x = 0$, d. h. es ist gar nichts für den Einkaufspreis abgelassen worden. Alsdann ist auch $a(e-b) = f$, folglich muß man f so annehmen, daß $a(e-b)$, d. h. das Produkt aus der ganzen Waare in den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises, größer als f sei. Im Exempel ist $a(e-b) = 416 \cdot 24\frac{1}{288} = \frac{416 \cdot 145}{12} = \frac{104 \cdot 145}{3} = 5026\frac{2}{3}$, also durfte f nicht größer als $5026\frac{2}{3}$ thlr. angenommen werden, wenn die Aufgabe Sinn haben sollte.

g) Von 321 Ztn. $56\frac{7}{8}$ Pfd. Zucker, wovon das Pfund beim Einkaufe $7\frac{3}{4}$ gr. kostet, ist ein Theil für den Einkaufspreis, der Rest aber das Pfund für $11\frac{2}{3}$ gr. verkauft und 3854 thlr. gewonnen worden, wie viel wurde ohne Gewinn verkauft?

h) Von $827\frac{3}{4}$ Ellen Tuch kostet die Elle beim Einkaufe 5 thlr. 21 gr.; ein Theil wird für diesen Preis wieder verkauft, das Übrige aber die Elle für 6 thlr. 15 gr. und dabei ein Gewinn von 400 thlrn. gemacht, wie viel wurde ohne Profit verkauft?

§. 249.

§. 249.

Dreizehnte Aufgabe.

Von einer Partie Zeug, wovon die Elle 3 thlr. 20 gr. kostet, werden einem Freunde 100 Ellen für den Einkaufspreis abgelassen, das Übrige die Elle zu 4 thlr. 8 gr. verkauft und dabei ein Gewinn von 800 thlrn. gemacht; wie viel Ellen waren es?

Nehmen wir erst die Aufgabe allgemein. Es hat jemand eine Partie Zeug, die Elle für b thlr. gekauft, läßt davon c Ellen für denselben Preis ab, verkauft das Übrige die Elle für e thlr. und gewinnt noch f, so kann man die unbekannte Anzahl Ellen der gekauften Partie $= x$ setzen, folglich ist die Ausgabe $= bx$, die Einnahme aber erstlich bc und dann noch, da der Rest $= x - c$ ist, $= ex - ec$; beide Einnahmen zusammen sind gleich der Ausgabe und dem Gewinne, also ergibt sich die Gleichung

$$bx + f = bc + ex - ec,$$

folglich $f + ec - bc = ex - bx,$

oder $f + c(e - b) = x(e - b),$

also $\frac{f + c(e - b)}{e - b} = x,$

oder $\frac{f}{e - b} + c = x,$

d. h. man dividire den Gewinn durch den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises und addire den Quotienten zu dem für den Einkaufspreis abgelassenen Theil, so erhält man die ganze Waare.

Oder, da $\frac{f}{e - b} = x - c$ und $x - c$ der Rest der Waare ist, welcher theurer verkauft wurde, so ergibt sich aus dieser Gleichung auch die Proportion:

$$e - b : f = 1 : x - c,$$

d. h. der Unterschied des Ein- und Verkaufspreises, folglich der Gewinn an 1 Elle verhält sich zum ganzen Gewinne, wie 1 Elle zum Reste. Dieser Rest dann zu c addirt, gibt die ganze Waare.

Im Exempel ist $f = 800$ thlr., $e = 4$ thlr. 8 gr., $b = 3$ thlr. 20 gr., also $e - b = 12$ gr., folglich $\frac{f}{e - b} = \frac{800 \text{ thlr.}}{12 \text{ gr.}} = \frac{800 \text{ thlr.}}{\frac{1}{2} \text{ thlr.}} = 1600$, und dies zu c addirt, kommt 1700 Ellen als der Betrag der ganzen Partie.

Beispiele.

a) Von einer Waare, wovon das Pfund $6\frac{2}{3}$ gr. kostet, werden einem Freunde $20\frac{1}{3}$ Stn. für den Einkaufspreis abge-

lassen, das Übrige aber das Pfund für $10\frac{3}{4}$ gr. verkauft und 1200 thlr. dabei gewonnen; wie viel betrug die ganze Waare?

b) Ein Amtmann hat einen Vorrath Getreide, wovon ihm der Scheffel $1\frac{1}{4}$ thlr. zu stehen kommt; er muß davon, weil die Preise fallen, $54\frac{3}{8}$ Wspl. für den Einkaufspreis hingeben, nachher aber steigen die Preise wieder und er bekommt den Rest mit 2 thlr. 8 gr. bezahlt. Wie viel Vorrath hatte er, wenn sein Gewinn noch 3570 thlr. betrug?

c) Ein Weinhändler verkauft von seinem Vorrathe, wovon ihm der Anker 12 thlr. kostet, 4 Orhoft $2\frac{3}{4}$ Eimer für den Einkaufspreis, das Übrige später, den Anker für 16 thlr., so daß er 100 thlr. gewinnt, wie stark war sein Weinlager?

§. 250.

Anmerkung.

In den bisherigen Beispielen kann man statt Gewinn auch Verlust setzen; die Rechnung ist im Wesentlichen dieselbe, nur wird aus Addition Subtraktion und umgekehrt, weil Verlust negativer Gewinn ist.

Beispiele.

a) Es hat jemand einen Vorrath von $520\frac{3}{4}$ Wspl. Getreide, wovon er $135\frac{7}{8}$ Wspl. für den Einkaufspreis verkauft, das Übrige aber unter diesen Preis, den Scheffel für 1 thlr. $3\frac{2}{3}$ gr. verkaufen muß und dabei 2000 thlr. Schaden leidet; wie theuer hat er eingekauft?

In §. 248. zwölfte Aufgabe war $x = c - \frac{d}{a-b}$. Da nun jetzt aber d Verlust bedeutet, so ist es negativ und also $x = c + \frac{d}{a-b}$. Da nun $c = 1$ thlr. $3\frac{2}{3}$ gr., $a = 520\frac{3}{4}$ W. und $b = 135\frac{7}{8}$ Wspl., d aber $= 2000$ thlr. ist, so ist

$x = 1$ thlr. $3\frac{2}{3}$ gr. $+ \frac{2000}{520\frac{3}{4} - 135\frac{7}{8}} = 1$ thlr. $3\frac{2}{3}$ gr. $+ \frac{2000}{384\frac{7}{8}}$

$= 1$ thlr. $3\frac{2}{3}$ gr. $+ \frac{2000 \cdot 8}{3079} = 1$ thlr. $3\frac{2}{3}$ gr. $+ 5$ gr. $2\frac{1102}{3079}$ pf.

$= 1$ thlr. 8 gr. $10\frac{1102}{3079}$ pf.

b) Von $315\frac{7}{9}$ Stn. werden $98\frac{3}{4}$ Stn. für den Einkaufspreis, das Übrige aber das Pfund zu $8\frac{3}{4}$ gr. verkauft und dabei 1580 thlr. Schaden gemacht; wie theuer eingekauft?

c) Von 348 Wspl. $18\frac{3}{4}$ Schfl. à 2 thlr. 15 gr. werden $108\frac{5}{6}$ Wspl. für den Einkaufspreis verkauft, beim Verkaufe

des Übrigen aber ein Schaden von 3400 thlrn. gemacht; wie theuer ist also der Scheffel verkauft worden?

Die Auflösung ist wie §. 248. zwölfte Aufgabe, c aber der Quotient: Verlust durch den Rest dividirt, muß vom Einkaufspreise abgezogen werden.

d) Von $623\frac{1}{8}$ Ztn. werden $125\frac{3}{4}$ Ztn. für den Einkaufspreis à $10\frac{2}{3}$ gr. pro Pfund, der Rest aber für $6\frac{3}{4}$ gr. das Pfund verkauft; wie stark ist der Verlust?

Man sucht den Verlust an einem Pfunde und daraus den Verlust am Reste.

e) Jemand hat $732\frac{1}{5}$ Wspl. Getreide, wovon der Scheffel 1 thlr. $14\frac{3}{4}$ gr. kostet. Er verkauft davon einen Theil für den Einkaufspreis, vom Reste aber den Scheffel zu 1 thlr. $6\frac{3}{4}$ gr. Dabei verliert er 4840 thlr.; wie viel hat er für den Einkaufspreis verkauft?

Die Auflösung ist wie in §. 248. zwölfte Aufgabe, f). Dort war $x = a - \frac{f}{e-b}$. Nun ist aber jetzt f negativ, folglich $x = a + \frac{f}{e-b}$; aber da im Divisor e (der Verkaufspreis) kleiner ist als b (der Einkaufspreis), so wird der Divisor negativ, und um ihn positiv zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner mit -1, d. h. man gebe beiden die entgegengesetzten Zeichen, so wird $+\frac{f}{e-b}$ verwandelt in $-\frac{f}{b-e}$ und also ist $x = a - \frac{f}{b-e}$. Die Zahlen geben $x = 732\frac{1}{5}$ Wspl. $- \frac{4840}{1\text{ thlr. }14\frac{3}{4}\text{ gr.} - 1\text{ thlr. }6\frac{3}{4}\text{ gr.}} = 732\frac{1}{5}$ Wspl. $- \frac{4840\text{ thlr.}}{8\text{ gr.}}$ $= 732\frac{1}{5}$ Wspl. $- \frac{4840}{\frac{1}{3}\text{ thlr.}} = 732\frac{1}{5}$ Wspl. $- 4840 \cdot 3 =$ $732\frac{1}{5}$ Wspl. $-$ 14520 Schfl. $= 732\frac{1}{5}$ Wspl. $-$ 605 Wspl. $= 127\frac{1}{5}$ Wspl.

Die Anmerkung zu §. 248. zwölfte Aufgabe, f) ist auch hier gültig.

f) Jemand hat Zucker, wovon ihm das Pfund 8 gr. kostet, er verkauft davon 20 Ztn. für den Einkaufspreis, das Übrige aber nur zu 6 gr. pro Pfund; er macht einen Verlust von 400 thlrn.; wie viel betrug die ganze Quantität des Zuckers?

Die Auflösung ist wie in §. 249. dreizehnte Aufgabe, wo $x = c + \frac{f}{e-b}$ war. Es ist jetzt f negativ, und der Divisor $e - b$, weil e kleiner als f ist, auch negativ; folglich

$\frac{-f}{e-b} = \frac{f}{b-e}$ und also $x = c + \frac{f}{b-e}$. Es ist $c = 20$ Ztn., $f = 400$ thlr., $b = 8$ gr., $e = 6$ gr., also $x = 20$ Ztn. $+ \frac{400 \text{ thlr.}}{8 \text{ gr.} - 6 \text{ gr.}} = 20$ Ztn. $+ \frac{400 \text{ thlr.}}{2 \text{ gr.}} = 20$ Ztn. $+ \frac{400}{\frac{1}{72} \text{ thlr.}} = 20$ Ztn. $+ 4800$ Pfd. $= 20$ Ztn. $+ 43$ Ztn. 70 Pfd. $= 63$ Ztn. 70 Pfd.

§. 251.

Vierzehnte Aufgabe.

Es kann auch der Fall eintreten, daß ein Theil der Waare verdirbt und daß man beim Verkaufe des Übrigen entweder schadlos gehalten wird, oder noch gewinnt, oder verliert. Darüber ergeben sich folgende Aufgaben:

a) Es hat jemand a Ztn. gekauft, das Pfund für b gr.; ein Theil verdirbt ihm, er verkauft aber das Übrige so, daß er schadlos gehalten wird, indem er das Pfund mit e gr. bezahlt bekommt; wie viel ist ihm verdorben?

Die Ausgabe ist $= ab$, der verdorbene Theil sei $= x$, so ist der Rest der Waare, den er verkaufen kann $= a - x$ und die Einnahme dafür $= ac - xc$; dies muß nun so viel als die Ausgabe betragen, folglich ergibt sich die Gleichung

$$ab = ac - xc,$$

$$\text{also} \quad xc = ac - ab,$$

$$\text{oder} \quad xc = a(c - b),$$

$$\text{folglich} \quad x = \frac{a(c-b)}{c}.$$

Man findet also die Größe des verdorbenen Theils, wenn man den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises mit der ganzen Waare multiplizirt und das Produkt durch den Verkaufspreis dividirt.

Aus der Gleichung $xc = a(c - b)$ fließt auch die Proportion

$$c : c - b = a : x,$$

d. h. der Verkaufspreis verhält sich zum Unterschiede des Ein- und Verkaufspreises, wie die ganze Waare zum verdorbenen Theile.

Beispiel.

Jemand hat einen Vorrath von 380 Wspln. Getreide, wovon ihm der Scheffel 1 thlr. 8 gr. kostet; ein Theil verdirbt ihm, das Übrige verkauft er den Scheffel für 1 thlr. 16 gr. und wird dadurch schadlos gehalten; wie viel ist ihm verdorben?

Im Exempel ist $a = 380$ Wspl. $= 9120$ Schfl., $b = 1$ thlr. 8 gr., $c = 1$ thlr. 16 gr., also $c - b = 8$ gr. $= \frac{1}{3}$ thlr., folglich $x = \frac{9120 \cdot \frac{1}{3}}{1\frac{2}{3}\text{ thlr.}} = \frac{9120}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9120}{5} = 1824$ Schfl. $= 76$ Wspl.

b) Ein Anderer hat a Ztn., wovon das Pfund ihm b gr. kostet, ein Theil verdirbt, das Übrige verkauft er das Pfund für c gr. und hat noch einen Gewinn von d thlrn.; wie viel ist verdorben?

Jetzt muß die Ausgabe und der Gewinn so groß als die Einnahme für das Übrige sein, also hat man die Gleichung

$$ab + d = ac - xc,$$

$$\text{also} \quad xc = ac - ab - d,$$

$$\text{oder} \quad xc = a(c - b) - d,$$

$$\text{folglich} \quad x = \frac{a(c-b)-d}{c}.$$

Man muß also von dem Produkte aus der ganzen Waare in den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises noch den Gewinn d abziehen, und den Rest durch den Verkaufspreis dividiren, so erhält man das Verdorbene.

Beispiel.

Jemand hat 20 Ztn. Kaffee, wovon ihm das Pfund 6 gr. kostet, ein Theil geht ihm verloren, er verkauft aber den Rest das Pfund für 10 gr. und gewinnt so noch 100 thlr.; wie viel ist ihm verdorben?

Es ist also $a = 20$ Ztn. $= 2200$ Pfd., $b = 6$ gr. $= \frac{1}{4}$ thlr., $c = 10$ gr. $= \frac{5}{12}$ thlr., $d = 100$ thlr., also

$$x = \frac{2200\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4}\right) - 100}{\frac{5}{12}} = \frac{2200 \cdot \frac{1}{6} - 100}{\frac{5}{12}} = \left(\frac{2200}{6} - 100\right) \cdot \frac{12}{5} = \frac{2200 - 600}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{1600}{6} \cdot \frac{12}{5} = 1600 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3200}{5}$$

$= 640$ Pfd. $= 5$ Ztn. 90 Pfd.

c) Hat er statt des Gewinnes noch Schaden, so ist das obige d negativ, also $-d = +d$ und folglich $x = \frac{a(c-b)+d}{c}$.

Beispiel.

Es hat jemand 8 Orhoft Wein, wovon ihm der Anker 12 thlr. kostet; ein Theil verdirbt, das Übrige verkauft er den Anker für 14 thlr., aber er hat doch noch 51 thlr. Schaden; wie viel ist ihm verdorben?

Hier ist $a = 8$ Orhoft $= 48$ Anker, $b = 12$ thlr., $c = 14$ thlr., $d = 51$ thlr., also $x = \frac{48(14-12)+51}{14} = \frac{48 \cdot 2 + 51}{14} = \frac{96+51}{14} = \frac{147}{14} = 10\frac{1}{2}$ Anker.

§. 252.

Funfzehnte Aufgabe.

Es kann das Verdorbene bekannt sein, und man kann nach dem ganzen Vorrathe, oder nach dem Ein- oder Verkaufspreise fragen, und zwar alles dies für den Fall der Schadloshaltung, des Gewinnes und des Verlustes. Dies giebt folgende Aufgaben:

a) Von einem Getreidevorrathe, wovon der Wispel 30 thlr. kostet, verderben 24 Wspl., das Übrige wird à 36 thlr. für den Wispel verkauft; wie groß war der Vorrath für den Fall der Schadloshaltung? wie groß, wenn noch 400 thlr. gewonnen werden? wie groß, wenn 200 thlr. Verlust ist?

Wenn wir allgemein den Einkaufspreis $= b$, den Verkaufspreis $= c$, Gewinn oder Verlust $= d$ setzen, und mit x das Verdorbene, mit a den unbekannten Vorrath bezeichnen, so hat man für den Fall der Schadloshaltung aus §. 251. vierzehnte Aufgabe, a)

$$x = \frac{a(c-b)}{c},$$

folglich $cx = a(c-b)$,

also $\frac{cx}{c-b} = a$.

Der ganze Vorrath findet sich also, wenn man das Verdorbene mit dem Verkaufspreise multiplizirt und das Produkt durch den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises dividirt. Aus der Gleichung $cx = a(c-b)$ folgt auch die Proportion

$$c-b : c = x : a,$$

d. h. der Unterschied des Ein- und Verkaufspreises verhält sich zum Verkaufspreise, wie der verdorbene Theil zum ganzen Vorrathe.

Im Exempel ist $x = 24$, $c = 36$, $b = 30$, also $a = \frac{36 \cdot 24}{36-30} = \frac{36 \cdot 24}{6} = 6 \cdot 24 = 144$ Wspl.

Für den Fall des Gewinnes aus §. 251. vierzehnte Aufg., b)

$$x = \frac{a(c-b)-d}{c},$$

also $cx = a(c-b)-d$,

folglich $cx+d = a(c-b)$,

also $\frac{cx+d}{c-b} = a$,

d. h. zum Produkte aus dem Verdorbenen in den Verkaufspreis muß man noch den Gewinn addiren und die Summe durch den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises dividiren, so erhält man den ganzen Vorrath.

Im Exempel ist $x = 24$, $b = 30$, $c = 36$, $d = 400$ thlr., also $a = \frac{36 \cdot 24 + 400}{36 - 30} = \frac{864 + 400}{6} = \frac{1264}{6} = 210\frac{4}{6}$ Wspl.

Für den Fall des Verlustes, wo $d = 200$ thlr. ist. Aus der Gleichung §. 251. vierzehnte Aufgabe, c) hat man

$$x = \frac{a(c-b)+d}{c},$$

also $cx = a(c-b)+d$,
folglich $cx - d = a(c-b)$,

also $\frac{cx-d}{c-b} = a$,

d. h. vom Produkte aus dem Verdorbenen in den Verkaufspreis ziehe man den Verlust ab und dividire den Rest durch den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises.

Im Exempel ist $x = 24$, $c = 36$, $b = 30$, $d = 200$, also $a = \frac{36 \cdot 24 - 200}{36 - 30} = \frac{864 - 200}{6} = \frac{664}{6} = 110\frac{4}{6}$ Wspl.

Den Verlust d muß man immer kleiner annehmen, als das Produkt cx, weil sonst das Resultat ungereimt würde.

b) Von 429 Ztn. sind 109 Ztn. verdorben, das Übrige wird das Pfund für 9 gr. verkauft; wie groß war der Einkaufspreis im Fall der Schadloshaltung, im Fall eines Gewinnes von 400 thlrn. und im Falle eines Verlustes von 1000 thlrn.?

Wenn man allgemein den Vorrath $= a$, den Verkaufspreis $= c$, das Verdorbene $= x$ und den unbekannten Einkaufspreis $= b$ setzt, so hat man im Fall der Schadloshaltung aus §. 251. vierzehnte Aufgabe, a) die Gleichung

$$x = \frac{a(c-b)}{c},$$

also $cx = ac - ba$,
folglich $ab = ac - cx$,
oder $ab = c(a-x)$,

also $b = \frac{c(a-x)}{a}$,

d. h. man dividire die Einnahme für den Rest durch die ganze Waare, so hat man den Einkaufspreis.

Im Exempel ist $c = 9$ gr., $a = 429$ Ztn., $x = 109$ Ztn., also $b = \frac{9 \cdot (429-109) \cdot 110}{429 \cdot 110} = \frac{9(429-109)}{429} = \frac{9 \cdot 320}{429}$
$= \frac{3 \cdot 320}{143} = \frac{960}{143} = 6\frac{102}{143}$ gr.

Für den Fall eines Gewinnes von 400 thlrn. ist aus §. 251. vierzehnte Aufgabe, b)

$$x = \frac{a(c-b)-d}{c},$$

$$\text{also} \quad cx = ac - ab - d,$$

$$\text{folglich} \quad ab = ac - cx - d,$$

$$\text{oder} \quad ab = c(a-x) - d,$$

$$\text{also} \quad b = \frac{c(a-x)-d}{a},$$

d. h. man findet den Einkaufspreis, wenn man von der Einnahme für den Rest den Gewinn abzieht und den Rest durch den ganzen Vorrath dividirt.

Im Exempel ist $c = 9$ gr., $a = 429$ Ztn., $x = 109$ Ztn. $d = 400$ thlr. Da der Gewinn in Thalern gegeben ist, so muß man auch c durch Thaler und die Zentner durch Pfund ausdrücken, also $c = \frac{3}{8}$ thlr., folglich

$$b = \frac{\frac{3}{8}(429-109).110-400}{429.110} = \frac{\frac{3}{8}.320.110-400}{429.110}$$

$$= \frac{120.110-400}{429.110} = \frac{120.11-40}{429.11} = \frac{1320-40}{4719}$$

$$= \frac{1280}{4719}\text{ thlr.} = \frac{1280.24}{4719}\text{ gr.} = \frac{1280.8}{1573} = \frac{10240}{1573}$$

$$= 6\tfrac{802}{1573}\text{ gr.}$$

Das Pfund ist also für $6\frac{802}{1573}$ gr. eingekauft worden.

Für den Fall des Verlustes ist d negativ, also das $-d$ im vorigen Falle $= +d$, folglich

$$b = \frac{c(a-x)+d}{a},$$

d. h. zur Einnahme für den Rest addire man den Verlust und dividire die Summe durch den ganzen Vorrath. Nach den Zahlen des Exempels ist also

$$b = \frac{\frac{3}{8}(429-109).110+1000}{429.110} = \frac{\frac{3}{8}.320.110+1000}{429.110}$$

$$= \frac{120.110+1000}{429.110} = \frac{120.11+100}{429.11} = \frac{1320+100}{4219}$$

$$= \frac{1420}{4719}\text{ thlr.} = \frac{1420.24}{4719}\text{ gr.} = \frac{1480.8}{1573}\text{ gr.} = \frac{11360}{1573}\text{ gr.}$$

$$= 7\tfrac{349}{1573}\text{ gr.}$$

Das Pfund wurde also für $7\frac{349}{1573}$ gr. eingekauft.

c) Von 325 Ztn. sind 45 Ztn. verdorben, im Einkaufe hat das Pfund 6 gr. gekostet; wie theuer muß das Pfund ver-

kauft werden, wenn der Verkäufer keinen Schaden haben, wenn er noch 400 thlr. gewinnen will, wenn er einen Verlust von 200 thlrn. erleidet?

Braucht man wieder im Allgemeinen die obigen Buchstaben in der angenommenen Bedeutung, so hat man im Falle der Schadloshaltung aus §. 251. vierzehnte Aufgabe, a)

$$x = \frac{a(c-b)}{c},$$

also $cx = ac - ab$,
folglich $ab = ac - cx$,
oder $ab = c(a-x)$,
also $\frac{ab}{a-x} = c$,

d. h. die Ausgabe durch den Rest der Waare dividirt, gibt den Verkaufspreis, oder, wenn man aus $ab = c(a-x)$ eine Proportion macht, $a-x : a = b : c$,
d. h. der Rest zur ganzen Waare, wie der Einkaufspreis zum Verkaufspreise.

Im Exempel ist $a = 325$ Ztn., $x = 45$ Ztn., $b = 6$ gr.,
also $c = \frac{325 \cdot 110 \cdot 6 \text{ gr.}}{(325-45)\,110} = \frac{325 \cdot 6}{325-45} = \frac{1950}{280} = \frac{195}{28}$
$= 6\frac{27}{28}$ gr.

In dem Falle, wo 400 thlr. gewonnen werden, hat man aus §. 251. vierzehnte Aufgabe, b)

$$x = \frac{a(c-b)-d}{c},$$

also $cx = ac - ab - d$,
folglich $ab = ac - cx - d$,
oder $ab = c(a-x) - d$,
also $ab + d = c(a-x)$,

folglich $\frac{ab+d}{a-x} = c$,

d. h. zur Ausgabe den Gewinn addirt und die Summe durch den Rest der Waare dividirt, gibt den Verkaufspreis.

Im Exempel ist also

$$c = \frac{325 \cdot 110 \cdot \frac{1}{4} \text{ thlr.} + 400 \text{ thlr.}}{(325-45) \cdot 110} = \frac{325 \cdot 110 \cdot \frac{1}{4} + 400}{280 \cdot 110}$$
$$= \frac{325 \cdot 110 + 400 \cdot 4}{4 \cdot 280 \cdot 110} = \frac{325 \cdot 11 + 40 \cdot 4}{4 \cdot 280 \cdot 11} = \frac{65 \cdot 11 + 8 \cdot 4}{4 \cdot 56 \cdot 11}$$
$$= \frac{715 + 32}{224 \cdot 11} = \frac{747}{2464} \text{ thlr.} = \frac{747 \cdot 24}{2464} \text{ gr.} = \frac{747 \cdot 3}{308}$$
$$= \frac{2241}{308} = 7\frac{85}{308} \text{ gr.}$$

unbekannten Größen ausdrückt, z. B. den zuerst verkauf Theil der Waare als irgend einen aliquoten Theil der gan als unbekannt angenommenen Waare, z. E. in 1, 2, 3 u. f. statt c etwa $\frac{x}{m}$ setzt, oder statt d, oder e, mx, wenn x d unbekannten Einkaufspreis bedeutet, oder wenn man sonst e andere Art Verhältnisse der gegebenen Theile zu den unbekannt Größen bestimmt. Man erhält dann eine Menge von Aufgabe die mehr oder weniger leichte algebraische Auflösungen zulasse auch selbst einige, welche zu quadratischen Gleichungen führen deren Auflösung erst im zweiten Theile erklärt werden wird.

§. 255.

Aufgaben mit zwei unbekannten Größen, na der obigen Tabelle geordnet.

1) Jemand verkauft von seinem Getreide 80 Wspl., den Scheffel zu $2\frac{1}{4}$ thlr., das Übrige den Scheffel zu $2\frac{3}{4}$ thlr., ge winnt so 4000 thlr.; hätte aber 4800 thlr. gewonnen, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte; wie vie Getreide hatte er, und wie theuer war der Scheffel eingekauft?

Nach den Bestimmungen der Tabelle ist die ganze Waare $= x$, der Einkaufspreis $= y$, der zuerst verkaufte Theil $= c$, der Verkaufspreis $= d$, der Rest $= x - c$, der Verkaufs preis $= e$, der wirkliche Gewinn $= f$, der mögliche $= g$.

Es ist also die Ausgabe $= xy$, dazu den möglichen Ge winn addirt, kommt die mögliche Einnahme $= xy + g$; diese wird aber auch gefunden, wenn man die ganze Waare x für e verkauft, also ist sie auch $= xe$, welches die Gleichung $xy + g = xe$ gibt. Addirt man zur Ausgabe den wirklichen Gewinn, so hat man die wirkliche Einnahme $= xy + f$; diese findet sich aber auch, wenn man die Einnahme für den ersten Theil der Waare $= cd$ und für den Rest $= (x - c)e$ zusammenrechnet. Dies gibt die zweite Gleichung $xy + f = cd + (x - c)e$.

Wir wollen an dieser Aufgabe alle drei Auflösungsmethoden durchgehen.

1) Methode der Substitution. Man suche aus der ersten Gleichung $xy + g = xe$ den Werth von x und setze diesen statt x in die zweite Gleichung. Wenn $xy + g = xe$, so ist $g = xe - xy = x(e - y)$, also $\frac{g}{e-y} = x$.

Wird dieser Werth in der zweiten Gleichung $xy + f = d + (x - c)e$ oder $xy + f = cd + xe - ce$ substituirt, so wird sich der Werth für y finden. Man bringe erst in dieser Gleichung die Glieder mit x auf Eine Seite, so erhält man

$$f + ce - cd = xe - xy,$$

oder $f + c(e - d) = x(e - y)$.

Nun substituire man, so kommt

$$f + c(e - d) = \frac{g}{e - y} \cdot (e - y),$$

also $f + c(e - d) = g$.

2) Methode der Kombination.

Erste Gleichung. $xy + g = xe$,

also $\frac{g}{e - y} = x$.

Zweite Gleichung. $xy + f = cd + xe - ce$,

also $f + ce - cd = xe - xy$,

oder $f + c(e - d) = x(e - y)$,

folglich $\frac{f + c(e - d)}{e - y} = x$.

Also ist

$$\frac{g}{e - y} = \frac{f + c(e - d)}{e - y},$$

oder wegen Gleichheit der Nenner

$g = f + c(e - d)$, wie oben.

3) Methode der Addition oder Subtraktion. Man ziehe die zweite Gleichung von der ersten ab.

Erste Gleichung $xy + g = xe$,

zweite $\quad -xy - f = -cd - xe + ce$,

also $g - f = ce - cd$,

oder $g = c(e - d) + f$, wie oben.

Durch keine der drei Auflösungsmethoden ist y bestimmt worden. Daraus folgt, daß die unbekannten Größen selbst unbestimmt sind, daß man für dieselben jeden beliebigen Werth setzen kann und daß doch den Bedingungen der Aufgabe Genüge geschehen werde. Aber diese Bedingungen sind nicht willkührlich, sondern sie müssen in der Aufgabe der Gleichung $g = f + c(e - d)$ gemäß sein. Hat man nämlich f, c, e und d willkührlich angenommen, so muß der mögliche Gewinn g so bestimmt werden, daß er den wirklichen um das Produkt aus dem ersten Theil der Waare in die Differenz der Verkaufspreise übertrifft. Da ferner $f = c(e - d) - g$ ist, so muß, wenn man c, e, d, g willkührlich annimmt, f so bestimmt werden, daß es einem Produkte weniger dem möglichen Gewinn gleich sei. Da $g - f = c(e - d)$, also $\frac{g - f}{e - d} = c$, so muß, wenn g,

f, e, d willkührlich angenommen sind, c so bestimmt werd daß es gleich ist dem Quotienten: Unterschied der Gewin dividirt durch den Unterschied der beiden Verkaufspreise. ferner $g-f = ce-cd$, also $g-f-ce = cd$, folg $\frac{g-f}{c} - e = d$, so muß, wenn g, f, c, e willkührlich a genommen sind, der Verkaufspreis des ersten Theils gleich s der Differenz zwischen dem Unterschiede der Gewinne durch d eersten Theil dividirt, und dem Verkaufspreise des Restes; m muß nämlich letztern vom erstern Quotienten abziehen. D endlich $g-f = ce-cd$, also $g-f+cd = ce$, folglic $\frac{g-f}{c} + d = e$, so muß, wenn g, f, c, d willkührlich a genommen sind, der Verkaufspreis des Restes gleich sein der Summ vom Verkaufspreise des ersten Theils und dem Quotienten: Unter schied der Gewinne, dividirt durch den ersten Theil der Waare.

Sind die Bedingungen der Aufgabe diesen Regeln gemäß so kann man für x und y setzen, was man will. Eigentlich aber wird auch nur Eine von beiden Größen willkührlich angenommen und die andere durch die erstere bestimmt. Nimmt man x willkührlich an, so muß, da $\frac{g}{e-y} = x$ ist, also $g = xe-xy$, folglich $xy = xe-g$, also $y = e-\frac{g}{x}$ der Einkaufspreis y gleich sein der Differenz zwischen dem Verkaufspreise für den Rest und dem Quotienten: möglicher Gewinn, dividirt durch die ganze Waare. Setzt man y willkührlich an, so ist vermöge der Gleichung $\frac{g}{e-y} = x$ die ganze Waare gleich dem Quotienten: möglicher Gewinn, dividirt durch die Differenz des Verkaufspreises für den Rest und des Einkaufspreises.

Im Exempel ist $c = 80$ Wspl., $d = 56$ thlr. pro Wspl., $e = 66$ thlr. pro Wspl., $f = 4000$ thlr., $g = 4800$ thlr. Es ist aber $4800 = 4000 + 80(66-56) = 4000+800$, also sind die Bedingungen richtig angenommen.

Setzt man nun $x = 200$ Wspl., so ist $y = e-\frac{g}{x} = 66-\frac{4800}{200} = 66-24 = 42$, also der Einkaufspreis = 42 thlr. pro Wspl. oder 1 thlr. 18 gr. pro Schfl.

Die Ausgabe ist dann $200 \cdot 42 = 8400$ thlr., die Einnahme für die 80 Wspl. $= 80 \cdot 56 = 4480$ thlr., die Einnahme für den Rest 120 Wspl. $= 120 \cdot 66 = 7920$, beides zusammen addirt, gibt 12400 thlr., folglich, wenn man die

Ausgabe abzieht, der wirkliche Gewinn = 4000 thlr. Die mögliche Einnahme wäre 200 . 66 = 13200 thlr. und davon die Ausgabe abgezogen, gibt den möglichen Gewinn = 4800 thlr.

Setzt man y = 48 thlr., so ist $x = \frac{g}{e-y} = \frac{4800}{66-48}$ $= \frac{4800}{18} = 266\frac{2}{3}$ Wspl. Die Ausgabe ist dann $266\frac{2}{3} . 48$ $= \frac{800}{3} . 48 = 800 . 16 = 12800$ thlr., die Einnahme für den ersten Theil = 4480 thlr., für den Rest = $186\frac{2}{3} . 66$ $= \frac{560}{3} . 66 = 560 . 22 = 12320$, also die ganze Einnahme = 16800, der wirkliche Gewinn folglich 4000 thlr. Die mögliche Einnahme ist $266\frac{2}{3} . 66 = \frac{800}{3} . 66 = 800 . 22$ = 17600 thlr., also der mögliche Gewinn = 4800 thlr.

2) Es kauft jemand eine Partie Kaffee, das Pfund für 5 gr., verkauft davon einen Theil das Pfund für 6 gr., das übrige aber das Pfund für 8 gr., gewinnt daran 2000 thlr., hätte aber 4400 thlr. gewonnen, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte; wie viel betrug die Partie Kaffee, wie viel hat er für 6 gr. verkauft?

Erste Gleichung. $xb + g = xe.$

Zweite Gleichung. $xb + f = yd + (x - y)e,$

oder $xb + f = yd + xe - ye.$

Man addire die zweite Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen zur ersten.

Erste Gleichung	$xb + g =$	$xe,$
zweite „	$-xb - f =$	$-xe - yd + ye.$
Summe	$g - f =$	$ye - yd,$
oder	$g - f =$	$y(e - d),$
also	$\frac{g-f}{e-d} =$	$y.$

Aus der ersten Gleichung erhält man x, nämlich da $xb + g = xe$, so ist $g = xe - xb$, oder $g = x(e - b)$, also $\frac{g}{e-b} = x.$

Beide Formeln für x und y lassen sich in Worten so ausdrücken: Man findet x, wenn man den möglichen Gewinn durch den Unterschied des Ein- und Verkaufspreises bei dem Reste dividirt, und y, wenn man den Unterschied beider Gewinne durch den Unterschied der Verkaufspreise dividirt.

Im Exempel ist $x = \frac{24 \cdot 4400}{8-5} = \frac{4400 \cdot 24}{3} = 35200$ Pfd. = 320 Ztn. und $y = \frac{(4400-2000)24}{8-6} = \frac{2400 \cdot 24}{2} =$ 28800 Pfd. = 261 Ztn. 90 Pfd.

3) Es hat jemand einen Weinvorrath, wovon ihm der Anker 20 thlr. kostet, er verkauft davon 36 Anker für einen gewissen Preis, das Übrige den Anker für 28 thlr., gewinnt so 300 thlr., hätte aber 500 thlr. gewonnen, wenn er allen Wein für den letztern Preis verkauft hätte. Wie groß war sein Vorrath, wie theuer hat er die 36 Anker verkauft?

Erste Gleichung. $bx + g = xe.$

Zweite Gleichung. $bx + f = cy + (x - c)e,$
oder $bx + f = cy + xe - ce.$

Zur Veränderung wollen wir die Kombination anwenden.

Aus der ersten Gleichung $xb + g = xe,$
erhält man $g = xe - xb$
$= x(e - b),$
also $\frac{g}{e-b} = x.$

Aus der zweiten Gleichung $xb + f = cy + xe - ce,$
erhält man $f = cy + xe - xb - ce,$
oder $f - cy + ce = x(e - b),$
also $\frac{f - cy + ce}{e - b} = x.$

Daraus die Gleichung

$$\frac{g}{e-b} = \frac{f - cy + ce}{e - b},$$

oder $g = f - cy + ce,$
also $cy = ce - g + f$
$= ce - (g - f),$

folglich $y = e - \frac{g - f}{c}.$

Im Exempel ist $g = 500$, $f = 300$, $b = 20$, $c = 36$ und $e = 28$, also $x = \frac{500}{28-20} = \frac{500}{8} = 62\frac{1}{2}$ Anker und $y = 28 - \frac{500-300}{36} = 28 - \frac{200}{36} = 28 - \frac{50}{9} = 28 - 5\frac{5}{9} = 22\frac{4}{9}$ thlr.

4) Es kauft jemand eine Partie Tuch, die Elle zu $2\frac{2}{3}$ thlr., verkauft davon 60 Ellen à $3\frac{1}{3}$ thlr. und das Übrige so, daß er 300 thlr. gewinnt; er hätte aber nur 500 thlr. gewonnen, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es? wie theuer der Rest verkauft?

Erste Gleichung. $xb + g = xy.$

Zweite Gleichung. $xb + f = cd + (x - c)y,$
oder $xb + f = cd + xy - cy.$

Man

Man ziehe die zweite Gleichung von der ersten ab.

Erste Gleichung $xb+g = xy,$

zweite „ $-xb-f = -cd-xy+cy.$

Rest $g-f = -cd \quad +cy,$

also $cd+g-f = cy,$

folglich $\frac{cd+g-f}{c} = y,$

oder $d+\frac{g-f}{c} = y.$

Setzt man diesen Werth für y in die erste Gleichung, so kommt

$$xb+g = \frac{x(cd+g-f)}{c},$$

also $xbc+cg = x(cd+g-f),$

folglich $cg = x(cd+g-f)-xbc,$

oder $cg = x(cd-bc+g-f)$

$= x[g-f+c(d-b)],$

folglich $\frac{cg}{g-f+c(d-b)} = x.$

Im Exempel ist $b = 2\frac{2}{3}$ thlr., $c = 60$ Ellen, $d = 3\frac{1}{3}$ thlr., $f = 800$ thlr., $g = 500$ thlr. Also

$y = 3\frac{1}{3}$ thlr. $+\frac{500-800}{60} = 3\frac{1}{3}+\frac{-300}{60} = 3\frac{1}{3}-5$

$= -1\frac{2}{3}$ thlr.

$$x = \frac{60.500}{500-800+60(3\frac{1}{3}-2\frac{2}{3})} = \frac{30000}{-300+60.\frac{2}{3}} = \frac{30000}{-300+40}$$

$$= \frac{30000}{-260} = \frac{3000}{-26} = -115\frac{5}{13} \text{ Ellen.}$$

Wir haben mit Absicht die Zahlen des Exempels so gewählt, um zu zeigen, wie auch ungereimte Resultate doch den Bedingungen der Aufgabe gemäß sind.

Das Ganze soll also aus $-115\frac{5}{13}$ Ellen, d. h. aus so viel fehlenden Ellen bestehen, von denen die Elle $2\frac{2}{3}$ thlr. kostet, also alle $-115\frac{5}{13}$ Ellen $-307\frac{9}{13}$ thlr. Nun werden 60 vorhandene Ellen à $3\frac{1}{3}$ thlr. verkauft, dies macht $+200$ thlr. Der Rest wird gefunden, wenn man $+60$ von $-115\frac{5}{13}$ abzieht, d. h. wenn man -60 zu $-115\frac{5}{13}$ Ellen addirt, also beträgt der Rest $-175\frac{5}{13}$ Ellen, wovon die Elle $-1\frac{2}{3}$ thlr. kostet, folglich ist das Facit $+292\frac{4}{13}$ thlr. Dazu die Einnahme für die 60 Ellen addirt, gibt $292\frac{4}{13}$ thlr. $+200$ thlr. $= 492\frac{4}{13}$ thlr., als die ganze Einnahme. Davon die Ausgabe $= -307\frac{9}{13}$ thlr. abgezogen, d. h. $+307\frac{9}{13}$ thlr. addirt, gibt 800 thlr. Gewinn, wie es sein soll. Wäre aber das Ganze, nämlich $-115\frac{5}{13}$ Ellen, die Elle zu $-1\frac{2}{3}$ thlr. verkauft worden,

so wäre die mögliche Einnahme $= +192\frac{4}{13}$ thlr. und davon $-307\frac{9}{13}$ thlr. abzuziehen, d. h. $+307\frac{9}{13}$ thlr. addirt, kommt $+500$ thlr. Gewinn.

Ein möglicher Sinn des Exempels wäre etwa folgender: Die 60 verkauften Ellen kosten dem Eigenthümer gar nichts, die Einnahme von 200 thlrn. ist also auch Gewinn; er hätte aber eigentlich noch $115\frac{5}{13}$ Ellen à $2\frac{2}{3}$ thlr. haben sollen, dann hätte er noch eine Einnahme und also einen Gewinn von $307\frac{9}{13}$ thlrn. gehabt, zusammen $507\frac{9}{13}$ thlr. Hätte er nun noch $175\frac{5}{13}$ Ellen à $1\frac{2}{3}$ thlr. gehabt, so hätten ihm diese noch $292\frac{8}{13}$ thlr. Gewinn gebracht, zusammen wäre also sein Gewinn 800 thlr. gewesen. Hätte er aber nicht jene 60 Ellen und $175\frac{5}{13}$ Ellen verkauft, sondern die $115\frac{5}{13}$ Ellen noch einmal für $1\frac{2}{3}$ thlr., so wäre sein anfänglicher Gewinn von $307\frac{9}{13}$ thlr. noch um $192\frac{4}{13}$ thlr. vermehrt worden, er hätte also 500 thlr. Gewinn gehabt.

Man sieht, wie leicht es möglich ist, Aufgaben ohne Sinn zu bilden. In der Formel für y hätte man die Zahlen so annehmen sollen, daß der Bruch $\frac{f-f}{c}$ zwar wol negativ, aber nur nicht größer als d gekommen wäre. Es mußte zu dem Ende c oder der erste Theil der Waare größer angenommen werden, dann wurden alle Resultate positiv. Es sei z. B. $c = 600$ Ellen, so ist $y = 3\frac{1}{3} + \frac{500-800}{600} = 3\frac{1}{3} + \frac{-300}{600} = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 2\frac{5}{6}$ thlr. und $x = \frac{600 \cdot 500}{500 - 800 + 600(3\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6})}$

$= \frac{300000}{-300 + 600 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{300000}{-300 + 400} = \frac{300000}{100} = 3000$ Ellen.

Es sind also 3000 Ellen à $2\frac{2}{3}$ thlr. eingekauft worden, folglich die Ausgabe $= 8000$ thlr., 600 Ellen sind à $3\frac{1}{3}$ thlr. verkauft worden, also die Einnahme 2000 thlr., die übrigen 2400 Ellen aber à $2\frac{5}{6}$ thlr., also die Einnahme $= 6800$ thlr., also die ganze Einnahme 8800 thlr., folglich 800 thlr. Gewinn. Wären aber die ganzen 3000 Ellen à $2\frac{5}{6}$ thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme 8500 thlr. gewesen, also 500 thlr. Gewinn.

5) Von einem Zuckervorrathe, wovon das Pfund 6 gr. kostet, werden 20 Ztn. das Pfund à 9 gr., das Übrige à 8 gr. verkauft; wie viel ist dabei gewonnen worden, wenn man, das Ganze für den Preis des Restes verkauft, 2000 thlr. gewonnen hätte, und wie viel Zucker war es?

Erste Gleichung.

$xb + g = xe.$

Zweite Gleichung.

$xb + y = cd + (x - c)e,$

oder $xb + y = cd + xe - ce.$

Zu $xb+g = xe$
addire man $-xb-y = -cd-xe+ce.$
Rest $g-y = ce-cd,$
also $g-ce+cd = y,$
oder $g-c(e-d) = y.$

Diesen Werth für y in die zweite Gleichung gesetzt, kommt

$xb+g-c(e-d) = cd+xe-ce,$
also $g-c(e-d)-cd+ce = xe-xb,$
oder $g-c(e-d)+c(e-d) = x(e-b),$
folglich $g = x(e-b),$
also $\frac{g}{e-b} = x.$

Im Exempel ist $g = 2000$ thlr., $e = 8$ gr., $b = 6$ gr., $d = 9$ gr., also

$x = \frac{2000 \cdot 24}{8\text{ gr.} - 6\text{ gr.}} = \frac{2000 \cdot 24}{2}$ gr.
$= 24000$ Pfd. $= 218$ Ztn. 20 Pfd.
$y = 2000 \cdot 24 - 20\,(8-9)\,110$
$= 48000 - 20 \cdot 110 \cdot -1$
$= 48000 - (-2200)$
$= 48000 + 2200$
$= 50200$ gr.
$= 2091\frac{2}{3}$ thlr.

Der wirkliche Gewinn ist also in diesem Falle um $91\frac{2}{3}$ thlr. größer als der mögliche.

6) Es kauft jemand Leinwand, die Elle à 5 gr., verkauft davon 100 Ellen à 6 gr., das Übrige à 8 gr., gewinnt 200 thlr.; wie viel hätte er gewonnen, wenn er alles für 8 gr. verkauft hätte, und wie viel Ellen waren es?

Erste Gleichung. $xb+y = xe.$

Zweite Gleichung. $xb+f = cd+(x-c)e,$
oder $xb+f = cd+xe-ce.$

Man addire zu $xb+y = xe$
die zweite Gleichung $-xb-f = -cd-xe+ce,$
so kommt $y-f = ce-cd,$
also $y = f+c(e-d).$

Diesen Werth in die erste Gleichung gesetzt, kommt

$xb+f+c(e-d) = xe,$
also $f+c(e-d) = xe-xb,$
$= x(e-b)$
folglich $\frac{f+c(e-d)}{e-b} = x.$

Im Exempel ist $f = 200$ thlr., $c = 100$ Ellen, $b = 5$ gr., $d = 6$ gr., $e = 8$ gr., also

$$x = \frac{200 \cdot 24 + 100\,(8-6)}{8-5} = \frac{4800 + 100 \cdot 2}{3} = \frac{5000}{3}$$
$$= 1666\tfrac{2}{3} \text{ Ellen.}$$
$$y = 200 \cdot 24 + 100\,(8-6) = 4800 + 200$$
$$= 5000 \text{ gr.} = 208 \text{ thlr. } 8 \text{ gr.}$$

§. 256.
Anmerkung.

Die bisherigen Formeln passen auch, wenn der erste Theil für den Einkaufspreis verkauft, oder verdorben ist. Im ersten Falle ist $d = b$, oder $= y$, wenn der Einkaufspreis unbekannt ist, im zweiten Falle ist $d = 0$ und wenn d unbekannt, also $= y$ ist, so fällt dieses ganz weg und es gibt nur Eine unbekannte Größe. Wir wollen für diese Fälle noch einige Beispiele hinzufügen.

1) Von dem vorräthigen Getreide verderben jemanden 20 Wspl., das übrige verkauft er den Wispel für 42 thlr. und gewinnt noch 1600 thlr.; er hätte aber 2440 thlr. gewonnen, wenn nichts verdorben wäre. Wie viel Getreide war es, wie theuer der Wispel eingekauft?

Erste Gleichung. $xy + g = xe$.

Zweite Gleichung. $xy + f = cd + xe - ce$.

Da c verdorben ist, so ist $d = 0$, also auch $cd = 0$, folglich in der zweiten Gleichung $xy + f = xe - ce$.

Aus der ersten Gleichung hat man

$$g = xe - xy$$
$$= x\,(e - y),$$
$$\text{also } \frac{g}{e-y} = x.$$

Aus der zweiten Gleichung hat man

$$f + ce = xe - xy$$
$$= x\,(e - y),$$
$$\text{also } \frac{f + ce}{e-y} = x.$$

Beide Werthe für x gleich gesetzt, kommt $g = f + ce$. Da in dieser Gleichung die unbekannte Größe ganz wegfällt, so gehört die Aufgabe zu den unbestimmten. Man kann für x beliebige Werthe setzen und darnach y bestimmen, oder auch für y beliebige Werthe und darnach x bestimmen. Indessen ist die Angabe des möglichen oder wirklichen Gewinnes, oder des verdorbenen Theils, oder des Verkaufspreises nicht

ganz willkührlich. Da $g = f + ce$ ist, so muß der mögliche Gewinn so bestimmt werden, daß er gleich der Summe des wirklichen Gewinnes und des Produkts aus dem verdorbenen Theile in den Verkaufspreis ist. Ferner da $g - ce = f$ ist, so muß, wenn der mögliche Gewinn willkührlich angenommen ist, der wirkliche gleich sein dem Unterschiede des möglichen Gewinnes und des Produkts aus dem verdorbenen Theile in den Verkaufspreis. Da ferner $g - f = ce$, also $\frac{g-f}{e} = c$, so muß, wenn g, f, e willkührlich angenommen ist, c so bestimmt werden, daß es gleich dem Quotienten: Unterschied der Gewinne, dividirt durch den Verkaufspreis, sei. Endlich ist auch $\frac{g-f}{c} = e$, also wenn g, f und c willkührlich bestimmt sind, so muß der Verkaufspreis gleich sein dem Quotienten: Unterschied der Gewinne, dividirt durch den verdorbenen Theil.

Im Exempel ist $g = 2440$ und da $f + ce = 1600 + 20 \cdot 42 = 2440$ ist, so ist g und folglich auch alles übrige richtig bestimmt. Setzt man nun etwa $x = 800$, so läßt sich y bestimmen. Es war nämlich $x = \frac{g}{e-y}$, also $xe - xy = g$, folglich $xe - g = xy$ und also $e - \frac{g}{x} = y$. In unsern Zahlen ist also $y = 42 - \frac{2440}{800} = 42 - \frac{244}{80} = 42 - 3\frac{4}{80} = 42 - 3\frac{1}{20} = 38\frac{19}{20}$ thlr.

Alsdann ist die Ausgabe $= 31160$ thlr., die Einnahme für die noch vorhandenen 780 Wspl. $= 32760$, also der Gewinn $f = 1600$ thlr., wie es sein soll; die mögliche Einnahme aber $= 33600$ thlr., also der mögliche Gewinn $= 2440$ thlr.

Bestimmt man y willkührlich, etwa $= 36$ thlr., so ist $x = \frac{g}{e-y} = \frac{2440}{42-36} = \frac{2440}{6} = 406\frac{2}{3}$ Wspl. Es ist also die Ausgabe $= 406\frac{2}{3} \cdot 36 = \frac{1220}{3} \cdot 36 = 1220 \cdot 12 = 14640$ thlr., die Einnahme für den Rest von $386\frac{2}{3}$ Wspl. $= \frac{1160}{3} \cdot 42 = 1160 \cdot 14 = 16240$ thlr., also der wirkliche Gewinn $= 1600$ thlr.; die mögliche Einnahme $= \frac{1220}{3} \cdot 42 = 1220 \cdot 14 = 17080$, folglich der mögliche Gewinn $= 2440$ thlr.

2) Jemand hat einen Vorrath von Kaffee, davon verkauft er 24 Ztn. für den Einkaufspreis, das Übrige das Pfund für 8 gr., gewinnt 200 thlr., hätte aber 360 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte; wie groß war sein Kaffeevorrath und wie theuer hat er 1 Pfd. eingekauft?

In diesem Exempel ist $d = y$, also erhält man die Gleichungen:

Erste Gleichung. $xy + g = xe$.

Zweite Gleichung. $xy + f = cy + xe - ce$.

Die zweite von der ersten abgezogen, kommt $g - f = ce - cy$, also $cy = ce - g + f$, oder $cy = ce - (g - f)$, folglich $y = e - \frac{g-f}{c}$. Da aus der ersten Gleichung $\frac{g}{e-y} = x$ folgt, so setze man statt y den gefundenen Werth, so kommt $x = \frac{g}{e - e + \frac{g-f}{c}} = \frac{g}{\frac{g-f}{c}} = \frac{cg}{g-f}$. Man findet also y, wenn man den Unterschied der Gewinne durch den ersten Theil der Waare dividirt und den Quotienten vom Verkaufspreise des Restes abzieht, und man findet x, wenn man den Gewinn mit dem ersten Theile der Waare multiplizirt und dies Produkt durch den Unterschied der Gewinne dividirt.

Im Exempel ist $c = 24$ Ztn., $e = 8$ gr. pro Pfund, also $36\frac{2}{3}$ thlr. pro Zentner, $f = 200$ thlr., $g = 360$ thlr., folglich $x = \frac{24 \cdot 3600}{3600 - 2000} = \frac{24 \cdot 360}{160} = \frac{24 \cdot 36}{16} = 3 \cdot 18 = 54$ Ztn. und $y = 36\frac{2}{3}$ thlr. $- \frac{360-200}{24} = 36\frac{2}{3}$ thlr. $- \frac{160}{24} = 36\frac{2}{3}$ thlr. $- 6\frac{2}{3}$ thlr. $= 30$ thlr.

Die Ausgabe ist $= 54 \cdot 30$ thlr. $= 1620$ thlr., die Einnahme für den ersten Theil $= 24 \cdot 30 = 720$ thlr., die Einnahme für den Rest $= 30 \cdot 36\frac{2}{3} = 30 \cdot \frac{110}{3} = 10 \cdot 110 = 1100$ thlr., also die ganze Einnahme $= 1820$ thlr., folglich der wirkliche Gewinn $= 200$ thlr. Die mögliche Einnahme $= 54 \cdot 36\frac{2}{3}$ thlr. $= 54 \cdot \frac{110}{3} = 18 \cdot 110 = 1980$ thlr., also der mögliche Gewinn $= 360$ thlr.

Soll $y = e - \frac{g-f}{c}$ einen wirklich positiven Werth bekommen, so muß der Quotient $\frac{g-f}{c}$ kleiner als e sein, sonst kommt y negativ und die Aufgabe ist im wirklichen Leben nicht möglich, obgleich übrigens alles richtig kommt. Es sei z. B. $g = 3600$, $f = 2000$, so wird $y = 36\frac{2}{3} - \frac{1600}{24} = 36\frac{2}{3} - 66\frac{2}{3} = -30$ thlr., d. h. beim Einkaufe hätte nicht der Käufer 30 thlr. bezahlt, sondern er hätte vom Verkäufer 30 thlr. pro Zentner bekommen.

Die sogenannte Ausgabe wäre dann $54 \cdot -30$ thlr. $= -1620$ thlr., d. h. sie wäre 1620 thlr. Einnahme; die Einnahme für den ersten Theil wäre $24 \cdot -30$ thlr. $= -720$ thlr., d. h. man hätte beim Verkaufe nicht 30 thlr. pro Zentner be-

kommen, sondern dem Käufer so viel gegeben. Die Einnahme für den Rest wäre $30 \cdot 36\frac{2}{3} = 1100$ thlr. Der wirkliche Gewinn also $-1620-(-720+1100) = -1620-1100+720 = -2720+720 = -2000$, oder, da die 1620 thlr. sowol als die 1100 thlr. eigentlich Einnahme, die 720 thlr. aber eigentlich Ausgabe sind, $= 1620+1100-720$ thlr. $= 2000$ thlr. Die mögliche Einnahme wäre $54 \cdot 36\frac{2}{3} = 1980$ thlr., also $1620+1980 = 3600$ thlr. der mögliche Gewinn.

3) Jemanden verdirbt ein Theil von seinem Weinvorrathe, wovon ihm der Anker 24 thlr. kostet, den übrigen verkauft er den Anker für 30 thlr., gewinnt noch 800 thlr.; wenn er aber allen Wein so theuer hätte verkaufen können, so hätte er 2000 thlr. gewonnen. Wie viel Wein war es, wie viel war ihm verdorben?

In §. 255. Nr. 2. fand man $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = \frac{g-f}{e-d}$. Da nun aber ein Theil des Weines verdarb, so ist $d = 0$, also $y = \frac{g-f}{e}$.

Im Exempel ist $b = 24$ thlr., $e = 30$ thlr., $g = 2000$ thlr., $f = 800$ thlr., also $x = \frac{2000}{30-24} = \frac{2000}{6} = 333\frac{1}{3}$ Anker und $y = \frac{2000-800}{30} = \frac{1200}{30} = 40$ Anker.

Seine Ausgabe war also $333\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{1000}{3} \cdot 24 = 8000$ thlr.; die Einnahme für den Rest $= 293\frac{1}{3} \cdot 30 = \frac{880}{3} \cdot 30 = 8800$ thlr.; also 800 thlr. Gewinn. Die mögliche Einnahme aber wäre $333\frac{1}{3} \cdot 30$ thlr. $= 10000$ thlr. gewesen, also der mögliche Gewinn $= 2000$ thlr.

4) Jemand hat einen Vorrath Getreide, wovon der Scheffel $1\frac{1}{3}$ thlr. kostet; er verkauft davon einen Theil für den Einkaufspreis, das übrige den Scheffel für $1\frac{5}{6}$ thlr., gewinnt 1200 thlr., hätte aber 1800 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie groß war der Vorrath und wie viel hat er für den Einkaufspreis verkauft?

In diesem Exempel ist $d = b$, also nach §. 255. Nr. 2. $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = \frac{g-f}{e-b}$.

Es ist aber $b = 1\frac{1}{3}$ thlr. pro Scheffel, also 32 thlr. pro Wispel, $e = 1\frac{5}{6}$ thlr. pro Scheffel; also 44 thlr. pro Wispel, $g = 1800$ thlr., $f = 1200$ thlr., also

$x = \frac{1800}{44-32} = \frac{1800}{12} = 150$ Wspl.

$y = \frac{1800-1200}{44-32} = \frac{600}{12} = 50$ Wspl.

Die Ausgabe war alſo = 150 . 32 = 4800 thlr., die erſte Einnahme = 50 . 32 = 1600 thlr., die zweite Einnahme = 150 . 44 = 6600 thlr., alſo ganze Einnahme = 8200 thlr., folglich der mögliche Gewinn = 3400 thlr. Die mögliche Einnahme iſt = 150 . 44 = 6600, alſo möglicher Gewinn = 1800 thlr.

5 Es hat jemand einen Vorrath von Zucker, welcher ihm das Pfund 6 gr. koſtet: er verkauft ihn nach 20 Tagen, hat dadurch 20 pr. Cent gewonnen, hätte er noch 10 Tage das Pfund für 12 gr. und hat nun noch 800 thlr. gewonnen; aber er hätte 1200 thlr. gewinnen müſſen, wenn er allen Zucker um dieſen Preis hätte verkaufen können. Wie groß war ſein Vorrath?

In dieſem Exempel iſt nur Eine unbekannte Größe, denn das y in §. 255. Nr. 3. iſt = 0. Die Auflöſung ergibt ſich alſo aus §. 252. Anmerkung 2. Der mögliche Gewinn iſt daher unrichtig angegeben, weil der Vorrath x ſchon durch die andern Größen beſtimmt wird. Er iſt auch in gegenwärtigem Exempel falſch angegeben, denn es iſt deutlich nicht möglich, ſondern gleich $xe - xb = x\,e - b$, und da $x = 10300$ Pfd. kommt, ſo iſt derſelbe = 10300 . $\frac{1}{2}$ thlr. = $1716\frac{2}{3}$ thlr., aber nicht 1800 thlr.

Würde man nun noch irgend eine andere Größe unbekannt ſetzen, ſo wäre der Fall entweder ſchon da geweſen, wenn es der Einkaufspreis wäre, oder er würde unter einen der folgenden Fälle gehören.

6 Von einer Partie Tuch, wovon die Elle 3 thlr. beim Einkaufe koſtet, werden 40 Ellen für den Einkaufspreis, das übrige die Elle für 4 thlr. verkauft und 600 thlr. gewonnen; es wären aber 800 thlr. gewonnen worden, wenn man alles für den Preis des Anfangs verkauft hätte. Wie viel Tuch war es?

Hier iſt wieder das y in §. 255. Nr. 3. bekannt, es iſt nämlich = b. Alſo iſt wieder nur eine unbekannte Größe da, der mögliche Gewinn iſt unrichtig und auch falſch angegeben; er beſtimmt ſich wie im vorigen Falle durch $g = x\,(e - b)$; das Exempel aber gehört zu §. 255. Nr. 3.

Wollte man irgend eine andere Größe unbekannt anſehen, ſo wäre entweder der Fall (wenn es der Einkaufspreis wäre) ſchon da geweſen, oder er würde in der Folge noch vorkommen.

7 Von einem Vorrathe an Getreide koſtet der Wiſpel 28 thlr.; 50 Wiſpel verderben, das Übrige wird ſo verkauft, daß 1000 thlr. gewonnen werden; es wären aber 3400 thlr. gewonnen worden, wenn alles für den letztern Preis hätte ver-

kauft werden können. Wie viel Getreide war es, wie theuer wurde der Wispel verkauft?

Der Fall gehört zu §. 255. Nr. 4. Es ist aber d = o, also $y = \beta + \frac{g-f}{c} = o + \frac{g-f}{c} = \frac{g-f}{c}$ und $x = \frac{cg}{g-f+c(d-b)} = \frac{cg}{g-f+c(o-b)} = \frac{cg}{g-f-cb}$.

Im Exempel ist also $y = \frac{3400-1000}{50} = \frac{2400}{50} = 48$ thlr. und $x = \frac{50 \cdot 3400}{3400-1000-50 \cdot 28} = \frac{170000}{2400-1400} = \frac{170000}{1000} = 170$ Wspl.

Es war die Ausgabe = 170 . 28 = 4760 thlr., die Einnahme für die übrigen 120 Wspl. = 120 . 48 = 5760 thlr., also 1000 thlr. gewonnen; die mögliche Einnahme aber = 170 . 48 = 8160, also der mögliche Gewinn = 3400 thlr.

8) Von einem Vorrathe Taback kostet der Zentner 6 thlr., 100 Ztn. werden für den Einkaufspreis verkauft, das Übrige so, daß 400 thlr. gewonnen werden. Wenn nun alles, um diesen Preis verkauft, einen Gewinn von 900 thlrn. gegeben hätte, wie groß war der Vorrath und der Preis des Restes?

Es ist jetzt d = b, also in §. 255. Nr. 4. $y = b + \frac{g-f}{c}$ und $x = \frac{cg}{g-f+c(d-b)} = \frac{cg}{g-f+c(b-b)} = \frac{cg}{g-f+c.o} = \frac{cg}{g-f}$.

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$y = 6 \text{ thlr.} + \frac{900-400}{100} = 6 \text{ thlr.} + \frac{500}{100} = 6 + 5 = 11 \text{ thlr.}$

$x = \frac{100 \cdot 900}{900-400} = \frac{90000}{500} = 180$ Ztn.

Die Ausgabe ist 180 . 6 = 1080 thlr., die Einnahme für den ersten Theil = 100 . 6 = 600 thlr., für den Rest = 80 . 11 = 880, also ganze Einnahme = 1480, folglich Gewinn = 400 thlr.; die mögliche Einnahme aber = 180 . 11 = 1980, also möglicher Gewinn = 900 thlr.

9) Von einer Partie Tuch, wovon die Elle 2 thlr. kostet, gehen 40 Ellen verloren; die übrigen werden die Elle zu 3 thlr. verkauft; wie viel wird gewonnen, wenn das Ganze, zu dem Preise des Restes verkauft, einen Gewinn von 800 thlrn. gegeben hätte, und wie viel Ellen waren es?

Nach §. 255. Nr. 5. ist $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = g - c(e-d)$, aber da d = o ist, so ist y = g — ce.

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$x = \frac{800}{3-2 \text{ thlr.}} = \frac{800}{1} = 800$ Ellen.

y = 800 — 40 . 3 thlr. = 800 — 120 = 680 thlr.

10) Von einem Vorrathe Muskatennüsse, wovon das Loth 3 gr. kostet, werden 8 Pfd. für den Einkaufspreis, das Übrige das Loth à 4 gr. verkauft; wie viel wird gewonnen, wenn das Ganze, à 4 gr. verkauft, einen Gewinn von 60 thlrn. gegeben hätte, und wie groß war der Vorrath?

Hier ist $b = d$, also $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = g - c(e-b)$.

Also in den Zahlen des Exempels

$$x = \frac{60 \text{ thlr.} \cdot 24 \text{ gr.}}{1 \text{ gr.} \cdot 32} = \frac{1440}{32} = 45 \text{ Pfd.}$$

$$y = 60 \cdot 24 - 8 \cdot 32 \cdot 1 = 1440 - 256 = 1184 \text{ gr.}$$
$$= 49 \text{ thlr. } 8 \text{ gr.}$$

11) Es hat jemand Zucker, wovon das Pfund ihm 4 gr. kostet. Es gehen davon 8 Ztn. verloren, vom Übrigen verkauft er das Pfund für 10 gr. und gewinnt dabei 800 thlr.; wie viel hätte er gewonnen, wenn er alles zu diesem Preise hätte verkaufen können und wie groß war sein Vorrath?

In §. 255. Nr. 6. war $y = f + c(e-d)$ und $x = \frac{f + c(e-d)}{e-b}$. In unserm Exempel ist $d = 0$, also

$$y = f + ce \text{ und } x = \frac{f + ce}{e-b}.$$

In den Zahlen des Exempels ist also

$$y = 800 + 8 \cdot 110 \cdot \tfrac{5}{12} \text{thlr.} = 800 + \tfrac{880 \cdot 5}{12} = 800 + \tfrac{4400}{12}$$
$$= 800 + 366\tfrac{2}{3} = 1166\tfrac{2}{3} \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{800 + 8 \cdot 110 \cdot \frac{5}{12} \text{ thlr.}}{\frac{5}{12} \text{thlr.} - \frac{1}{6} \text{thlr.}} = \frac{800 + \frac{4400}{12}}{\frac{3}{12}} = \frac{(9600 + 4400) \cdot 12}{3 \cdot 12}$$

$$= \frac{14000}{3} = 4666\tfrac{2}{3} \text{ Pfd.} = 42 \text{ Ztn. } 46\tfrac{2}{3} \text{ Pfd.}$$

12) Es kauft jemand Getreide, den Scheffel zu $1\frac{3}{4}$ thlr., verkauft 30 Wspl. für den Einkaufspreis, das Übrige den Scheffel für $2\frac{1}{3}$ thlr., gewinnt 2000 thlr.; wie viel hätte er gewonnen, wenn alles für den letztern Preis wäre verkauft worden, und wie viel betrug das ganze Getreide?

Es ist jetzt $d = b$, also $y = f + c(e-b)$ und $x = \frac{f + c(e-b)}{e-b} = c + \frac{f}{e-b}$.

In Zahlen des Exempels

$$y = 2000 + 30(56-42) = 2000 + 30 \cdot 14 = 2420 \text{ thlr.}$$
$$x = 30 + \tfrac{2000}{56-42} = 30 + \tfrac{2000}{14} = 30 + 142\tfrac{12}{14} = 172\tfrac{5}{7} \text{ W.}$$

§. 257.

In allen diesen Exempeln kann man statt Gewinn auch Verlust setzen. Die Formeln bleiben dieselben, außer daß f und g negativ werden, und also in Rücksicht der Zeichen Veränderungen vorgehen. Beispiele anzuführen scheint unnöthig. Dagegen wollen wir noch die Fälle betrachten, wo irgend ein Glied der Aufgabe oder auch mehrere durch ihr Verhältniß zur unbekannten Größe ausgedrückt sind. Folgende Tabelle gibt die Übersicht der einzelnen Fälle, für den Hauptfall, wo die ganze Waare unbekannt ist, und von den übrigen bekannten Größen eine oder mehrere im Verhältnisse zu der unbekannten Größe der ganzen Waare betrachtet werden.

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
1	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	f	g
2	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	e	f	g
3	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	y	f	g
4	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	e	y	g
5	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	e	f	y
6	x	y	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	e	f	g
7	x	b	$\frac{x}{p}$	y	x — $\frac{x}{p}$	e	f	g
8	x	b	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	y	f	g
9	x	b	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	e	y	g
10	x	b	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	e	f	y
11	x	y	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	f	g
12	x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	f	g
13	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	f	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
14	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	g
15	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	f	y
16	x	y	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	g
17	x	b	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	f	g
18	x	b	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	f	g
19	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	y	g
20	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	y
21	x	y	c	d	x — c	e	sx	g
22	x	b	y	d	x — y	e	sx	g
23	x	b	c	y	x — c	e	sx	g
24	x	b	c	d	x — c	y	sx	g
25	x	b	c	d	x — c	e	sx	y
26	x	y	c	d	x — c	e	f	tx
27	x	b	y	d	x — y	e	f	tx
28	x	b	c	y	x — c	e	f	tx
29	x	b	c	d	x — c	y	f	tx
30	x	b	c	d	x — c	e	y	tx
31	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	x — $\frac{x}{p}$	e	f	g
32	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	y	f	g
33	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	e	y	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
34	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	e	f	y
35	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	f	g
36	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	f	g
37	x	$\frac{x}{m}$	e	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	g
38	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	f	y
39	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	f	g
40	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	f	g
41	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	y	g
42	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	y
43	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	sx	g
44	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	e	sx	g
45	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	y	sx	g
46	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	e	sx	y
47	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	f	tx
48	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	e	f	tx
49	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	y	f	tx
50	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	e	y	tx
51	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	f	g
52	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	y	f	g
53	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	y	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
54	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	f	y
55	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
56	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
57	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g
58	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	y
59	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	g
60	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	g
61	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	g
62	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	y
63	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx
64	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx
65	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	f	tx
66	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	y	tx
67	x	y	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	$\frac{x}{r}$	f	g
68	x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x - y$	$\frac{x}{r}$	f	g
69	x	b	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	$\frac{x}{r}$	y	g
70	x	b	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	$\frac{x}{r}$	f	y
71	x	y	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	e	sx	g
72	x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x - y$	e	sx	g
73	x	b	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	y	sx	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
74	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	sx	y
75	x	y	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	f	tx
76	x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	f	tx
77	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	f	tx
78	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	tx
79	x	y	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	g
80	x	b	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	g
81	x	b	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	g
82	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	y
83	x	y	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	tx
84	x	b	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	f	tx
85	x	b	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	f	tx
86	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	y	tx
87	x	y	c	d	x — c	e	sx	tx
88	x	b	y	d	x — y	e	sx	tx
89	x	b	c	y	x — c	e	sx	tx
90	x	b	c	d	x — c	y	sx	tx
91	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	f	g
92	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	y	g
93	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	f	y

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Nöthl. Gew.
94	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
95	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g
96	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	y
97	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	g
98	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	g
99	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	y
100	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx
101	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	f	tx
102	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	y	tx
103	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	f	g
104	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	y	g
105	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	f	y
106	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	sx	g
107	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	sx	g
108	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	sx	y
109	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	f	tx
110	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	f	tx
111	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	tx
112	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	g
113	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
114	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x - c$	$\frac{x}{r}$	sx	y
115	x	$\frac{x}{m}$	y	d	$x - y$	$\frac{x}{r}$	f	tx
116	x	$\frac{x}{m}$	c	y	$x - c$	$\frac{x}{r}$	f	tx
117	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x - c$	$\frac{x}{r}$	y	tx
118	x	$\frac{x}{m}$	y	d	$x - y$	e	sx	tx
119	x	$\frac{x}{m}$	c	y	$x - c$	e	sx	tx
120	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x - c$	y	sx	tx
121	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
122	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g
123	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	y
124	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	g
125	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	g
126	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	y
127	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx
128	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	f	tx
129	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	y	tx
130	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g
131	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g
132	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	y
133	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	tx

In diesem Exempel ist $d = y$, also erhält man die Gleichungen:

Erste Gleichung. $xy + g = xe$.

Zweite Gleichung. $xy + f = cy + xe - ce$.

Die zweite von der ersten abgezogen, kommt $g - f = ce - cy$, also $cy = ce - g + f$, oder $cy = ce - (g - f)$, folglich $y = e - \frac{g-f}{c}$. Da aus der ersten Gleichung $\frac{g}{e-y} = x$ folgt, so setze man statt y den gefundenen Werth, so kommt $x = \frac{g}{e - e + \frac{g-f}{c}} = \frac{g}{\frac{g-f}{c}} = \frac{cg}{g-f}$. Man findet also y, wenn man den Unterschied der Gewinne durch den ersten Theil der Waare dividirt und den Quotienten vom Verkaufspreise des Restes abzieht, und man findet x, wenn man den Gewinn mit dem ersten Theile der Waare multiplizirt und dies Produkt durch den Unterschied der Gewinne dividirt.

Im Exempel ist $c = 24$ Ztn., $e = 8$ gr. pro Pfund, also $36\frac{2}{3}$ thlr. pro Zentner, $f = 200$ thlr., $g = 360$ thlr., folglich $x = \frac{24 \cdot 3600}{3600 - 2000} = \frac{24 \cdot 360}{160} = \frac{24 \cdot 36}{16} = 3 \cdot 18 = 54$ Ztn. und $y = 36\frac{2}{3}$ thlr. $- \frac{360-200}{24} = 36\frac{2}{3}$ thlr. $- \frac{160}{24} = 36\frac{2}{3}$ thlr. $- 6\frac{2}{3}$ thlr. $= 30$ thlr.

Die Ausgabe ist $= 54 \cdot 30$ thlr. $= 1620$ thlr., die Einnahme für den ersten Theil $= 24 \cdot 30 = 720$ thlr., die Einnahme für den Rest $= 30 \cdot 36\frac{2}{3} = 30 \cdot \frac{110}{3} = 10 \cdot 110 = 1100$ thlr., also die ganze Einnahme $= 1820$ thlr., folglich der wirkliche Gewinn $= 200$ thlr. Die mögliche Einnahme $= 54 \cdot 36\frac{2}{3}$ thlr. $= 54 \cdot \frac{110}{3} = 18 \cdot 110 = 1980$ thlr., also der mögliche Gewinn $= 360$ thlr.

Soll $y = e - \frac{g-f}{c}$ einen wirklich positiven Werth bekommen, so muß der Quotient $\frac{g-f}{c}$ kleiner als e sein, sonst kommt y negativ und die Aufgabe ist im wirklichen Leben nicht möglich, obgleich übrigens alles richtig kommt. Es sei z. B. $g = 3600$, $f = 2000$, so wird $y = 36\frac{2}{3} - \frac{1600}{24} = 36\frac{2}{3} - 66\frac{2}{3} = -30$ thlr., d. h. beim Einkaufe hätte nicht der Käufer 30 thlr. bezahlt, sondern er hätte vom Verkäufer 30 thlr. pro Zentner bekommen.

Die sogenannte Ausgabe wäre dann $54 \cdot -30$ thlr. $= -1620$ thlr., d. h. sie wäre 1620 thlr. Einnahme; die Einnahme für den ersten Theil wäre $24 \cdot -30$ thlr. $= -720$ thlr., d. h. man hätte beim Verkaufe nicht 30 thlr. pro Zentner be-

kommen, sondern dem Käufer so viel gegeben. Die Einnahme für den Rest wäre $30 \cdot 36\frac{2}{3} = 1100$ thlr. Der wirkliche Gewinn also $-1620-(-720+1100) = -1620-1100+720 = -2720+720 = -2000$, oder, da die 1620 thlr. sowol als die 1100 thlr. eigentlich Einnahme, die 720 thlr. aber eigentlich Ausgabe sind, $= 1620+1100-720$ thlr. $= 2000$ thlr. Die mögliche Einnahme wäre $54 \cdot 36\frac{2}{3} = 1980$ thlr., also $1620+1980 = 3600$ thlr. der mögliche Gewinn.

3) Jemanden verdirbt ein Theil von seinem Weinvorrathe, wovon ihm der Anker 24 thlr. kostet, den übrigen verkauft er den Anker für 30 thlr., gewinnt noch 800 thlr.; wenn er aber allen Wein so theuer hätte verkaufen können, so hätte er 2000 thlr. gewonnen. Wie viel Wein war es, wie viel war ihm verdorben?

In §. 255. Nr. 2. fand man $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = \frac{g-f}{e-d}$. Da nun aber ein Theil des Weines verdarb, so ist $d = 0$, also $y = \frac{g-f}{e}$.

Im Exempel ist $b = 24$ thlr., $e = 30$ thlr., $g = 2000$ thlr., $f = 800$ thlr., also $x = \frac{2000}{30-24} = \frac{2000}{6} = 333\frac{1}{3}$ Anker und $y = \frac{2000-800}{30} = \frac{1200}{30} = 40$ Anker.

Seine Ausgabe war also $333\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{1000}{3} \cdot 24 = 8000$ thlr.; die Einnahme für den Rest $= 293\frac{1}{3} \cdot 30 = \frac{880}{3} \cdot 30 = 8800$ thlr.; also 800 thlr. Gewinn. Die mögliche Einnahme aber wäre $333\frac{1}{3} \cdot 30$ thlr. $= 10000$ thlr. gewesen, also der mögliche Gewinn $= 2000$ thlr.

4) Jemand hat einen Vorrath Getreide, wovon der Scheffel $1\frac{1}{2}$ thlr. kostet; er verkauft davon einen Theil für den Einkaufspreis, das übrige den Scheffel für $1\frac{5}{6}$ thlr., gewinnt 1200 thlr., hätte aber 1800 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie groß war der Vorrath und wie viel hat er für den Einkaufspreis verkauft?

In diesem Exempel ist $d = b$, also nach §. 255. Nr. 2. $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = \frac{g-f}{e-b}$.

Es ist aber $b = 1\frac{1}{2}$ thlr. pro Scheffel, also 32 thlr. pro Wispel, $e = 1\frac{5}{6}$ thlr. pro Scheffel, also 44 thlr. pro Wispel, $g = 1800$ thlr., $f = 1200$ thlr., also

$x = \frac{1800}{44-32} = \frac{1800}{12} = 150$ Wspl.

$y = \frac{1800-1200}{44-32} = \frac{600}{12} = 50$ Wspl.

Die Ausgabe war also = 150 . 32 = 4800 thlr., die erste Einnahme = 50 . 32 = 1600 thlr., die zweite Einnahme = 100 . 44 = 4400 thlr., also ganze Einnahme = 6000 thlr., folglich der wirkliche Gewinn = 1200 thlr. Die mögliche Einnahme ist = 150 . 44 = 6600, also möglicher Gewinn = 1800 thlr.

5) Es hat jemand einen Vorrath von Zucker, wovon ihm das Pfund 6 gr. kostet; es werden ihm aber 20 Ztn. gestohlen, doch verkauft er vom übrigen das Pfund für 10 gr. und hat nun noch 800 thlr. gewonnen; aber er hätte 1800 thlr. gewinnen müssen, wenn er allen Zucker um diesen Preis hätte verkaufen können. Wie groß war sein Vorrath?

In diesem Exempel ist nur Eine unbekannte Größe, denn das y in §. 255. Nr. 3. ist = 0. Die Auflösung ergibt sich also aus §. 252. funfzehnte Aufgabe, a). Der mögliche Gewinn ist daher unnöthig angegeben, weil der Vorrath x schon durch die andern Größen bestimmt wird. Er ist auch im gegenwärtigen Exempel falsch angegeben, denn es ist derselbe nicht willkührlich, sondern gleich xe — xb = x (e — b) und da x = 10300 Pfd. kommt, so ist derselbe = 10300 . $\frac{1}{6}$ thlr. = 1716$\frac{2}{3}$ thlr., aber nicht 1800 thlr.

Wollte man nun noch irgend eine andere Größe unbekannt setzen, so wäre der Fall entweder schon da gewesen (wenn es der Einkaufspreis wäre) oder er würde unter einen der folgenden Fälle gehören.

6 Von einer Partie Tuch, wovon die Elle 3 thlr. beim Einkaufe kostet, werden 40 Ellen für den Einkaufspreis, das Übrige die Elle für 4 thlr. verkauft und 600 thlr. gewonnen; es wären aber 800 thlr. gewonnen worden, wenn man alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Tuch war es?

Hier ist wieder das y in §. 255. Nr. 3. bekannt, es ist nämlich = b. Also ist wieder nur eine unbekannte Größe da, der mögliche Gewinn ist unnöthig und auch falsch angegeben; er bestimmt sich wie im vorigen Falle durch g = x (e — b); das Exempel aber gehört zu §. 255. Nr. 3.

Wollte man irgend eine andere Größe unbekannt ansetzen, so wäre entweder der Fall (wenn es der Einkaufspreis wäre) schon da gewesen, oder er würde in der Folge noch vorkommen.

7) Von einem Vorrathe an Getreide kostet der Wispel 28 thlr.; 50 Wspl. verderben, das Übrige wird so verkauft, daß 1000 thlr. gewonnen werden; es wären aber 3400 thlr. gewonnen worden, wenn alles für den letztern Preis hätte ver-

kauft werden können. Wie viel Getreide war es, wie theuer wurde der Wispel verkauft?

Der Fall gehört zu §. 255. Nr. 4. Es ist aber $d = o$, also $y = d + \frac{g-f}{c} = o + \frac{g-f}{c} = \frac{g-f}{c}$ und $x = \frac{cg}{g-f+c(d-b)} = \frac{cg}{g-f+c(o-b)} = \frac{cg}{g-f-cb}$.

Im Exempel ist also $y = \frac{3400-1000}{50} = \frac{2400}{50} = 48$ thlr. und $x = \frac{50 \cdot 3400}{3400-1000-50 \cdot 28} = \frac{170000}{2400-1400} = \frac{170000}{1000} = 170$ Wspl.

Es war die Ausgabe $= 170 \cdot 28 = 4760$ thlr., die Einnahme für die übrigen 120 Wspl. $= 120 \cdot 48 = 5760$ thlr., also 1000 thlr. gewonnen; die mögliche Einnahme aber $= 170 \cdot 48 = 8160$, also der mögliche Gewinn $= 3400$ thlr.

8) Von einem Vorrathe Taback kostet der Zentner 6 thlr., 100 Ztn. werden für den Einkaufspreis verkauft, das Übrige so, daß 400 thlr. gewonnen werden. Wenn nun alles, um diesen Preis verkauft, einen Gewinn von 900 thlrn. gegeben hätte, wie groß war der Vorrath und der Preis des Restes?

Es ist jetzt $d = b$, also in §. 255. Nr. 4. $y = b + \frac{g-f}{c}$ und $x = \frac{cg}{g-f+c(d-b)} = \frac{cg}{g-f+c(b-b)} = \frac{cg}{g-f+c \cdot o} = \frac{cg}{g-f}$.

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$y = 6\text{thlr.} + \frac{900-400}{100} = 6\text{ thlr.} + \frac{500}{100} = 6+5 = 11\text{thlr.}$

$x = \frac{100 \cdot 900}{900-400} = \frac{90000}{500} = 180$ Ztn.

Die Ausgabe ist $180 \cdot 6 = 1080$ thlr., die Einnahme für den ersten Theil $= 100 \cdot 6 = 600$ thlr., für den Rest $= 80 \cdot 11 = 880$, also ganze Einnahme $= 1480$, folglich Gewinn $= 400$ thlr.; die mögliche Einnahme aber $= 180 \cdot 11 = 1980$, also möglicher Gewinn $= 900$ thlr.

9) Von einer Partie Tuch, wovon die Elle 2 thlr. kostet, gehen 40 Ellen verloren; die übrigen werden die Elle zu 3 thlr. verkauft; wie viel wird gewonnen, wenn das Ganze, zu dem Preise des Restes verkauft, einen Gewinn von 800 thlrn. gegeben hätte, und wie viel Ellen waren es?

Nach §. 255. Nr. 5. ist $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = g - c(e-d)$, aber da $d = o$ ist, so ist $y = g - ce$.

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$x = \frac{800}{3-2\text{thlr.}} = \frac{800}{1} = 800$ Ellen.

$y = 800 - 40 \cdot 3\text{ thlr.} = 800 - 120 = 680$ thlr.

10) Von einem Vorrathe Muskatennüsse, wovon das Loth 3 gr. kostet, werden 8 Pfd. für den Einkaufspreis, das Übrige das Loth à 4 gr. verkauft; wie viel wird gewonnen, wenn das Ganze, à 4 gr. verkauft, einen Gewinn von 60 thlrn. gegeben hätte, und wie groß war der Vorrath?

Hier ist $b = d$, also $x = \frac{g}{e-b}$ und $y = g - c(e-b)$.

Also in den Zahlen des Exempels

$$x = \frac{60 \text{ thlr.} \cdot 24 \text{ gr.}}{1 \text{ gr.} \cdot 32} = \frac{1440}{32} = 45 \text{ Pfd.}$$

$$y = 60 \cdot 24 - 8 \cdot 32 \cdot 1 = 1440 - 256 = 1184 \text{ gr.}$$
$$= 49 \text{ thlr. } 8 \text{ gr.}$$

11) Es hat jemand Zucker, wovon das Pfund ihm 4 gr. kostet. Es gehen davon 8 Ztn. verloren, vom Übrigen verkauft er das Pfund für 10 gr. und gewinnt dabei 800 thlr.; wie viel hätte er gewonnen, wenn er alles zu diesem Preise hätte verkaufen können und wie groß war sein Vorrath?

In §. 255. Nr. 6. war $y = f + c(e-d)$ und $x = \frac{f + c(e-d)}{e-b}$. In unserm Exempel ist $d = 0$, also

$$y = f + ce \text{ und } x = \frac{f + ce}{e-b}.$$

In den Zahlen des Exempels ist also

$$y = 800 + 8 \cdot 110 \cdot \tfrac{5}{12} \text{thlr.} = 800 + \tfrac{880 \cdot 5}{12} = 800 + \tfrac{4400}{12}$$
$$= 800 + 366\tfrac{2}{3} = 1166\tfrac{2}{3} \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{800 + 8 \cdot 110 \cdot \frac{5}{12} \text{ thlr.}}{\frac{5}{12} \text{thlr.} - \frac{1}{6} \text{thlr.}} = \frac{800 + \frac{4400}{12}}{\frac{3}{12}} = \frac{(9600 + 4400) 12}{3 \cdot 12}$$

$$= \frac{14000}{3} = 4666\tfrac{2}{3} \text{ Pfd.} = 42 \text{ Ztn. } 46\tfrac{2}{3} \text{ Pfd.}$$

12) Es kauft jemand Getreide, den Scheffel zu $1\frac{1}{4}$ thlr., verkauft 30 Wspl. für den Einkaufspreis, das Übrige den Scheffel für $2\frac{1}{3}$ thlr., gewinnt 2000 thlr.; wie viel hätte er gewonnen, wenn alles für den letztern Preis wäre verkauft worden, und wie viel betrug das ganze Getreide?

Es ist jetzt $d = b$, also $y = f + c(e-b)$ und

$$x = \frac{f + c(e-b)}{e-b} = c + \frac{f}{e-b}.$$

In Zahlen des Exempels

$$y = 2000 + 30(56-42) = 2000 + 30 \cdot 14 = 2420 \text{ thlr.}$$

$$x = 30 + \tfrac{2000}{56-42} = 30 + \tfrac{2000}{14} = 30 + 142\tfrac{12}{14} = 172\tfrac{6}{7} \text{ W.}$$

§. 257.

In allen diesen Exempeln kann man statt Gewinn auch Verlust setzen. Die Formeln bleiben dieselben, außer daß f und g negativ werden, und also in Rücksicht der Zeichen Veränderungen vorgehen. Beispiele anzuführen scheint unnöthig. Dagegen wollen wir noch die Fälle betrachten, wo irgend ein Glied der Aufgabe oder auch mehrere durch ihr Verhältniß zur unbekannten Größe ausgedrückt sind. Folgende Tabelle gibt die Übersicht der einzelnen Fälle, für den Hauptfall, wo die ganze Waare unbekannt ist, und von den übrigen bekannten Größen eine oder mehrere im Verhältnisse zu der unbekannten Größe der ganzen Waare betrachtet werden.

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
1	x	$\frac{x}{m}$	y	d	$x-y$	e	f	g
2	x	$\frac{x}{m}$	c	y	$x-c$	e	f	g
3	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x-c$	y	f	g
4	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x-c$	e	y	g
5	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x-c$	e	f	y
6	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	e	f	g
7	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	e	f	g
8	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	y	f	g
9	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	e	y	g
10	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	e	f	y
11	x	y	c	$\frac{x}{q}$	$x-c$	e	f	g
12	x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	e	f	g.
13	x	b	c	$\frac{x}{q}$	$x-c$	y	f	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
14	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	g
15	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	f	y
16	x	y	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	g
17	x	b	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	f	g
18	x	b	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	f	g
19	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	y	g
20	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	y
21	x	y	c	d	x — c	e	sx	g
22	x	b	y	d	x — y	e	sx	g
23	x	b	c	y	x — c	e	sx	g
24	x	b	c	d	x — c	y	sx	g
25	x	b	c	d	x — c	e	sx	y
26	x	y	c	d	x — c	e	f	tx
27	x	b	y	d	x — y	e	f	tx
28	x	b	c	y	x — c	e	f	tx
29	x	b	c	d	x — c	y	f	tx
30	x	b	c	d	x — c	e	y	tx
31	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	x — $\frac{x}{p}$	e	f	g
32	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	y	f	g
33	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	x — $\frac{x}{p}$	e	y	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
34	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	e	f	y
35	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	f	g
36	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	f	g
37	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	g
38	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	f	y
39	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	f	g
40	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	f	g
41	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	y	g
42	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	y
43	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	sx	g
44	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	e	sx	g
45	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	y	sx	g
46	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	e	sx	y
47	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	f	tx
48	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	e	f	tx
49	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	y	f	tx
50	x	$\frac{x}{m}$	c	d	x — c	e	y	tx
51	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	f	g
52	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	y	f	g
53	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	y	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
54	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	f	y
55	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
56	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
57	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g
58	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	y
59	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	g
60	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	g
61	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	g
62	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	y
63	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx
64	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx
65	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	f	tx
66	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	y	tx
67	x	y	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	$\frac{x}{r}$	f	g
68	x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x - y$	$\frac{x}{r}$	f	g
69	x	b	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	$\frac{x}{r}$	y	g
70	x	b	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	$\frac{x}{r}$	f	y
71	x	y	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	e	sx	g
72	x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x - y$	e	sx	g
73	x	b	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	y	sx	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
74	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	sx	y
75	x	y	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	f	tx
76	x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	f	tx
77	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	f	tx
78	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	tx
79	x	y	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	g
80	x	b	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	g
81	x	b	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	g
82	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	y
83	x	y	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	f	tx
84	x	b	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	f	tx
85	x	b	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	f	tx
86	x	b	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	y	tx
87	x	y	c	d	x — c	e	sx	tx
88	x	b	y	d	x — y	e	sx	tx
89	x	b	c	y	x — c	e	sx	tx
90	x	b	c	d	x — c	y	sx	tx
91	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	f	g
92	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	y	g
93	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	f	y

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
94	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
95	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g
96	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	y
97	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	g
98	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	g
99	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	y
100	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx
101	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	f	tx
102	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	y	tx
103	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	f	g
104	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	y	g
105	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	f	y
106	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	sx	g
107	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	sx	g
108	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	sx	y
109	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	f	tx
110	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	f	tx
111	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	tx
112	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	g
113	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
114	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x-c$	$\frac{x}{r}$	sx	y
115	x	$\frac{x}{m}$	y	d	$x-y$	$\frac{x}{r}$	f	tx
116	x	$\frac{x}{m}$	c	y	$x-c$	$\frac{x}{r}$	f	tx
117	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x-c$	$\frac{x}{r}$	y	tx
118	x	$\frac{x}{m}$	y	d	$x-y$	e	sx	tx
119	x	$\frac{x}{m}$	c	y	$x-c$	e	sx	tx
120	x	$\frac{x}{m}$	c	d	$x-c$	y	sx	tx
121	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	g
122	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g
123	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	y
124	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	sx	g
125	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	y	sx	g
126	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	sx	y
127	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	f	tx
128	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	y	f	tx
129	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	y	tx
130	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g
131	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g
132	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	y
133	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	tx

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Vergl. Sum.
134	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	tx
135	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	tx
136	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	tx
137	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	tx
138	x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	tx
139	x	y	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	g
140	x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	g
141	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	y
142	x	y	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	f	tx
143	x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	f	tx
144	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	y	tx
145	x	y	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	sx	tx
146	x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	sx	tx
147	x	b	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	sx	tx
148	x	y	c	d	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	tx
149	x	b	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	tx
150	x	b	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	tx
151	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g
152	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	y
153	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	g

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
154	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	sx	y
155	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	y	f	tx
156	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	y	tx
157	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g
158	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	y
159	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	tx
160	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	tx
161	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	e	sx	tx
162	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	y	sx	tx
163	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	g
164	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	y
165	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	g	tx
166	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	y	tx
167	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	e	sx	tx
168	x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	y	sx	tx
169	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	tx
170	x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	tx
171	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g
172	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	y
173	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	tx

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gew.
174	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	tx
175	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	sx	tx
176	x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	tx
177	x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	tx
178	x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	tx
179	x	y	e	$\frac{x}{q}$	x — c	$\frac{x}{r}$	sx	tx
180	x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	tx
181	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g
182	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	tx
183	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	sx	tx
184	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	tx
185	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	tx
186	x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	tx
187	x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	tx

§. 258.
Anmerkung.

In dem letzten Falle ist die zweite unbekannte Größe y weggefallen, weil sie auch durch ihr Verhältniß zu x bestimmt worden ist. Da aber nun nur Eine unbekannte Größe da ist, so bedarf es auch nun Einer Gleichung, um sie zu bestimmen, die Aufgabe wird also Bedingungen enthalten, die zu dieser Bestimmung unnöthig sind. Wählt man die Gleichung: die Ausgabe und der mögliche Gewinn, sind gleich der möglichen Einnahme, also

$$x \cdot \frac{x}{m} + tx = x \cdot \frac{x}{r},$$

so hat man

$$\frac{x^2}{m} + tx = \frac{x^2}{r},$$

und durchgängig mit x dividirt, kommt

$$\frac{x}{m} + t = \frac{x}{r},$$

$$\text{also} \quad rx + mrt = mx,$$

$$\text{folglich} \quad mrt = mx - rx,$$

$$\text{also} \quad \frac{mrt}{m-r} = x.$$

Hier wird x bloß durch m, r, t bestimmt und die Größen q, p, s tragen nichts dazu bei. Sollen sie nun in der Aufgabe dem gefundenen Werthe für x nicht widersprechen, so muß man sie durch m, r, t zu bestimmen suchen.

Wählt man die Gleichung: die Ausgabe nebst dem wirklichen Gewinne ist gleich der Einnahme für den ersten Theil und den Rest, also

$$\frac{x^2}{m} + sx = \frac{x^2}{pq} + \frac{x^2}{r} - \frac{x^2}{pr},$$

so kann man erstlich wieder durch x dividiren,

$$\frac{x}{m} + s = \frac{x}{pq} + \frac{x}{r} - \frac{x}{pr}$$

und nun auf einerlei Nenner bringen

$$pqrx + mpqrs = mrx + mpqx - mqx,$$

$$\text{also} \quad mpqrs = mrx + mpqx - pqrx - mqx,$$

$$\text{oder} \quad mpqrs = x(mr - mq + mpq - pqr),$$

$$\text{oder} \quad mpqrs = x[m(r-q) + pq(m-r)],$$

$$\text{also} \quad \frac{mpqrs}{m(r-q) + pq(m-r)} = x.$$

In dieser Bestimmung für x fehlt die Bedingung des möglichen Gewinnes. Man muß also diesen, wenn alle Be-

dingungen der Aufgabe passen sollen, durch die übrigen bekannten Größen zu bestimmen suchen. Setzt man beide Werthe für x gleich, so kommt

$$\frac{mrt}{m-r} = \frac{mpqrs}{m(r-q)+pq(m-r)},$$

$$\text{also} \quad mrt = \frac{mpqrs(m-r)}{m(r-q)+pq(m-r)}.$$

Dividirt man die Glieder links und rechts mit mr, so kommt

$$t = \frac{pqs(m-r)}{m(r-q)+pq(m-r)}.$$

Es werden also alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wenn t diesem Bruche gleich ist, die übrigen Größen können nach Belieben gegeben werden.

Beispiel.

Es kauft jemand eine Partie Zeug, bezahlt für die Elle 20 mal weniger Groschen, als es Ellen sind, verkauft dann den zehnten Theil für 16 mal weniger, den Rest aber für 12 mal weniger Groschen, als es Ellen sind, gewinnt dabei $6\frac{1}{4}$ mal, hätte aber $6\frac{2}{3}$ mal so viel Thaler gewonnen, als es Ellen sind, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es?

In diesem Exempel ist $m = 20$, $p = 10$, $q = 16$, $r = 12$, $s = 6\frac{1}{4}$, $t = 6\frac{2}{3}$. Daß t richtig gegeben ist, erhellet, weil es $= \frac{10 \cdot 160 \cdot 6\frac{1}{4}(20-12)}{20(12-16)+10 \cdot 16(20-12)}$ ist, denn dieser Bruch ist $= \frac{8000}{-80+1280} = \frac{8000}{1200} = \frac{80}{12} = 6\frac{2}{3}$.

Die gesuchten Ellen hat man sofort aus der Gleichung $x = \frac{mrt}{m-r} = \frac{20 \cdot 12 \cdot \frac{20}{3}}{20-12} = \frac{1600}{8} = 200$ Ellen.

Er hat also 200 Ellen gekauft, die Elle für 10 gr., davon 20 Ellen verkauft, die Elle zu $12\frac{1}{2}$ gr. und den Rest von 180 Ellen die Elle zu $16\frac{2}{3}$ gr. Seine Ausgabe war 2000 gr. = 83 thlr. 8 gr., die Einnahme für den ersten Theil = 250 gr. = 10 thlr. 10 gr., für den Rest = 3000 gr. = 125 thlr., zusammen 135 thlr. 10 gr., der Gewinn also 52 thlr. 2 gr. = sx und dies ist $6\frac{1}{4}$ mal so viel als die Anzahl der Ellen, denn $\frac{52 \text{ thlr. } 2 \text{ gr.}}{200} = \frac{1250 \text{ gr.}}{200} = \frac{125}{20} = 6\frac{5}{20} = 6\frac{1}{4}$. Die mögliche Einnahme wäre $3333\frac{1}{3}$ gr. = 138 thlr. $21\frac{1}{3}$ gr., also

der mögliche Gewinn = 55 thlr. $13\frac{1}{3}$ gr. und dieser ist $6\frac{2}{3}$ mal so viel als die gekauften Ellen, denn $\frac{55 \text{ thlr. } 13\frac{1}{3} \text{ gr.}}{200} = \frac{13333\frac{1}{3} \text{ gr.}}{200} = \frac{4000}{600} = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$.

§. 259.

Vorstehende Tabelle enthält nur die Fälle, wo die bekannten Größen durch Multiplikation oder Division aus der unbekannten Waare bestimmt werden. Aber es kann dies auch durch Subtraktion und Addition, selbst auch durch Wurzelausziehen und Potenzirung geschehen. Dies alles gäbe neue Kombinationen von gleichem Umfange.

Übrigens sieht man, daß die obige Tabelle nichts anders, als die Darstellung der verschiedenen Kombinationen ist, die unter 6 Größen Statt finden können, wenn man sie nach und nach zu einer, zweien, dreien, vieren, fünfen und sechsen verbindet, ohne daß Wiederholungen und Verbindungen einer Größe mit sich selbst Statt finden. Die Anzahl der möglichen Kombinationen wird also nach §. 185. gefunden. Es können nämlich unter 6 Größen $\frac{m}{1} = \frac{6}{1} = 6$ Verbindungen zu Einer Statt finden und da jede der 5 übrigen Größen = y sein kann, so gibt es 5.6 = 30 Fälle. Die Anzahl der Kombinationen zu zweien ist $= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$, und da jede der 4 übrigen Größen = y sein kann, so gibt es 4.15 = 60 Fälle. Kombinationen zu dreien gibt es $\frac{m(m-1)(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ und da jede der 3 übrigen Größen = y sein kann, so gibt es 3.20 = 60 Fälle. Kombinationen zu vieren gibt es $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$, und da jede der beiden übrigen Größen = y sein kann, so gibt es 2.15 = 30 Fälle. Kombinationen zu fünfen gibt es $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$, und da die sechste Größe allein nur y sein kann, so gibt es auch nur 6 Fälle. Endlich Kombinationen zu 6 gibt es nur Eine, y kommt also gar nicht mehr vor und folglich gehört diese Verbindung, wie wir auch schon angemerkt haben, nicht mehr hierher und gibt für die Aufgabe, wo 2 unbekannte Größen vorkommen, keinen Fall. Daher ist die mögliche Anzahl aller Fälle in der Tabelle

$= 30+60+60+30+6 = 186$ und mit dem letzten, nicht hergehörigen, Falle $= 187$.

§. 260.

Es können auch die bekannten Größen, die nicht schon durch x bestimmt sind, durch ihr Verhältniß zu y bestimmt werden, und zwar wiederum durch Multiplikation, Division, Addition, Subtraktion, Potenzirung, Wurzelausziehen. Dies würde wieder für jeden einzelnen Fall der vorigen Tabelle eine Menge untergeordneter Fälle geben, die sich nach den Regeln der Kombinationen finden lassen. Wir wollen nur kurz noch die Fälle betrachten, wo die Bestimmung durch y vermittelst der Multiplikation oder Division geschieht. In Nr. 1. der Tabelle sind noch 4 bekannte Größen durch y zu bestimmen. Es kann also erstlich jede einzelne durch y bestimmt werden und die andere nicht, dies gibt Kombinationen zu $1 = \frac{4}{1} = 4$. Es können zweitens 2 Größen durch y bestimmt werden, dies gibt Kombinationen zu zweien $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$. Drittens, es können 3 Größen durch y bestimmt werden, dies gibt Kombinationen zu dreien $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ und endlich es können alle 4 Größen durch y bestimmt werden, dies gibt $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$ Kombination. Also sind unter Nr. 1. noch 15 verschiedene Fälle enthalten. Eben so viel sind aber auch in jedem der folgenden Fälle bis 30, also in allen 30 zusammen $15 \cdot 30 = 450$ Fälle. In den folgenden 60 Fällen, wo in jedem nur 3 bekannte Größen vorhanden sind, gibt es Kombinationen zu $1 = \frac{3}{1} = 3$, zu zweien $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$, zu dreien $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$, also zusammen 7 Fälle, folglich in allen 60 sind $60 \cdot 7 = 420$ Fälle. In den folgenden 60 Fällen, wo nur 2 bekannte Größen noch vorhanden sind, gibt es 2 Kombinationen zu 1 und 1 zu zweien, also 3, folglich $3 \cdot 60 = 180$ in allen 60 Fällen. In den folgenden 30 Fällen, wo nur noch eine bekannte Größe da ist, gibt es auch nur in jedem einen einzigen Fall, also in allen zusammen 30 Fälle. Für die letzten 6 Fälle endlich gibt es gar keinen Fall mehr, weil sie keine bekannte Größe mehr enthalten, die durch y bestimmt werden kann. Es sind also in obiger Tabelle noch $450+420+180+30 = 1080$ Fälle enthalten.

Wir wollen bloß die 15 Kombinationen für Nr. 1. hersetzen.

Kombination der Fälle, wo d, e, f, g in Nr. 1. der Tabelle durch y ausgedrückt werden können.

	Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
1	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	e	f	g
2	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{y}{v}$	f	g
3	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	wy	g
4	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	f	zy
5	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	$\frac{y}{v}$	f	g
6	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	e	wy	g
7	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	e	f	zy
8	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	wy	zy
9	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{y}{v}$	f	zy
10	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{y}{v}$	wy	g
11	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	$\frac{y}{v}$	wy	g
12	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	$\frac{y}{v}$	f	zy
13	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	e	wy	zy
14	x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{y}{v}$	wy	zy
15	x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	$\frac{y}{v}$	wy	zy

§. 261.

Es ist einleuchtend, daß für den Hauptfall, für welchen die Tabelle in §. 257. verfertigt ist, sich noch andere Tabellen verfertigen lassen, worin die bekannten Größen durch ihr Verhältniß zu x vermittelst Addition oder Subtraktion, vermittelst Potenzirung oder Ausziehung der Wurzel ausgedrückt sind. Jede

solcher Tabellen würde wieder, wie die obige, 186 Fälle enthalten und zugleich 1080 Nebenfälle vermöge der Bestimmungen durch y vermittelst Multiplikation oder Division, dann aber noch eben so viel, wenn diese Bestimmungen vermittelst Addition oder Subtraktion, so wie auch eben so viel, wenn sie durch Potenzirung oder Wurzelausziehen geschehen. Man sieht daraus, welche Menge von untergeordneten Fällen unter die Eine Aufgabe begriffen werden, von der §. 255. handelt.

§. 262.

Da wir unmöglich zu allen Fällen der Tabelle Aufgaben beibringen können, so wollen wir nur von jeder Hauptveränderung in den Kombinationen Ein Exempel anführen.

1) Exempel zu Nr. 1.

Es kauft jemand Getreide und bezahlt für den Wispel $9\frac{1}{2}$ mal weniger, als er Wispel gekauft hat, verkauft davon einen Theil, den Wispel für 45 thlr., das Übrige zu 48 thlr., gewinnt 2500 thlr., hätte aber 4000 thlr. gewinnen, wenn er alles so theuer, wie den Rest verkauft hätte. Wie viel Getreide war es und wie viel verkaufte er zuerst?

Erste Gleichung.

$$x \cdot \frac{x}{m} + g = xe,$$

oder $$\frac{x^2}{m} + g = xe,$$

also $$\frac{x^2}{m} - xe = -g,$$

oder $$x^2 - xme = -mg.$$

Zweite Gleichung.

$$x \cdot \frac{x}{m} + f = yd + xe - ye,$$

$$\frac{x^2}{m} + f = yd - ye + xe,$$

oder $$x^2 + mf = y(d-e) + xe,$$

also $$x^2 - xe = y(d-e) - mf.$$

Es kommen, wie man sieht, quadratische Gleichungen, die also im zweiten Theile erst aufgelöst werden können. Dies ist auch in allen den Nummern der Fall, wo der Einkaufspreis durch das Verhältniß zur ganzen Waare bestimmt ist, ausgenommen diejenigen, wo sich alle Glieder durch x dividiren lassen.

2) Exempel zu Nr. 6.

Es hat jemand einen Vorrath von Getreide, verkauft davon den fünften Theil, den Scheffel für $1\frac{2}{3}$ thlr., das Übrige zu $2\frac{1}{4}$ thlr., gewinnt 3000 thlr.; hätte aber 5000 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Getreide war es und wie theuer hat er eingekauft?

Erste Gleichung.

$$xy + g = xe,$$

also $$g = xe - xy,$$

folglich $$\frac{g}{e-y} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + f = \frac{x}{p} \cdot d + \left(x - \frac{x}{p}\right) e,$$

oder $$xy + f = \frac{xd}{p} + ex - \frac{ex}{p},$$

also $$pxy + pf = xd + pex - ex,$$

folglich $$pf = xd - pxy + pex - ex,$$

oder $$pf = x\,(d - py + pe - e),$$

also $$\frac{pf}{d - py + e(p-1)} = x.$$

Also ist $$\frac{g}{e-y} = \frac{pf}{d - py + e(p-1)}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$gd - gpy + ge(p-1) = pfe - pfy,$$

also $$gd + ge(p-1) - pfe = gpy - pfy,$$

oder $$gd + gep - ge - pfe = y\,(gp - pf),$$

oder $$g\,(d-e) + ep\,(g-f) = yp\,(g-f),$$

oder $$ep\,(g-f) - g\,(e-d) = yp\,(g-f),$$

also $$\frac{ep\,(g-f) - g\,(e-d)}{p\,(g-f)} = y,$$

oder $$e - \frac{g\,(e-d)}{p\,(g-f)} = y.$$

Es war $x = \frac{g}{e-y} = \frac{g}{e - e + \frac{g\,(e-d)}{p\,(g-f)}} = \frac{g}{\frac{g\,(e-d)}{p\,(g-f)}}$

$= \frac{gp\,(g-f)}{g\,(e-d)} = \frac{p\,(g-f)}{e-d}.$

Im Exempel ist $p = 5$, $d = 1\frac{2}{3}$ thlr., also 40 thlr. pro Wispel, $e = 2\frac{1}{4}$ thlr., oder 54 thlr. pro Wispel, $f = 3000$, $g = 5000$, folglich

$$y = 54 \text{ thlr.} - \frac{5000(54-40)}{5(5000-3000)} = 54 \text{ thlr.} - \frac{5000 \cdot 14}{5 \cdot 2000}$$
$$= 54 - \frac{5 \cdot 14}{5 \cdot 2} = 54 - \frac{70}{10} = 47 \text{ thlr.}$$
$$x = \frac{5(5000-3000)}{54-40} = \frac{5 \cdot 2000}{14} = \frac{10000}{14} = \frac{5000}{7}$$
$$= 714\tfrac{2}{7} \text{ Wspl.}$$

Von den Nebenfällen wollen wir zu folgendem ein Exempel geben.

3 Von dem vorräthigen Getreide verkauft jemand den sechsten Theil $1\frac{1}{2}$ mal so theuer, als er eingekauft hat, das Übrige zu 42 thlr. den Wispel. Er gewinnt so 20 mal so viel als der Einkaufspreis für den Wispel betrug; hätte er aber alles für den Preis des Restes verkauft, so hätte er 4000 thlr. gewonnen, wie viel Getreide war es, wie theuer wurde es eingekauft?

Man bezeichne in diesem Exempel die einzelnen Stücke allgemein so:

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	uy	$x-\frac{x}{p}$	e	wy	g

Erste Gleichung.

$$xy + g = xe,$$
$$g = xe - xy,$$
oder $$g = x(e-y),$$
also $$\frac{g}{e-y} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + wy = \frac{xuy}{p} + xe - \frac{xe}{p},$$
also $$pxy + pwy = xuy + pxe - xe,$$
folglich $$pwy = xuy - pxy + pxe - xe,$$
oder $$pwy = x(uy - py + pe - e),$$
oder $$pwy = x[y(u-p) + e(p-1)],$$
also $$\frac{pwy}{y(u-p) + e(p-1)} = x.$$

Also hat man die Gleichung

$$\frac{g}{e-y} = \frac{pwy}{y(u-p) + e(p-1)},$$
also $$yg(u-p) + ge(p-1) = pwey - pwy^2,$$
folglich $$pwy^2 + yg(u-p) - ypwe = -ge(p-1).$$

Wieder eine quadratische Gleichung, deren Auflösung im zweiten Theile folgen wird.

4) Exempel zu Nr. 12.

Es kauft jemand Zucker, das Pfund zu 6 gr., verkauft davon einen Theil das Pfund für 10 mal weniger Groschen, als er Zentner gekauft hat, vom Übrigen das Pfund zu 10 gr., gewinnt $1558\frac{1}{3}$ thlr., hätte aber 1650 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte.

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	e	f	g

Erste Gleichung.

$$xb+g = xe,$$
$$g = x(e-b),$$
$$\frac{g}{e-b} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb+f = \frac{xy}{q}+xe-ye,$$

also $\quad xbq+qf = xy+xqe-yqe,$
folglich $\quad qf+yqe = xy+xqe-xbq,$
also $\quad qf+yqe = x[y+q(e-b),$
folglich $\quad \frac{qf+yqe}{y+q(e-b)} = x.$

Man hat also die Gleichung

$$\frac{g}{e-b} = \frac{qf+yqe}{y+q(e-b)}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$gy+gq(e-b) = qf(e-b)+yqe(e-b),$$

also $\quad gq(e-b)-qf(e-b) = yqe(e-b)-gy,$
oder $\quad (g-f)q(e-b) = y[qe(e-b)-g],$
folglich $\quad \frac{(g-f)q(e-b)}{qe(e-b)-g} = y.$

Es ist also

$$x = \frac{1650\text{ thlr.}}{\frac{5}{12}-\frac{1}{4}} = \frac{1650}{\frac{1}{6}} = 9900\text{ Pfd.} = 90\text{ Ztn.}$$

$$y = \frac{24.(1650-1558\frac{1}{3}).10(10-6)}{110.10.10(10-6)-24.1650} = \frac{24.91\frac{2}{3}.10.4}{110.10.10.4-24.1650}$$

$$= \frac{24.\frac{275}{3}.40}{44000-39600} = \frac{8.275.40}{4400} = \frac{2200.40}{4400} = \frac{40}{2}$$

$= 20$ Ztn.

Da nach der Angabe das Pfund vom ersten Theile der Waare für 10 mal weniger Groschen verkauft wurde, als die ganze Waare in Zentner beträgt, so mußten in dem Werthe für y im Zähler und Nenner die Thaler in Groschen verwandelt, die Differenz e—b und der Verkaufspreis e durch Groschen ausgedrückt und da nun im Nenner e und e—b sich auf Pfund beziehen, aber Zentner herauskommen sollen, so mußte der Theil des Divisors qe(e—b) noch mit 110 multiplizirt werden. Der endliche Quotient ist also 20 Ztn.

Es hat also derselbe 90 Ztn. Zucker eingekauft, das Pfund für 6 gr., folglich die Ausgabe 2475 thlr.; verkauft wurden zuerst 20 Ztn., das Pfund für 10 mal weniger als Zentner gekauft waren, also für 9 gr., folglich die Einnahme 825 thlr. Die übrigen 70 Ztn. wurden das Pfund für 10 gr. verkauft, also Einnahme $3208\frac{1}{3}$ thlr., folglich ganze Einnahme 4033 thlr., daher $1558\frac{1}{3}$ thlr. Gewinn, mögliche Einnahme aber 4125 thlr., also möglicher Gewinn 1650 thlr.

5) Als Nebenfall mag folgendes Exempel dienen.

Es kauft jemand eine Partie Tuch, die Elle für 2 thlr., verkauft davon einen Theil die Elle für 40 mal weniger Thaler, als er Ellen Tuch kaufte, und den Rest die Elle für 10 mal weniger Thaler, als der erste Theil der Waare Ellen enthielt. Er gewinnt 50 mal so viel Thaler, als er zuerst Ellen verkaufte und würde 60 mal so viel gewonnen haben, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es und wie viel wurden zuerst davon verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	x—y	$\frac{y}{v}$	wy	zy

Erste Gleichung.

$$xb + zy = \frac{xy}{v},$$

also $\quad xbv + vzy = xy,$

folglich $\quad vzy = xy - xbv$

$$= x(y - bv),$$

daher $\quad \frac{vzy}{y - bv} = x.$

Zweite Gleichung.

$$xb+wy = \frac{xy}{q}+\frac{xy}{v}+\frac{y^2}{v},$$

also $$qxb+qwy = xy+\frac{qxy}{v}-\frac{qy^2}{v},$$

und $$vqxb+vqwy = vxy+qxy-qy^2,$$

folglich $$vqwy+qy^2 = vxy+qxy-vqxb,$$

oder $$vqwy+qy^2 = x(vy+qy-vqb),$$

daher $$\frac{vqwy+qy^2}{vy+qy-vqb} = x,$$

oder $$\frac{vqwy+qy^2}{y(v+q)-vqb} = x.$$

Daher $$\frac{qy^2+vqwy}{y(v+q)-vqb} = \frac{vzy}{y-bv}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$qy^3+vqwy^2-qy^2bv-bv^2qwy = (v+q)vzy^2-v^2qbzy.$$

Alle Glieder durch y dividirt, kommt

$$qy^2+vqwy-qybv-bv^2qw = (v+q)vzy-v^2qbz.$$

Also eine quadratische Gleichung, die ihre Auflösung im zweiten Theile findet.

6) Exempel zu Nr. 16.

Es kauft jemand Tuch, die Elle zu $2\frac{1}{2}$ thlr., verkauft davon einen Theil, die Elle zu $2\frac{3}{4}$ thlr., den Rest aber für 80 mal weniger Thaler, als er Ellen eingekauft hat, gewinnt so 400 thlr; hätte aber 600 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es, wie viel hat er zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	y	c	x−y	$\frac{x}{r}$	f	g

Erste Gleichung.

$$xb+g = x.\frac{x}{r},$$

oder $$xb+g = \frac{x^2}{r},$$

also $$g = \frac{x^2}{r}-xb,$$

oder $$rg = x^2-rxb;$$

eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile ihre Auflösung findet.

Zweite Gleichung.

$$xb + f = yc + \frac{x^2}{r} - \frac{xv}{r},$$

also $rxb + rf = ryc + x^2 - xy,$
oder $rf - ryc = x^2 - xy - rxb,$
oder $rf - ryc = x^2 - x(y + rb);$

ebenfalls eine quadratische Gleichung, deren Auflösung im zweiten Theile folgt.

Auch die zu dieser Rubrik gehörigen Nebenfälle müssen quadratische Gleichungen enthalten, daher wir sie jetzt ganz übergehen wollen.

7) Exempel zu Nr. 21.

Es kauft jemand Kaffee, das Pfund für 6 gr., verkauft einen Theil à 8 gr., das Übrige à 10 gr., gewinnt so $\frac{1}{8}$ mal so viel als er Pfund eingekauft hat; hätte aber 2400 thlr. gewonnen, wenn alles zu dem letztern Preise wäre verkauft worden. Wie viel Kaffee war es? wie viel hat er zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	y	d	x — y	e	sx	g

Erste Gleichung.

$xb + g = xe,$
$g = x(e - b),$
$\frac{g}{e-b} = x.$

Zweite Gleichung.

$xb + sx = yd + xe - ey,$
also $ey - yd = xe - xb - sx,$
oder $y(e - d) = x(e - b - s),$
folglich $\frac{y(e-d)}{e-b-s} = x.$

Daher $\frac{g}{e-b} = \frac{y(e-d)}{e-b-s},$

also $g(e - b - s) = y(e - d)(e - b),$

folglich $\frac{g(e-b-s)}{(e-d)(e-b)} = y.$

Im Exempel ist $g = 2400$, $b = \frac{1}{4}$ gr., $d = \frac{1}{3}$ thlr., $e = \frac{5}{12}$ thlr., $s = \frac{1}{8}$, also

$$x = \frac{2400}{\frac{5}{12} - \frac{1}{4}} = \frac{2400}{\frac{1}{6}} = 14400 \text{ Pfd.} = 130 \text{ Ztn. } 100 \text{ Pfd.}$$

$$y = \frac{2400\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{2400 \cdot \left(\frac{10-6-3}{24}\right)}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{2400 \cdot \frac{1}{24}}{\frac{1}{72}}$$

$$= \frac{2400}{24} \cdot \frac{72}{1} = 2400 \cdot 3 = 7200 \text{ Pfd.} = 65 \text{ Ztn. } 50 \text{ Pfd.}$$

Er

Er hat also 130 Ztn. 100 Pfd. eingekauft und zuerst 65 Ztn. 50 Pfd. verkauft. Seine Ausgabe war = 3600 thlr., seine Einnahme 2400 + 3000 = 5400 thlr., also wirklicher Gewinn = 1800 thlr. und dieser ist $\frac{1}{2}$ mal so viel, als er Pfund eingekauft hat.

Man muß in solchen Exempeln b und s so wählen, daß beide zusammen kleiner als e sind, weil sonst e − b − s negativ und also die Aufgabe ungereimt wird.

8) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Getreide, den Scheffel für 1 thlr., verkauft davon einen Theil, den Scheffel für 40 mal weniger Thaler, als der Theil Wispel enthält, den Rest aber für 60 mal weniger Thaler, als der nämliche Theil Wispel enthält, gewinnt damit $9\frac{1}{2}$ mal so viel, als er Wispel gekauft hat; hätte aber 6000 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Getreide war es? wie viel hat er zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	y	$\frac{v}{u}$	x − y	$\frac{Y}{v}$	sx	g

Erste Gleichung.

$$xb + g = \frac{xy}{v},$$

also $vxb + vg = xy,$

folglich $vg = xy - vbx,$

oder $vg = x(y - vb),$

also $\frac{vg}{y - vb} = x.$

Zweite Gleichung.

$$xb + sx = \frac{y^2}{u} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v},$$

also $uvxb + uvsx = vy^2 + uxy - uy^2,$

oder $uy^2 - vy^2 = uyx - uvxb - uvsx,$

oder $y^2(u - v) = x(uy - uvb - uvs),$

oder $y^2(u - v) = x[uy - uv(b + s)],$

also $\frac{y^2(u - v)}{uy - uv(b + s)} = x.$

Daher $\frac{vg}{y-vb} = \frac{y^2(u-v)}{uv-uv(b+s)}$,

folglich $vguv - guv^2 b + s = y^3(u-v) - y^2(u-v)vb$,

oder $-guv^2 b + s = y^3(u-v) - y^4(u-v)vb - yguv$.

Eine kubische Gleichung, deren Auflösung im zweiten Theile folgt.

g) Exempel zu Nr. 28.

Es kauft jemand Zucker, das Pfund für 6 gr., verkauft davon 90 Ztn. für einen gewissen Preis, den Rest das Pfund für 10 gr., gewinnt so 2400 thlr.; hätte aber $18\frac{1}{3}$ mal so viel gewonnen, als er Zentner eingekauft hat, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Zucker war es? wie theuer hat er vom ersten Theile das Pfund verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	c	y	$x-c$	e	f	tx

Erste Gleichung.

$$xb + tx = xe.$$

Hier läßt sich alles mit x dividiren: es kommt daher $b + t = e$, oder $t = e - b$, d. h. man muß t so bestimmen, daß es gleich dem Unterschiede des Ein- und Verkaufspreises für den Rest sei, nämlich beides, Ein- und Verkaufspreis für den Zentner gerechnet, weil mit t die Zentner multiplizirt werden sollen.

Zweite Gleichung.

$$xb + f = cy + xe - ce,$$

also $f - cy + ce = xe - xb$,

oder $f - cy + ce = x(e-b)$,

also $\frac{f - cy + ce}{e-b} = x$.

In dieser Gleichung ist ein Werth für x, aber durch y, bestimmt. Da sich aber dieses durch keine zweite Gleichung bestimmen läßt, so gehört die Aufgabe zu den unbestimmten.

Wenn man daher y beliebig wählt, so wird dadurch x bestimmt; wählt man x beliebig, so muß, da $x(e-b) = f - cy + ce$ ist, folglich $x(e-b) - f - ce = -cy$, oder $f + ce - x(e-b) = cy$, die Größe $y = \frac{f + ce - x(e-b)}{c}$ sein.

Es sei also $x = 200$ Ztn., $c = 90$ Ztn., $b = 6$ gr. $= \frac{1}{4}$ thlr., $e = 10$ gr. $= \frac{5}{12}$ thlr., $f = 2400$ thlr., $t = 18\frac{1}{3}$, also $tx = 18\frac{1}{3} \cdot 200 = 3666\frac{2}{3}$.

Bei dieser Annahme ist nämlich $t = e - b$, denn der Preis e für den Zentner ist $45\frac{5}{6}$ thlr. und der Preis b für den Zentner $27\frac{1}{2}$ thlr., also $e - b = 18\frac{1}{3}$, y ist nun $= \frac{f + ce - x(e-b)}{c}$

$$= \frac{2400 + 90 \cdot 110 \cdot \frac{5}{12} \text{ thlr.} - 200 \cdot 110 \cdot (\frac{5}{12} - \frac{1}{4} \text{ thlr.})}{90 \cdot 110}$$

$$= \frac{2400 + 9900 \cdot \frac{5}{12} - 23000 \cdot \frac{1}{6}}{90 \cdot 110} = \frac{2400 + 4125 - 3666\frac{2}{3}}{9900},$$

$$= \frac{6525 - 3666\frac{2}{3}}{9900} = \frac{2858\frac{1}{3}}{9900} \text{ thlr.} = \frac{8575 \cdot 24}{3 \cdot 9900} \text{ gr.} = \frac{68600}{9900}$$

$$= \frac{686}{99} = 6\frac{92}{99} \text{ gr.}$$

Die Ausgabe ist 5500 thlr., die Einnahme für die 90 Ztn., wovon 1 Pfd. $6\frac{22}{99}$ gr. kostet, $= 2858\frac{1}{3}$ thlr., die Einnahme für den Rest, das Pfund zu 10 gr., $= 5041\frac{2}{3}$ thlr.; also die ganze Einnahme $= 7900$, folglich der wirkliche Gewinn 2400thlr., und da die mögliche Einnahme $9166\frac{2}{3}$ ist, so ist der mögliche Gewinn $= 3666\frac{2}{3}$ thlr.

10) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel für 28 thlr., verkauft 40 Wspl. für einen gewissen Preis, und den Rest $1\frac{1}{4}$ mal theurer; er gewinnt so $178\frac{8}{9}$ mal so viel als der Verkaufspreis für den ersten Theil beträgt, und hätte 17 mal so viel gewinnen können, als er Wispel eingekauft hat, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Getreide war es? wie theuer hat er vom ersten Theile den Wispel verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	c	y	x − c	vy	wy	tx

Erste Gleichung.

$$xb + tx = xvy,$$

alles mit x dividirt, kommt

$$b + t = vy,$$

folglich $$\frac{b+t}{v} = y.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + wy = cy + xvy - cvy.$$

Da wir einen Werth für y bekommen haben, so wollen wir auch jetzt y bestimmen, also

$$xb = cy + xvy - cvy - wy,$$

oder $$xb = y(c + xv - cv - w),$$

oder $xb = y[c+v(x-c)-w]$,

folglich $\frac{xb}{c-w+v(x-c)} = y$.

Daher $\frac{b+t}{v} = \frac{xb}{c-w+v(x-c)}$,

also $(b+t)(c-w)+(b+t)(x-c)v = xbv$,
oder $(b+t)(c-w)+v(b+t)x-v(b+t)c = xbv$,
also $(b+t)(c-w)-(b+t)vc = xbv-xv(b+t)$,
oder $(b+t)(c-w-vc) = x[bv-v(b+t)]$,
oder $(b+t)(c-w-vc) = x(bv-bv-vt)$,
oder $(b+t)[c(1-v)-w] = -xvt$,
oder $(b+t)[w-c(1-v)] = xvt$,
oder $(b+t)[w+c(v-1)] = xvt$.

Also $\frac{(b+t)[w+c(v-1)]}{vt} = x$.

Im Exempel ist $b = 28$, $t = 17$, $w = 178\frac{1}{9} = \frac{1610}{9}$, $c = 40$, $v = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Also

$$x = \frac{(28+17)[\frac{1610}{9}+40(\frac{5}{4}-1)]}{\frac{5}{4}\cdot 17} = \frac{45\cdot(\frac{1610}{9}+40\cdot\frac{1}{4})}{\frac{85}{4}}$$

$$= \frac{45\cdot(\frac{1610}{9}+10)\cdot 4}{85} = \frac{45\cdot(\frac{1610}{9}+\frac{90}{9})\cdot 4}{85} = \frac{45\cdot\frac{1700}{9}\cdot 4}{85}$$

$$= \frac{5\cdot 1700\cdot 4}{85} = 400 \text{ Wspl.}$$

und $y = \frac{28+17}{\frac{5}{4}} = 45\cdot\frac{4}{5} = 36$ thlr.

Es sind also 400 Wspl. eingekauft, also die Ausgabe = 11200 thlr.; die 40 Wspl. wurden à 36 thlr. verkauft, also Einnahme = 1440 thlr., der Rest $\frac{5}{4}$ mal theurer, also für 45 thlr., folglich Einnahme = 16200, daher ganze Einnahme 17640 thlr., also wirklicher Gewinn = 6440 thlr. und dieser $178\frac{4}{9}$ mal größer als 36, der Verkaufspreis für die 40 Wspl. Die mögliche Einnahme ist 18000 thlr., also möglicher Gewinn = 6800 thlr. und dieser 17 mal größer als die gekauften 400 Wspl.

11) Exempel zu Nr. 35.

Es kauft jemand Tuch, und bezahlt für die Elle 200 mal weniger, als er Ellen gekauft hat; davon verkauft er einen Theil und zwar die Elle für 160 mal weniger, als er Ellen gekauft hat. Den Rest verkauft er die Elle für 4 thlr., gewinnt so 710 thlr.; hätte aber 800 thlr. gewonnen, wenn er alles für diesen Preis verkauft hätte. Wie viel Ellen hat er gekauft? wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x—y	e	f	g

Erste Gleichung.

$$x \cdot \frac{x}{m} + g = xe,$$

oder $$\frac{x^2}{m} + g = xe,$$

also $$x^2 + mg = xme,$$

oder $$x^2 - xme = -mg.$$

Eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile ihre Auflösung findet.

Zweite Gleichung.

$$x \cdot \frac{x}{m} + f = y \cdot \frac{x}{q} + xe - ye,$$

oder $$\frac{x^2}{m} + f = \frac{xy}{q} + xe - ye,$$

also $$qx^2 + mqf = mxy + mqxe - mqye,$$

also $$qx^2 - mxy - mqxe = -mqf - mqye,$$

oder $$qx^2 - x(my + mqe) = -mq(f + ye).$$

Ebenfalls eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile ihre Auflösung findet.

Das Nebenexempel würde ebenfalls auf quadratische Gleichung führen, daher wir es jetzt übergehen.

12) Die Exempel zu Nr. 31 bis 46 führen alle auf quadratische Gleichungen, daher wir sie jetzt übergehen.

13) Exempel zu Nr. 47.

Es kauft jemand eine Partie Tuch, die Elle 240 mal weniger, als er Ellen kaufte; davon verkauft er einen Theil die Elle für 4 thlr., den Rest die Elle für 5 thlr., gewinnt so $1233\frac{1}{3}$ thlr.; hätte aber $1\frac{2}{3}$ mal mehr Thaler gewonnen, als er Ellen eingekauft hat, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es? wie viel verkaufte er zuerst?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x—y	e	f	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = xe.$$

Durch x dividirt, kommt

$$\frac{x}{m} + t = e,$$

$$\text{also} \quad x + mt = me,$$

$$\text{folglich} \quad x = me - mt$$

$$= m(e - t).$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = yd + xe - ey.$$

Da schon in der ersten Gleichung ein Werth für x in lauter bekannten Größen bestimmt worden ist, so kann man diesen in obiger Gleichung substituiren, dann kommt

$$\frac{m^2(e-t)^2}{m} + f = yd + m(e-t)e - ey,$$

$$\text{oder} \quad m(e-t)^2 + f = yd - ey + me(e-t),$$

$$\text{also} \quad ey - yd = me(e-t) - m(e-t)^2 - f,$$

$$\text{oder} \quad y(e-d) = me(e-t) - m(e-t)(e-t) - f,$$

$$\text{oder} \quad y(e-d) = m(e-t)[e-(e-t)] - f,$$

$$= m(e-t)(e-e+t) - f,$$

$$\text{oder} \quad y(e-d) = m(e-t)t - f,$$

$$\text{also} \quad y = \frac{m(e-t)t - f}{e-d}.$$

Im Exempel ist $m = 240$, $d = 4$, $e = 5$, $f = 1233\frac{1}{3} = \frac{3700}{3}$, $t = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Es ist also

$$x = 240\left(5 - \tfrac{5}{3}\right) = 240 \cdot \tfrac{15-5}{3} = 240 \cdot \tfrac{10}{3} = 800 \text{ Ellen.}$$

$$y = \frac{240\left(5 - \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{5}{3} - 1233\frac{1}{3}}{5-4} = \frac{240 \cdot \frac{15-5}{3} \cdot \frac{5}{3} - \frac{3700}{3}}{1}$$

$$= 240 \cdot \tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{5}{3} - \tfrac{3700}{3} = \tfrac{800 \cdot 5}{3} - \tfrac{3700}{3} = \tfrac{4000-3700}{3}$$

$$= \tfrac{300}{3} = 100 \text{ Ellen.}$$

Er hat also gekauft 800 Ellen und für die Elle bezahlt $\frac{800}{240}$ thlr. $= \frac{80}{24} = 3\frac{1}{3}$ thlr., seine Ausgabe war also $2666\frac{2}{3}$ thlr. Nun verkauft er 100 Ellen à 4 thlr., also Einnahme $= 400$ thlr. und 700 Ellen à 5 thlr., also 3500 thlr. Einnahme, zusammen 3900 thlr. Einnahme, folglich Gewinn $= 1233\frac{1}{3}$ thlr. Die mögliche Einnahme wäre 4000 thlr., also $1333\frac{1}{3}$ Gewinn und dieser ist $= 800 \cdot 1\frac{2}{3}$.

14) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Zucker, das Pfund für 40 mal weniger Groschen, als Zentner gekauft worden, verkauft davon 60 Ztn.

zu einem gewissen Preise, das übrige zu einem $1\frac{1}{4}$ mal größern Preise, gewinnt so $2956\frac{1}{4}$ thlr.; hätte aber $17\frac{3}{16}$ mal mehr gewonnen, als Zentner gekauft worden, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Zentner waren es? wie theuer wurde vom ersten Theile das Pfund verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	c	y	x — c	vy	f	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = xvy,$$

also $x^2 + mtx = mxvy.$

Mit x dividirt, kommt

$$x + mt = mvy,$$

also $x = mvy - mt,$

oder $x = m(vy - t).$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = cy + xvy - cvy,$$

also $x^2 + mf = mcy + mxvy - mcvy,$

folglich $x^2 - mxvy = mcy - mcvy - mf.$

Man setze statt x den gefundenen Werth, so kommt

$$m^2(vy - t)^2 - m^2(vy - t)vy = ymc - mcvy - mf,$$

oder

$$m^2(v^2y^2 - 2vyt + t^2) - m^2(vy - t)vy = ymc - mcvy - mf,$$

oder

$$m^2v^2y^2 - 2m^2vyt + m^2t^2 - m^2v^2y^2 + m^2tvy = ymc - mcvy - mf.$$

Da sich $m^2v^2y^2$ mit $-m^2v^2y^2$ hebt und $-2m^2vyt$ mit $+m^2vyt$ zusammen $-m^2vyt$ gibt, so kommt

$$m^2t^2 - m^2vyt = ymc - mcvy - mf.$$

Man dividire alle Glieder mit m, so erhält man

$$mt^2 - mvyt = yc - cvy - f,$$

oder $mt^2 + f = yc - cvy + mvyt,$

oder $mt^2 + f = y(c - cv + mvt),$

oder $mt^2 + f = y[mvt - c(v - 1)],$

also $$\frac{mt^2 + f}{mvt - c(v - 1)} = y.$$

Um nun x und y in Zahlen ſo beſtimmen, ſo bemerkt man Folgendes.

Es iſt in dieſem Exempel der Einkaufspreis des Pfundes in Groſchen nach dem Verhältniſſe dieſes Preiſes zur ganzen Waare in Zentner beſtimmt. Um nun aber einerlei Einheit zu haben, ſuche man daraus den Preis des Zentners in Thalern, vermöge der Proportion 1 Pfd. : $\frac{x}{m}$ gr. $=$ 1 Ztn. : z thlr. Dann kommt z thlr. $= \frac{x \cdot 110}{m \cdot 24}$ thlr. Nun ſuche man, der wie vielte Theil dieſer Preis von der Menge der gekauften Zentner iſt, indem man mit demſelben in x Ztn. dividirt. Der Quotient iſt $\frac{x}{\frac{x \cdot 110}{m \cdot 24}} = x \cdot \frac{m \cdot 24}{x \cdot 110} = \frac{x \cdot m \cdot 24}{x \cdot 110} = \frac{m \cdot 24}{110}$.

Dieſer Quotient iſt nun eigentlich für Zentner der Werth der Zahl m, mit welcher x Ztn. dividirt werden muß. Da nun in der Formel für x der Werth von x nicht eher beſtimmt werden kann, als bis y bekannt iſt, ſo ſuche man erſt y vermöge der Formel für y aus der zweiten Gleichung. Man ſetze alſo $\frac{m \cdot 24}{110}$ ſtatt m, ſo iſt

$$y = \frac{\frac{40 \cdot 24}{110} \cdot \left(\frac{275}{16}\right)^2 + 2956\frac{1}{4}}{\frac{40 \cdot 24}{110} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{275}{16} - 60 \cdot \left(\frac{5}{4} - 1\right)}.$$

Der Zähler dieſes Bruches iſt $= \frac{4 \cdot 24}{11} \cdot \frac{75625}{256} + \frac{11825}{4}$, $= \frac{3 \cdot 75625}{11 \cdot 8} + \frac{11825}{4} = \frac{3 \cdot 6875}{8} + \frac{11825}{4} = \frac{20625 + 23650}{8}$ $= \frac{44275}{8}$.

Der Nenner des Bruches iſt $= \frac{96}{11} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{275}{16} - 60 \cdot \frac{1}{4}$ $= \frac{2 \cdot 5 \cdot 25}{2} - 15 = \frac{375 - 30}{2} = \frac{345}{2}$.

Alſo iſt $y = \frac{\frac{44275}{8}}{\frac{345}{2}} = \frac{44275}{8} \cdot \frac{2}{345} = \frac{8855}{4 \cdot 69} = \frac{8855}{276}$ $= \frac{23 \cdot 385}{23 \cdot 12} = \frac{385}{12} = 32\frac{1}{12}$ thlr., alſo der Verkaufspreis für 1 Ztn., folglich der Verkaufspreis für 1 Pfd. $= \frac{385 \cdot 24}{12 \cdot 110}$ gr. $= \frac{35 \cdot 2}{10}$ gr. $= 7$ gr.

Jetzt läßt ſich x beſtimmen, wenn man in der Formel für x aus der erſten Gleichung den Werth für y als Preis des Zentners ſetzt, weil x in Zentner gefunden werden ſoll. Es iſt alſo

$$x = \frac{40 \cdot 24}{110}\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{385}{12} - \frac{275}{16}\right) = \frac{40 \cdot 24}{110}\left(\frac{5 \cdot 385}{48} - \frac{825}{48}\right)$$
$$= \frac{40 \cdot 24}{110}\left(\frac{1925 - 825}{48}\right) = \frac{96}{11} \cdot \frac{1100}{48} = 200 \text{ Ztn.}$$

Es ſind alſo gekauft worden 200 Ztn., das Pfund zu $\frac{280}{40}$ gr. $= 5$ gr. Die Ausgabe war daher $4583\frac{1}{3}$ thlr. Die

60 Ztn. wurden das Pfund zu 7 gr. verkauft, also die Einnahme = 1925 thlr., der Rest von 140 Ztn. aber das Pfund zu $\frac{5}{6}$. 7 gr. = $\frac{35}{4}$ = $8\frac{3}{4}$ gr., also die Einnahme = $5614\frac{7}{12}$ thlr., folglich die ganze Einnahme = $7539\frac{7}{12}$ thlr., also der wirkliche Gewinn = $2956\frac{1}{4}$ thlr. Die mögliche Einnahme wäre $8020\frac{5}{6}$ thlr., also der mögliche Gewinn = $3437\frac{1}{2}$ thlr. = $200 \cdot 17\frac{3}{16}$.

Der Bestimmung von m wegen, wollen wir noch ein ähnliches Exempel beifügen.

15) Es kauft jemand eine Partie Gewürze, das Loth für 40 mal weniger Groschen, als er das Pfund gekauft hat, verkauft davon 30 Pfd. zu einem gewissen Preise, den Rest aber $\frac{5}{4}$ mal theurer, gewinnt so 95 thlr., hätte aber $1\frac{1}{2}$ mal so viel gewonnen, als er Pfund gekauft hat, wenn alles für den letztern Preis verkauft worden wäre.

In diesem Exempel ist nun

$$y = \frac{\frac{40 \cdot 24}{32} \cdot (\frac{3}{2})^2 + 95}{\frac{40 \cdot 24}{32} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{12} - 30(\frac{3}{4} - 1)} = \frac{\frac{6 \cdot 24}{4} \cdot \frac{9}{4} + 95}{\frac{6 \cdot 24}{4} \cdot \frac{15}{8} - 30 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{30 \cdot \frac{9}{4} + \frac{380}{4}}{15 \cdot \frac{15}{4} - \frac{30}{4}} = \frac{\frac{270+380}{4}}{\frac{225-30}{4}} = \frac{650}{195} = \frac{130}{39}$$

$$= \frac{10}{3} \text{ thlr.} = \text{dem Verkaufspreise für 1 Pfd., folglich}$$

der Verkaufspreis für 1 Lth. = $\frac{10 \cdot 24}{3 \cdot 32} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ gr.

$$x = \frac{40 \cdot 24}{32}(\frac{5}{4} \cdot \frac{10}{3} - \frac{3}{2}) = 30 \cdot (\frac{50}{12} - \frac{18}{12}) = 30 \cdot \frac{32}{12}$$

$$= 10 \cdot 8 = 80 \text{ Pfd.}$$

Es sind also 80 Pfd. eingekauft, das Loth mit $\frac{80}{40}$ gr. = 2 gr. bezahlt, 30 Pfd. das Loth für $2\frac{1}{2}$ gr., der Rest aber das Loth für $2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$ gr. verkauft worden. Der wirkliche Gewinn ist 95 thlr., der mögliche 120 thlr. = $80 \cdot \frac{3}{2}$.

16) Exempel zu Nr. 51.

Es kauft jemand Getreide, verkauft davon den vierten Theil und zwar den Wispel für 10 mal weniger Thaler als er Wispel gekauft hat, vom Übrigen aber den Wispel für 30 thlr., gewinnt so 3500 thlr., hätte aber 4000 thlr. gewonnen, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Getreide war es? wie theuer hat er es eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	e	f	g

Erste Gleichung.

$$xy + g = xe,$$
$$g = xe - xy,$$
$$\frac{g}{e-y} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + f = \frac{x^2}{pq} + xe - \frac{xe}{p},$$
also $$f = \frac{x^2}{pq} + xe - \frac{xe}{p} - xy.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$pqf = x^2 + pqex - xeq - pqxy,$$
oder $$pqf = x^2 + x(pqe - eq - pqy).$$

Setzt man für x den gefundenen Werth, so kommt

$$pqf = \frac{g^2}{e^2 - 2ey + y^2} + \frac{g}{e-y}(pqe - eq - pqy).$$

Alles unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$pqfe^2 - 2pqfey + pqfy^2 = g^2 + g(e-y)(pqe - eq - pqy).$$

Die Klammer weggebracht, kommt

$$pqfe^2 - 2pqfey + pqfy^2 = g^2 + (ge - gy)(pqe - eq - pqy),$$

und daraus wird wiederum

$$pqfe^2 - 2pqfey + pqfy^2 = g^2 + ge^2pq - ge^2q - gepqy - gpqey + geqy + gpqy^2.$$

Alle y auf Eine Seite gebracht, kommt

$$pqfe^2 - g^2 - ge^2pq + ge^2q = 2pqfey - pqfy^2 - gepqy - gpqey + geqy + gpqy^2.$$

Und y von einerlei Potenz zusammengebracht, kommt

$$pqfe^2 - ge^2pq - g^2 + ge^2q = gpqy^2 - pqfy^2 + 2pqfey - 2gpqey + geqy.$$

Was sich vermittelst der Klammer zusammenziehen läßt, zusammengezogen, kommt

$$pqe^2(f-g) + g(e^2q - g) = y^2(gpq - pqf) + y(2pqfe - 2gpqe + geq),$$

oder

$$pqe^2(f-g) + g(e^2q - g) = y^2[pq(g-f)] + y[2pqe(f-g) + geq],$$

oder

$$pqe^2(f-g) + g(e^2q - g) = y^2[pq(g-f)] - y[2pqe(g-f) + geq].$$

Wir haben also wieder eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile ihre Auflösung findet.

Solche Gleichungen geben auch die Exempel zu den Nebenfällen.

17) Exempel zu Nr. 56.

Es kauft jemand Kaffee, das Pfund für 5 gr., verkauft davon den sechsten Theil für einen gewissen Preis, den Rest für 10 mal weniger Groschen, als er Zentner gekauft hat, gewinnt $252\frac{1}{12}$ thlr.; hätte aber 375 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Kaffee war es? wie theuer hat er den ersten Theil verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x'}{r}$	f	g

Erste Gleichung.

$$xb+g=\frac{x^2}{r},$$

$$xrb+rg=x^2,$$

$$rg=x^2-xrb.$$

Zweite Gleichung.

$$xb+f=\frac{xy}{p}+\frac{x^2}{r}-\frac{x^2}{pr},$$

also $xprb+prf=xyr+x^2p-x^2,$

oder $prf=x^2(p-1)+x(ry-prb).$

Beide Gleichungen sind wieder quadratisch.

18) Das Exempel zum Nebenfalle muß ebenfalls quadratisch kommen, daher wir es jetzt übergehen.

19) Exempel zu Nr. 61.

Es kauft jemand eine Partie Zeug, die Elle zu $1\frac{1}{2}$ thlr., verkauft davon den vierten Theil, die Elle zu 2 thlr., das Übrige so, daß er 4 mal mehr Thaler gewinnt, als er Ellen eingekauft hat. Hätte er aber alles für den letztern Preis verkauft, so hätte er 800 thlr. gewonnen. Wie viel Ellen waren es? wie theuer hat er die Elle vom Reste verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	y	8x	g

Erste Gleichung.

$$xb + g = xy,$$
$$\text{also} \quad g = xy - xb,$$
$$\frac{g}{y-b} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + sx = \frac{xd}{p} + xy - \frac{xy}{p},$$
$$\text{also} \quad pbx + psx = xd + pxy - xy.$$

Man kann durchgängig mit x dividiren, so kommt

$$pb + ps = d + py - y,$$
$$\text{oder} \quad p(b+s) = d + y(p-1),$$
$$\text{oder} \quad p(b+s) - d = y(p-1),$$
$$\text{also} \quad \frac{p(b+s)-d}{p-1} = y.$$

Setzt man nun diesen Werth für y in die Gleichung für $x = \frac{g}{y-b}$, so kommt

$$x = \frac{g}{\frac{p(b+s)-d}{p-1} - b},$$
$$\text{oder} \quad x = \frac{g}{\frac{p(p+s)-d-b(p-1)}{p-1}},$$
$$\text{oder} \quad x = \frac{g(p-1)}{p(b+s)-d-b(p-1)}.$$

Drückt man diese Gleichung durch die Zahlen des Exempels aus, so erhält man

$$x = \frac{800.3}{4(1\frac{1}{2}+4)-2-1\frac{1}{2}.3} = \frac{800.3}{4.5\frac{1}{2}-2-4\frac{1}{2}} = \frac{2400}{20\frac{1}{2}-6\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2400}{14} = 171\tfrac{3}{7} \text{ Ellen.}$$

$$y = \frac{4(1\frac{1}{2}+4)-2}{4-1} = \frac{4.5\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{22-2}{3} = \frac{20}{3}$$
$$= 6\tfrac{2}{3} \text{ thlr.}$$

Er hat also $171\frac{3}{7}$ Ellen à $1\frac{1}{2}$ thlr. eingekauft, folglich war seine Ausgabe $= 257\frac{1}{7}$ thlr., davon verkauft er den vierten Theil $= 42\frac{6}{7}$ Ellen à 2 thlr., also die Einnahme $= 85\frac{5}{7}$ thlr., den Rest von $128\frac{4}{7}$ Ellen aber à $6\frac{2}{3}$ thlr., also seine Einnahme $857\frac{1}{7}$ thlr., folglich die ganze Einnahme $= 942\frac{6}{7}$ thlr., davon die Ausgabe abgezogen, bleibt wirklicher Gewinn $= 685\frac{5}{7}$ thlr.

und dieser ist $= 4.171\frac{1}{4}$. Die mögliche Einnahme ist $1057\frac{1}{4}$ thlr., also der mögliche Gewinn $= 800$ thlr.

20) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Wein, den Anker zu 12 thlr., verkauft davon den fünften Theil $\frac{1}{5}$ mal so theuer als den Rest, gewinnt so $5\frac{2}{3}$ mal so viel Thaler, als er Anker gekauft hat; hätte aber $26\frac{2}{3}$ mal mehr gewonnen, als der Verkaufspreis des Restes beträgt, wenn er allen Wein zu diesem Preise verkauft hätte. Wie viel Wein war es? wie theuer wurde der Rest verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{x}{p}$	uy	$x-\frac{x}{p}$	y	sx	zy

Erste Gleichung.

$$xb+zy = xy,$$
$$\text{also} \quad zy = xy-xb,$$
$$\text{oder} \quad zy = x(y-b),$$
$$\text{folglich} \quad \frac{zy}{y-b} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb+sx = \frac{xuy}{p}+xy-\frac{xy}{p},$$
$$\text{oder} \quad pxb+psx = xuy+pxy-xy.$$

Alles durch x dividirt, kommt

$$pb+ps = uy+py-y,$$
$$\text{oder} \quad p(b+s) = y(u+p-1),$$
$$\text{also} \quad \frac{p(b+s)}{u+p-1} = y.$$

Setzt man diesen Werth für y in die Gleichung für x, so kommt

$$x = \frac{\frac{zp(b+s)}{u+p-1}}{\frac{p(b+s)}{u+p-1}-b} = \frac{\frac{zp(p+s)}{u+p-1}}{\frac{p(b+s)-b(u+p-1)}{u+p-1}}$$
$$= \frac{zp(b+s)}{u+p-1} \cdot \frac{u+p-1}{p(b+s)-b(u+p-1)}$$
$$= \frac{zp(b+s)}{p(b+s)-b(u+p-1)} = \frac{z}{1-\frac{b(u+p-1)}{p(b+s)}}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$$y = \frac{5(12+5\frac{2}{5})}{\frac{5}{6}+5-1} = \frac{5 \cdot 17\frac{2}{5}}{4\frac{5}{6}} = \frac{5 \cdot \frac{87}{5}}{\frac{29}{6}} = \frac{87}{\frac{29}{6}} = 87 \cdot \frac{6}{29}$$
$$= 3.6 = 18 \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{26\frac{2}{5}}{1-\frac{12(\frac{5}{5}+4)}{5(12+5\frac{2}{5})}} = \frac{26\frac{2}{5}}{1-\frac{12 \cdot 4\frac{5}{5}}{5 \cdot 17\frac{2}{5}}} = \frac{\frac{80}{3}}{1-\frac{12 \cdot 29}{5 \cdot 87}}$$
$$= \frac{\frac{80}{3}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{80}{3}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{80}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{80}{3} \cdot \frac{3}{1} = 80.$$

Es sind also 80 Anker gekauft, der Rest à 18 thlr., der erste Theil aber à $18 \cdot \frac{5}{6} = 15$ thlr. verkauft worden. Der wirkliche Gewinn ist 432 thlr. $= 80.5\frac{2}{5}$ und der mögliche Gewinn $= 480$ thlr. $= 18.26\frac{2}{3}$.

21) Exempel zu Nr. 67.

Es kauft jemand eine Partie Tuch, verkauft davon 200 Ellen, die Elle für 400 mal, und vom Reste für 300 mal weniger Thaler, als er Ellen gekauft hat, gewinnt dabei 2200 thlr., hätte aber 2400 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es? wie theuer die Elle eingekauft? wie theuer verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	c	$\frac{x}{q}$	$x-c$	$\frac{x}{r}$	f	g

Erste Gleichung.

$$xy+g = \frac{x^2}{r},$$

$$\text{also} \quad g = \frac{x^2}{r} - xy,$$

$$\text{oder} \quad rg = x^2 - rxy.$$

Zweite Gleichung.

$$xy+f = \frac{cx}{q} + \frac{x^2}{r} - \frac{cx}{r},$$

$$\text{oder} \quad qrxy+qrf = crx+qx^2-qcx,$$
$$\text{also} \quad qrf = qx^2+crx-qcx-qrxy,$$
$$\text{oder} \quad qrf = qx^2+x[c(r-q)-qry].$$

Beides sind quadratische Gleichungen, die Auflösung also im zweiten Theile.

22) Das Exempel für den Nebenfall gibt ebenfalls quadratische Gleichungen, daher wir es jetzt übergehen.

23) Exempel zu Nr. 72.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel zu 36 thlr., verkauft davon einen Theil, den Wispel für 10 mal weniger Thaler als er eingekauft hat, vom übrigen aber den Wispel für 72 thlr., gewinnt so $26\frac{2}{3}$ mal mehr Thaler, als er Wispel gekauft hat; hätte aber 14400 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel betrug das Getreide? wie viel der erste Theil?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	x − y	e	sx	g

Erste Gleichung.

$$xb + g = xe,$$
$$g = xe - xb,$$
$$\frac{g}{e-b} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + sx = \frac{xy}{q} + ex - ey,$$

also $xqb + qsx = xy + eqx - eqy,$

oder $eqy = xy + eqx - xqb - qsx,$

oder $eqy = x(y + eq - qb - qs)$

$= x[y + q(e - b - s)].$

Man setze statt x den gefundenen Werth, so kommt

$$eqy = \frac{gy}{e-b} + \frac{gq}{e-b}(e - b - s),$$

oder $eqy(e-b) = gy + gq(e - b - s),$

also $(e-b)eqy - gy = gq(e - b - s),$

oder $y[(e-b)eq - g] = gq(e - b - s),$

folglich $$y = \frac{gq(e-b-s)}{(e-b)eq - g}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist

$$x = \frac{g}{e-b} = \frac{14400}{72-36} = \frac{14400}{36} = 400 \text{ Wspl.}$$

$$y = \frac{14400 \cdot 10(72 - 36 - 26\frac{2}{3})}{(72-36)72 \cdot 10 - 14400} = \frac{14400 \cdot 10 \cdot 9\frac{1}{3}}{36 \cdot 720 - 14400}$$

$$= \frac{14400 \cdot 2 \cdot 48}{36 \cdot 720 - 14400} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 48}{36 - 20} = \frac{40 \cdot 48}{16} = 40 \cdot 3$$

$= 120$ Wspl.

Es sind also 400 Wspl. à 36 thlr. eingekauft und 120 Wspl. à $\frac{400}{100}$ thlr. = 40 thlr., der Rest 280 Wspl. aber à 72 thlr. verkauft worden, also Gewinn = 10560 thlr. = $26\frac{2}{5} \cdot 400$ und der mögliche Gewinn = 14400 thlr.

24) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Kaffee, den Zentner zu 24 thlr., verkauft davon einen Theil, den Zentner für 10 mal weniger Thaler, als er Zentner gekauft hat, den Rest aber den Zentner für 2 mal weniger Thaler, als er zuerst Zentner verkaufte, gewinnt dabei $13\frac{1}{3}$ mal so viel, als er Zentner gekauft hat; hätte aber 60 mal so viel, als er Zentner zuerst verkaufte, gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Zentner betrug das Ganze? wie viel verkaufte er zuerst?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{y}{v}$	sx	zy

Erste Gleichung.

$$xb + zy = \frac{xy}{v},$$

also $vxb + vzy = xy,$
oder $vzy = xy - vxb,$
oder $vzy = x(y - vb),$
also $\frac{vzy}{y - vb} = x.$

Zweite Gleichung.

$$xb + sx = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v},$$

also $qvbx + qvsx = vxy + qxy - qy^2,$
oder $qy^2 = vxy + qxy - qvbx - qvsx,$
oder $qy^2 = x(vy + qy - qvb - qvs),$
also $\frac{qy^2}{y(v+q) - qv(b+s)} = x.$

Daher hat man

$$\frac{vzy}{y - vb} = \frac{qy^2}{y(v+q) - qv(b+s)},$$

folglich $vzy^2(v+q) - qv^2zy(b+s) = qy^3 - vbqy^2.$
Alles durch y dividirt, kommt

$$vzy(v+q) - qv^2z(b+s) = qy^2 - vbqy,$$

folglich

$$\text{oder} \quad -qv^2z(b+s) = qy^2 - y[vbq + vz(v+q)],$$

Eine quadratische Gleichung für y, die im zweiten Theile aufgelöst wird.

25) Exempel zu Nr. 78.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel à 32 thlr., verkauft davon 60 Wspl. den Wispel 5 mal wohlfeiler als er Wispel gekauft hat, vom Übrigen aber den Wispel für 50 thlr., gewinnt so eine gewisse Summe, hätte aber 18 mal mehr Thaler gewonnen, als er Wispel gekauft hat, wenn er alles für den letztern Preis hätte verkaufen können. Wie viel Wispel waren es? wie viel hat er wirklich gewonnen?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	c	$\frac{x}{q}$	x − c	e	y	tx

Erste Gleichung.

$$xb + tx = xe.$$

Mit x dividirt, kommt

$$b + t = e,$$

$$\text{oder} \quad t = e - b.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + y = \frac{cx}{q} + xe - ce,$$

$$\text{oder} \quad xbq + qy = cx + xeq - ceq,$$

$$\text{also} \quad ceq + qy = cx + xeq - xbq,$$

$$\text{oder} \quad ceq + qy = x[c + q(e-b)],$$

$$\text{also} \quad \frac{ceq + qy}{c + q(e-b)} = x.$$

Das Exempel ist unbestimmt, weil der mögliche Gewinn nöthig durch tx angegeben ist, da er schon aus den vorhergehenden Angaben folgt, weil derselbe immer gleich der möglichen Einnahme weniger der Ausgabe $= x(e-b)$ ist. Es ist daher t nicht willkührlich, sondern muß $= e - b$ gegeben sein. Ist dieses, so kann man für y setzen, was man will, und wird dadurch x bestimmt. Es sei z. B. $y = 3000$ thlr., so ist

$$x = \frac{60 \cdot 50 \cdot 5 + 5 \cdot 3000}{60 + 8(50 - 32)} = \frac{5(60 \cdot 50 + 3000)}{60 + 5 \cdot 18} = \frac{5 \cdot 6000}{60 + 90}$$

$$= \frac{30000}{150} = \frac{3000}{15} = 200 \text{ Wspl.}$$

26) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Wein, den Anker für 16 thlr., verkauft davon 36 mal weniger, als er Thaler gewinnt, den Anker 10 mal wohlfeiler, als er Anker gekauft hat, das Übrige aber den Anker für 60 mal wohlfeiler, als er Thaler gewonnen hat. Hätte er zu dem letztern Preise alles verkauft, so hätte er 8 mal mehr Thaler gewonnen, als er Anker gekauft hat. Wie viel Anker waren es? wie viel hat er wirklich gewonnen?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{y}{u}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{y}{u}$	$\frac{y}{v}$	y	tx

Erste Gleichung.

$$xb+tx=\frac{xy}{v},$$

oder $xbv+vtx=xy.$

Mit x dividirt, kommt

$$bv+vt=y,$$

oder $$v(b+t)=y.$$

Zweite Gleichung.

$$xb+y=\frac{xy}{uq}+\frac{xy}{v}-\frac{y^2}{vu},$$

also $xbuqv+yuqv=xyv+xyuq-y^2q,$

oder $xbuqv=xyv+xyuq-yuqv-y^2q,$

oder $xbuqv=y(xv+xuq-uqv-yq).$

Man setze in dieser Gleichung statt y den gefundenen Werth, so kommt

$$xbuqv=v(b+t)[xv+xuq-uqv-qv(b+t)].$$

Man multiplizire in der Klammer wirklich die Glieder, welche x enthalten, so kommt

$$xbuqv=xv^2(b+t)+xuqv(b+t)-v(b+t)[uqv+qv(b+t)].$$

Also

$$v(b+t)[uqv+qv(b+t)]=xv^2(b+t)+xuqv(b+t)-xbuqv,$$

oder

$$v(b+t)[qv(u+b+t)]=x[v^2(b+t)+uqv(b+t-b)],$$

oder

$$v(b+t)[qv(u+b+t)]=x[v^2(b+t)+uqvt],$$

also $\frac{v(b+t)[qv(u+b+t)]}{v^2(b+t)+uqvt} = x$,

oder $\frac{(b+t)[qv(u+b+t)]}{v(b+t)+uqt} = x$.

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$y = 60(16+8) = 60.24 = 1440$ thlr.

$x = \frac{(16+8)[10.60(36+16+8)}{60(16+8)+36.10.8} = \frac{24.600.60}{60.24+2880}$

$= \frac{600.60}{60+120} = \frac{600}{1+2} = 200$ Anker.

Es hat also derselbe gekauft 200 Anker, den Anker zu 16 thlr., davon hat er, weil er 1440 thlr. gewinnt, $\frac{1440}{36} = 40$ Anker zu $\frac{200}{10} = 20$ thlr. den Anker verkauft, die übrigen 160 Anker aber den Anker zu $\frac{1440}{60} = 24$ thlr. Berechnet man nun alles, so findet man den wirklichen Gewinn $= 1440$, den möglichen $= 1600 = 8.200$.

27) Exempel zu Nr. 81.

Es kauft jemand Kaffee, den Zentner zu 20 thlr., verkauft davon 40 Ztn. für einen gewissen Preis, das übrige den Zentner für 8 mal weniger Thaler als er Zentner gekauft hat, gewinnt so 12 mal so viel, als er Zentner gekauft hat, hätte aber 2000 thlr. gewonnen, wenn alles für den letztern Preis verkauft worden wäre. Wie viel Kaffee war es und wie theuer verkaufte er den ersten Theil?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	c	y	x − c	$\frac{x}{r}$	sx	g

Erste Gleichung.

$xb+g = \frac{x^2}{r}$,

also $rxb+rg = x^2$,

oder $rg = x^2-xrb$.

Zweite Gleichung.

$xb+sx = cy+\frac{x^2}{r}-\frac{cx}{r}$,

also $xbr+xrs = rcy+x^2-cx$,

oder $rcy = x^2-cx-xbr-xrs$,

oder $rcy = x^2-x(c+br+rs)$,

Diese quadratischen Gleichungen finden im zweiten Theile ihre Auflösung.

28) Das Nebenexempel führt ebenfalls auf quadratische Gleichungen.

29) Exempel zu Nr. 83.

Es kauft jemand eine Partie Tuch, die Elle zu einem gewissen Preise, verkauft davon 150 Ellen, die Elle zu 3 thlr., das Übrige für 100 mal weniger Thaler die Elle, als er Ellen gekauft hat, gewinnt 650 thlr.; hätte aber 2 mal so viel Thaler gewonnen, als er Ellen gekauft hat, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Ellen? wie theuer eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Mögliche Gewinn.
x	y	c	d	$x-c$	$\frac{x}{r}$	f	tx

Erste Gleichung.

$$xy+tx=\frac{x^2}{r}.$$

Mit x dividirt, kommt

$$y+t=\frac{x}{r},$$

also $$ry+rt=x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy+f=cd+\frac{x^2}{r}-\frac{cx}{r},$$

also $$rxy+rf=rcd+x^2-cx,$$

oder $$rf-rcd=x^2-cx-xry,$$

oder $$r(f-cd)=x^2-x(c+ry).$$

Schreibt man für x den oben gefundenen Werth, so erhält man

$$r(f-cd)=r^2y^2+2r^2yt+r^2t^2-ryc-rct-r^2y^2-r^2yt.$$

Alles durch r dividirt, kommt

$$f-cd=ry^2+2ryt+rt^2-yc-ct-ry^2-ryt,$$

oder $$f-cd-rt^2+ct=2ryt-yc-ryt,$$

oder $$f-cd-t(rt-c)=ryt-yc,$$

oder $$f-cd-t(rt-c)=y(rt-c),$$

also $$\frac{f-cd}{rt-c}-\frac{t(rt-c)}{rt-c}=y,$$

oder $$\frac{f-cd}{rt-c}-t=y.$$

Da nun $x = ry + rt = r(y + t)$, so setze man statt y den gefundenen Werth, so kommt

$$x = r\left[\left(\frac{f - cd}{rt - c} - t\right) + t\right] = \frac{rf - rcd}{rt - c} - rt + rt$$
$$= \frac{r(f - cd)}{rt - c}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$$y = \frac{650 - 150 \cdot 3}{100 \cdot 2 - 150} - 2 = \frac{650 - 450}{200 - 150} - 2 = \frac{200}{50} - 2$$
$$= 4 - 2 = 2 \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{100(650 - 3 \cdot 150)}{100 \cdot 2 - 150} = \frac{100 \cdot 200}{200 - 150} = \frac{20000}{50}$$
$$= 400 \text{ Ellen.}$$

Er hat also die Elle für 2 thlr. eingekauft, den Rest aber die Elle zu $\frac{200}{100} = 4$ thlr. verkauft, dabei 650 thlr. gewonnen; der mögliche Gewinn wäre aber 800 thlr. = 2.400 gewesen.

30) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Getreide, verkauft davon 4 mal so viel Wispel als ihm der Wispel Thaler kostet, $1\frac{1}{2}$ mal so theuer, als der Einkaufspreis, das Übrige den Wispel für 10 mal weniger Thaler, als er Wispel gekauft hat. Er gewinnt so 4600 thlr.; hätte aber 10 mal mehr Thaler gewonnen, als er Wispel gekauft hat, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Getreide war es? wie theuer der Scheffel eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	uy	vy	x − uy	$\frac{x}{r}$	f	tx

Erste Gleichung.

$$xy + tx = \frac{x^2}{r},$$

oder $$y + t = \frac{x}{r},$$

oder $$ry + rt = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + f = uvy^2 + \frac{x^2}{r} - \frac{uyx}{r},$$

oder $$rxy + rf = ruvy^2 + x^2 - uyx,$$
also $$rf - ruvy^2 = x^2 - uyx - rxy,$$
oder $$rf - ruvy^2 = x^2 - x(uy + ry).$$

Man setze statt x den gefundenen Werth, so kommt

$rf - ruvy^2 = r^2y^2 + 2r^2yt + r^2t^2 - ruy^2 - ruyt - r^2y^2 - r^2ty.$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, kommt

$rf - r^2t^2 = r^2y^2 - r^2y^2 + r^2ty + ruvy^2 - ruy^2 - ruyt,$

oder

$rf - r^2t^2 = y^2(ruv - ru) + y(r^2t - rut).$

Alles durch r dividirt, kommt

$$f - rt^2 = y^2(uv - u) + y(rt - ut),$$

oder $f - rt^2 = y^2u(v - 1) + yt(r - u).$

Eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile aufgelöst wird.

31) Exempel zu Nr. 87.

Es kauft jemand Kaffee, verkauft 40 Ztn., das Pfund für 8 gr., den Rest das Pfund für 10 gr., gewinnt so $16\frac{1}{2}$ mal so viel Thaler, als er Zentner gekauft hat, und hätte $18\frac{1}{2}$ mal so viel gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Zentner waren es? wie theuer das Pfund eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	c	d	x − c	e	sx	tx

Erste Gleichung.

$$xy + tx = xe.$$

Mit x dividirt, kommt

$$y + t = e,$$

also $y = e - t.$

Zweite Gleichung.

$$xy + sx = cd + xe - ce.$$

Man setze statt y den Werth, so kommt

$$x(e - t) + sx = cd + xe - ce,$$

also $ce - cd = xe - x(e - t) - sx,$

oder $ce - cd = x[e - (e - t) - s],$

oder $ce - cd = x(e - e + t - s),$

oder $c(e - d) = x(t - s),$

also $\frac{c(e - d)}{t - s} = x.$

Nach den Zahlen des Exempels ist also

$$x = \frac{40.110(\frac{5}{12}-\frac{1}{4})}{18\frac{1}{3}-16\frac{1}{2}} = \frac{40.110.\frac{1}{12}}{1\frac{5}{6}} = \frac{20.110.\frac{1}{12}}{\frac{11}{6}}$$

$$= \frac{40.110.6}{11.12} = \frac{40.10}{2} = 200 \text{ Ztn.}$$

$$y = \frac{5}{12} - \frac{18\frac{1}{3}}{110} = \frac{5}{12} - \frac{55}{3.110} = \frac{5}{12} - \frac{55}{330} = \frac{5}{12} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ thlr.}$$

Es ist nämlich t zwar $= 18\frac{1}{3}$, aber in Beziehung auf Zentner, da nun e der Preis von einem Pfunde ist, so muß t auch auf das Verhältniß zum Pfunde gebracht, d. h. noch durch 110 dividirt werden, wenn y richtig kommen soll. In dem Werthe für x aber, wo Zentner kommen sollen, brauchte dies nicht zu geschehen.

32) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kaufte jemand Getreide, verkaufte davon 3 mal so viel, als der Einkaufspreis für den Wispel betrug und bekam für den Wispel $1\frac{1}{3}$ mal so viel als der Einkaufspreis. Das Übrige verkaufte er den Wispel für 48 thlr., gewann so $15\frac{9}{17}$ mal so viel als er Wispel gekauft hatte; hätte aber 16 mal so viel gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Getreide war es? wie theuer der Wispel eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	uy	vy	x—uy	e	sx	tx

Erste Gleichung.

$$xy + tx = xe,$$

also $y + t = e,$

folglich $y = e - t.$

Zweite Gleichung.

$$xy + sx = uvy^2 + xe - euy.$$

Man bringe die Glieder mit y auf Eine Seite, so kommt

$$sx - xe = uvy^2 - xy - euy,$$

oder $sx - xe = uvy^2 - y(x + eu).$

Nun setze man für y den gefundenen Werth, so erhält man

$$sx - xe = uv(e-t)^2 - (e-t)(x + eu),$$

oder $sx - xe = uv(e-t)^2 - (e-t)x - (e-t)eu,$

$$\text{alſo } (e-t)x+sx-xe = sv(e-t)^2-(e-t)su,$$
$$\text{oder } (e-t+s-e)x = s(e-t)^2-(e-t)^2,$$
$$\text{oder } (s-t)x = s(e-t)^2-(e-t)^2,$$
$$\text{folglich } x = \frac{s(e-t)^2-(e-t)^2}{s-t}.$$

Nach den Zahlen des Exempels iſt alſo

$$y = e-t = 48-16 = 32 \text{ thlr.}$$
$$x = \frac{3(48-16)^2-(48-16)^2}{15\frac{9}{25}-16} = \frac{2.32.(32-48)}{-\frac{16}{25}}$$
$$= \frac{96.(\frac{128}{5}-\frac{144}{5})}{-\frac{16}{25}} = \frac{96.-\frac{16}{5}}{-\frac{16}{25}} = \frac{-32.16.25}{-16}$$
$$= 32.25 = 800 \text{ Wſpl.}$$

Es wurden alſo 800 Wſpl. eingekauft, der Wſpl zu 32 thlr., davon $3.32 = 96$ Wſpl. à $1\frac{1}{3}.32$ thlr. $= 42\frac{2}{3}$ thlr. und der Reſt 704 Wſpl. à 48 thlr. verkauft. Die Ausgabe iſt alſo 25600 thlr., die erſte Einnahme $= 4096$ thlr., die zweite Einnahme $= 33792$ thlr., alſo ganze Einnahme $= 37888$, folglich der Gewinn $= 12288$ thlr. und dieſer $= 800.15\frac{9}{25}$. Die mögliche Einnahme iſt 38400 thlr., der mögliche Gewinn $= 12800$ thlr. und dieſer $= 800.16$.

33) Exempel zu Nr. 91.

Es kauft jemand eine Partie Tuch, bezahlt für die Elle 200 mal weniger Thaler, als er Ellen gekauft hat, verkauft davon $\frac{1}{3}$ zu einem Preiſe, der 180 mal weniger iſt, als die Anzahl der Ellen, wie theuer muß er vom Reſte die Elle verkaufen, wenn er 450 thlr. gewinnen will, und wie viel Ellen hatte er eingekauft? Man weiß, daß er 600 thlr. gewonnen hätte, wenn er alles für den Preis des Reſtes hätte verkaufen können.

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Reſt der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	y	f	g

Erſte Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+g = xy,$$
$$\text{folglich } x^2+mg = mxy,$$
$$\text{alſo } mg = mxy-x^2,$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{x^2}{pq} + xy - \frac{xy}{p},$$

also $pqx^2 + mpqf = mx^2 + mpqxy - mqxy,$
folglich $mpqf = mx^2 - pqx^2 + mpqxy - mqxy,$
oder $mpqf = x^2(m - pq) + xmqy(p - 1).$

Beide quadratische Gleichungen werden im zweiten Theile aufgelöst.

34) Auch die Nebenfälle geben quadratische Gleichungen, so wie die Fälle bis Nr. 99., daher wir sie jetzt alle übergehen.

35) Exempel zu Nr. 100.

Es kauft jemand eine Partie Kaffee, und bezahlt den Zentner mit 12 mal weniger Thaler, als er Zentner gekauft hat, verkauft davon $\frac{2}{3}$, den Zentner für einen gewissen Preis, das Übrige aber den Zentner für 40 thlr., gewinnt so $3833\frac{1}{3}$ thlr., hätte aber 15 mal mehr Thaler gewonnen, als er Zentner gekauft hat, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Zentner waren es? wie theuer hat er den Rest verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	e	f	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = xe,$$

oder $x^2 + mtx = mxe,$
oder $x + mt = me,$
also $x = me - mt,$
oder $x = m(e - t).$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{xy}{p} + xe - \frac{xe}{p},$$

also $px^2 + mpf = mxy + mpxe - mxe,$
oder $mpf = mxy + mpxe - px^2 - mxe,$
oder $mpf = x(my + mpe - me) - px^2,$
$= x[m(y + e(p - 1)] - px^2.$

Man setze statt x den gefundenen Werth, so kommt
$mpf = m(e - t)[m(y + e(p - 1)] - m^2p(e - t)^2.$

Mit m dividirt, kommt

$$pf = (e-t)[m(y+e(p-1)]-mp(e-t)^2.$$

Die Klammer, wo es nöthig iſt, aufgelöſt, kommt

$$pf = (e-t)[my+me(p-1)]-mp(e-t)^2,$$

oder $$pf = my(e-t)+me(p-1)(e-t)-mp(e-t)(e-t),$$

alſo $$-my(e-t) = me(p-1)(e-t)-pf-mp(e-t)(e-t),$$

oder $$my(e-t) = -me(p-1)(e-t)+pf+mp(e-t)(e-t),$$

alſo $$my(e-t) = pf+(e-t)[mp(e-t)-me(p-1)],$$

oder $$my(e-t) = pf+(e-t)m[p(e-t)-e(p-1)],$$

alſo $$y = \frac{pf+m(e-t)[p(e-t)-e(p-1)]}{m(e-t)},$$

oder $$y = \frac{m(e-t)[p(e-t)-e(p-1)]}{m(e-t)}+\frac{pf}{m(e-t)}$$

$$= p(e-t)-e(p-1)+\frac{pf}{m(e-t)}$$

$$= pe-pt-ep+e+\frac{pf}{m(e-t)}$$

$$= e-pt+\frac{pf}{m(e-t)}.$$

In den Zahlen des Exempels iſt alſo

$$x = 12(40-15) = 12.25 = 300 \text{ Ztn.}$$

$$y = 40-\tfrac{9}{2}.15+\frac{\frac{9}{2}.\frac{11500}{3}}{12(40-15)} = \tfrac{80}{2}-\tfrac{135}{2}+\tfrac{17250}{12.25}$$

$$= -\tfrac{55}{2}+\tfrac{17250}{300} = -\tfrac{55}{2}+\tfrac{115}{2} = \tfrac{60}{2} = 30 \text{ thlr.}$$

36) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Getreide, und bezahlt den Wiſpel mit 8 mal weniger Thaler, als er Wiſpel gekauft hat, verkauft von dem Getreide $\frac{3}{10}$ für einen gewiſſen Preis, das übrige aber $1\frac{2}{3}$ mal theurer und gewinnt ſo $184\frac{8}{9}$ mal mehr als er den Wiſpel vom erſten Theile verkaufte, hätte aber 35 mal ſo viel gewonnen, als er Wiſpel gekauft hat, wenn er alles für den Preis des Reſtes verkauft hätte. Wie viel Getreide war es? wie theuer hat er den Wiſpel vom erſten Theile verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Reſt der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	uy	wy	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = xuy,$$

also $x^2 + mtx = mxuy,$
oder $x + mt = muy,$
folglich $x = muy - mt,$
$= m(uy - t).$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = \frac{xy}{p} + xuy - \frac{xuy}{p},$$

also $px^2 + mpwy = mxy + mpxuy - mxuy,$
oder $mpwy = -px^2 + mxy + mpxuy - mxuy,$
oder $mpwy = -px^2 + x(my + mpuy - muy),$
oder $mpwy = -px^2 + xmy[1 + u(p-1)].$

Setzt man nun statt x den gefundenen Werth, so erhält man

$mpwy = -pm^2(uy-t)^2 + m^2y(uy-t)[(1+u(p-1)],$
oder
$mpwy = -pm^2u^2y^2 + pm^2 2uty - pm^2t^2 + (m^2uy^2 - m^2yt)[(1+u(p-1)],$
oder
$mpwy + pm^2t^2 = -pm^2u^2y^2 + 2pm^2uty + m^2uy^2 - m^2u^2y^2 + m^2u^2py^2 - m^2yt + m^2uyt - m^2upyt.$

Es hebt sich $-pm^2u^2y^2$ mit $+m^2u^2py^2$ und $+2pm^2uty$ mit $-m^2upyt$ gibt $+pm^2uty$. Folglich ist

$mpwy + pm^2t^2 = m^2uy^2 - m^2u^2y^2 + pm^2uty - m^2yt + m^2uyt.$

Alles durch m^2 dividirt, kommt

$$\frac{pwy}{m} + pt^2 = uy^2 - u^2y^2 + puty - yt + uyt.$$

Folglich
$$pt^2 = y^2u(1-u) + y\left(put + ut - t - \frac{pw}{m}\right)$$
$$= y^2u(1-u) + y\left[t(pu+u-1) - \frac{pw}{m}\right]$$
$$= y^2u(1-u) + y\left[t[u(p+1)-1] - \frac{pw}{m}\right].$$

Eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile aufgelöst wird.

37) Exempel zu Nr. 103.

Es kauft jemand eine Partie Tuch, die Elle für 100 mal weniger Thaler, als er Ellen gekauft hat, verkauft davon einen Theil, die Elle für 80 mal weniger, als er Ellen ge-

kauft hat, den Rest aber für 64 mal weniger, gewinnt so 1200 thlr.; hätte aber 1600 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Ellen betrug das Ganze und der erste Theil?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x − y	$\frac{x}{r}$	f	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = \frac{x^2}{r},$$

also $rx^2 + rmg = mx^2$,

$rmg = mx^2 - rx^2$,

oder $rmg = x^2(m-r)$,

folglich $\frac{rmg}{m-r} = x^2$.

Zwar eine quadratische Gleichung; man sieht aber leicht, daß x gefunden werde, wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel zieht, also

$$x = \sqrt{\frac{rmg}{m-r}}.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{xy}{q} + \frac{x^2}{r} - \frac{xy}{r},$$

also $qrx^2 + mqrf = mrxy + mqx^2 - mqxy$,

oder $mqrf = mqx^2 - qrx^2 + mrxy - mqxy$,

oder $mqrf = x^2(mq - qr) + x(mry - mqy)$,

oder $mqrf = x^2q(m-r) + xmy(r-q)$.

Setzt man nun statt x^2 und statt x den gefundenen Werth, so erhält man eine Gleichung für y in lauter bekannten Größen.

Also $mqrf = \frac{rmgq}{m-r}(m-r) + my(r-q)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}$,

oder $mqrf = rmgq + my(r-q)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}$,

oder $qrf - rgq = y(r-q)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}$,

oder $rq(f-g) = y(r-q)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}$,

also

$$\frac{rq(f-g)}{(r-q)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}} = y.$$

Im Exempel ist $m = 100$, $q = 80$, $r = 64$, $f = 1200$, $g = 1600$, also

$$x = \sqrt{\frac{64.100.1600}{100-64}} = \sqrt{\frac{64.100.1600}{36}}$$

$$= \frac{\sqrt{64}\sqrt{100}\sqrt{1600}}{\sqrt{36}} = \frac{8.10.40}{6} = \frac{3200}{6}$$

$$= 533\tfrac{1}{3} \text{ Ellen.}$$

$$y = \frac{64.80(1200-1600)}{(64-80)\sqrt{\frac{64.100.1600}{100-64}}} = \frac{64.80.-400}{-16.\frac{1600}{3}}$$

$$= \frac{-64.80.400.3}{-16.1600} = \frac{64.80.400.3}{16.1600}$$

$$= \frac{4.80.3}{4} = 240 \text{ Ellen.}$$

Es sind also $533\frac{1}{3}$ Elle, die Elle für $\frac{533\frac{1}{3}}{100} = 5\frac{1}{3}$ thlr. eingekauft und 240 Ellen, die Elle für $\frac{533\frac{1}{3}}{80} = 6\frac{2}{3}$ thlr., der Rest aber die Elle für $\frac{533\frac{1}{3}}{64} = 8\frac{1}{3}$ thlr. verkauft worden. Dabei hat der Verkäufer einen Gewinn von 1200 thlr. gemacht, würde aber 1600 thlr. gewonnen haben, wenn er alles Tuch zu $8\frac{1}{3}$ thlr. verkauft hätte.

Damit $\sqrt{\frac{mrg}{m-r}}$ nicht eine Irrationalzahl werde, muß man die Zahlen m, r, g so wählen, daß der ganze Quotient ein vollkommnes Quadrat sei. Dies ist theils der Fall, wenn m, r, g selbst und auch die Differenz $m-r$ vollkommne Quadrate sind, theils wenn der Quotient, nachdem man m, r, g durch $m-r$ dividirt hat, ein vollkommnes Quadrat wird. Ist z. B. $m = 50$, $r = 33\frac{1}{3}$, $g = 1600$, so sind m und r keine vollständigen Quadrate, auch nicht die Differenz $m-r = 50-33\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3} = \frac{50}{3}$, aber der Quotient $\frac{50.33\frac{1}{3}.1600}{16\frac{2}{3}} = \frac{50.100.1600}{\frac{50}{3}} = \frac{50.100.1600}{3} \cdot \frac{3}{50} = 100.1600$ ist ein vollständiges Quadrat und also $\sqrt{\frac{mrg}{m-r}}$ eine Rationalzahl.

38) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Wein, den Anker für 10 mal weniger Thaler, als er Anker gekauft hat, verkauft davon einen Theil, den Anker für 8 mal, vom Reste aber den Anker für 6 mal weniger Thaler als er Anker gekauft hat. Er gewinnt so 19 mal mehr Thaler, als die erste Partie, die er verkaufte,

Anker in sich faßte, und hätte 24 mal mehr gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Anker waren es? wie viel hat er zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	wy	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = \frac{x^2}{r},$$

also $rx^2 + mrzy = mx^2,$

oder $mrzy = mx^2 - rx^2,$

folglich $\frac{mrzy}{m-r} = x^2,$

also $x = \sqrt{\frac{mrzy}{m-r}}.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = \frac{xy}{q} + \frac{x^2}{r} - \frac{xy}{r},$$

also $qrx^2 + mqrwy = mrxy + mqx^2 - mqxy,$

oder $mqrwy = mqx^2 - qrx^2 + mrxy - mqxy,$

oder $mqrwy = x^2q(m-r) + xmy(r-q).$

Setzt man nun den Werth für x^2 und für x statt x^2 und x in diese Gleichung, so kommt

$$mqrwy = \frac{mrzyq}{m-r}(m-r) + my(r-q)\sqrt{\frac{mrzy}{m-r}},$$

oder $mqrwy = mrzqy + my(r-q)\sqrt{\frac{mrzy}{m-r}},$

oder $mqrwy - mrzqy = my(r-q)\sqrt{\frac{mrzy}{m-r}},$

oder $mqry(w-z) = my(r-q)\sqrt{\frac{mrzy}{m-r}},$

Jetzt muß man auf beiden Seiten quadriren, um das Wurzelzeichen wegzuschaffen. Dies gibt

$$m^2q^2r^2y^2(w-z)^2 = m^2y^2(r-q)^2\frac{mrzy}{m-r}.$$

Alle Glieder durch m^2y^2r dividirt, gibt

$$q^2r(w-z)^2 = (r-q)^2 \cdot \frac{mrzy}{m-r}$$

und mit $m-r$ multiplizirt, kommt

$$q^2r(w-z)^2(m-r) = (r-q)^2 mzy.$$

Also ist $\frac{q^2r(w-z)^2(m-r)}{(r-q)^2 mz} = y.$

Hätte man die ursprünglich erste und zweite Gleichung von einander abgezogen, so wäre die Auflösung etwas kürzer geworden.

Erste Gleichung $\frac{x^2}{m} + zy = \frac{x^2}{r}.$

Zweite Gleich. negativ $-\frac{x^2}{m} - wy = -\frac{xy}{q} - \frac{x^2}{r} + \frac{xy}{r}$

Summe $zy - wy = \frac{xy}{r} - \frac{x^2}{q},$

oder $qrzy - qrwy = qxy - rxy,$

oder $qry(z-w) = xy(q-r).$

Mit y auf beiden Seiten dividirt, kommt

$$qr(z-w) = x(q-r),$$

also $\frac{qr(z-w)}{q-r} = x.$

Nun hätte man aus der ersten Gleichung erhalten $\frac{mrzy}{m-r} = x^2$ und wenn man nun den gegenwärtigen Werth von x quadrirt, so erhält man $x^2 = \frac{q^2r^2(z-w)^2}{(q-r)^2}.$ Folglich ist

$$\frac{mrzy}{m-r} = \frac{q^2r^2(z-w)^2}{(q-r)^2}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$mrzy(q-r)^2 = q^2r^2(z-w)^2(m-r).$$

Mit r dividirt, erhält man

$$mzy(q-r)^2 = q^2r(z-w)^2(m-r).$$

Also $y = \frac{q^2r(z-w)^2(m-r)}{mz(q-r)^2}.$

Dieser Werth ist mit dem obigen ganz einerlei, denn $\frac{z-w}{q-r}$ ist $= \frac{w-z}{r-q}.$

Im Exempel ist $m = 10$, $r = 6$, $q = 8$, $w = 19$, $z = 24$. Also

$$y = \frac{(10-6).8^2.6(19-24)^2}{(6-8)^2.10.24} = \frac{4.64.6.25}{4.10.24} = 40.$$

$$x = \sqrt{\frac{10.6.24.40}{10-6}} = \sqrt{\frac{10.6.24.40}{4}} = \sqrt{10.6.6.40}$$

$$= \sqrt{36.400} = \sqrt{36}.\sqrt{400} = 6.20 = 120.$$

Es sind also 120 Anker gekauft worden, der Anker für 12 thlr. $= \frac{1}{120}$; zuerst wurden verkauft 40 Anker à 15 thlr. $= \frac{1}{80}$, dann 80 Anker à 20 thlr. $= \frac{1}{60}$. Dabei wurden gewonnen 760 thlr. $= 19 \cdot 40$ und der mögliche Gewinn wäre $= 960$ thlr. $= 24 \cdot 40$ gewesen.

39) Exempel zu Nr. 107.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel für 8 mal weniger, als er Wispel gekauft hat, verkauft davon 80 Wispel, den Wispel für 6 mal weniger, als er Wispel gekauft hat, den Rest aber so, daß er $18\frac{1}{3}$ mal mehr Thaler gewinnt, als er Wispel kaufte. Hätte er nun alles für den Preis des Restes verkauft, so hätte er 6400 thlr. gewonnen. Wie viel Wispel waren es? wie theuer wurde der Rest verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	$x - c$	y	sx	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = xy,$$

also $\quad x^2 + mg = mxy,$

folglich $\quad mg = mxy - x^2.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + sx = \frac{cx}{q} + xy - cy,$$

also $\quad qx^2 + mqsx = mcx + mqxy - mqcy,$

oder $\quad qx^2 + mqsx - mcx - mqyx = -mqcy,$

oder $\quad qx^2 + x(mqs - mc - mqy) = -mqcy,$

oder $\quad qx^2 + xm(qs - c - qy) = -mqcy.$

Beides quadratische Gleichungen, die im zweiten Theile ihre Auflösung finden.

Die Exempel für die Nebenfälle kommen ebenfalls quadratisch.

40) Exempel zu Nr. 111.

Es kauft jemand Kaffee, das Pfund für 80 mal weniger Groschen, als er Zentner gekauft hat, verkauft davon 120 Ztn., das Pfund für 60 mal weniger Groschen, als er Zentner gekauft hat, das Übrige aber das Pfund für 12 gr. Wie viel gewinnt er bei diesem Handel, wenn er $27\frac{1}{2}$ mal so viel gewinnt, als er Zentner gekauft hat, im Fall er das Pfund für

den

den Preis des Restes verkauft hätte, und wie viel Zentner hat er eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	x — c	e	y	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = xe,$$

also $x^2 + mtx = mxe.$

Mit x dividirt, kommt

$$x + mt = me,$$

also $$x = me - mt$$
$$= m(e - t).$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + y = \frac{cx}{q} + xe - ce,$$

also $$qx^2 + mqy = mcx + mqxe - mqce,$$

oder $$mqy + mqce = -qx^2 + mcx + mqxe,$$

oder $$mqy + mqce = -x^2q + x(mc + mqe)$$
$$= -x^2q + xm(c + qe).$$

Nun setze man statt x den gefundenen Werth, so kommt

$$mqy + mqce = -qm^2(e-t)^2 + m^2(e-t)(c+qe).$$

Mit m alles dividirt, kommt

$$qy + qce = -qm(e-t)^2 + m(e-t)(c+qe),$$

oder $$qy = m(e-t)(c+qe) - qce - qm(e-t)^2,$$

oder $$qy = m(c+qe)(e-t) - qm(e-t)(e-t) - qce,$$

oder $$qy = [(m(c+qe) - qm(e-t)](e-t) - qce,$$

oder $$qy = [(c+qe) - q(e-t)]m(e-t) - qce,$$

also $$y = \frac{[(c+qe) - q(e-t)]m(e-t) - qce}{q},$$

also $$y = \frac{[(c+qe) - q(e-t)]m(e-t)}{q} - ce.$$

Nach den Zahlen des Exempels und den Bemerkungen zu Nr. 14. ist $m = \frac{80 \cdot 24}{110}$ und $q = \frac{60 \cdot 24}{110}$, in so fern die x Ztn. durch m oder q dividirt werden. Den Preis des Pfundes vom Reste verwandle man ebenfalls in den Preis vom Zentner und setze also $\frac{12 \cdot 110}{24}$ thlr. = 55 thlr. statt der gegebenen 12 gr., so wird sein

$x = \frac{80 \cdot 24}{110}(55 - 27\frac{1}{2}) = \frac{80 \cdot 24}{110} \cdot \frac{55}{2} = \frac{1^{8}2}{11} \cdot \frac{55}{2} = 96 \cdot 5$
$= 480$ Ztn.

$y = \frac{\left[(120 + \frac{60 \cdot 24}{110} \cdot 55) - \frac{60 \cdot 24}{110}(55 - \frac{55}{2})\right] \frac{80 \cdot 24}{110}(55 - \frac{55}{2})}{\frac{60 \cdot 24}{110}} - 120 \cdot 55$

$= \frac{(120 + 6 \cdot 24 \cdot 5 - \frac{6 \cdot 24}{11} \cdot \frac{55}{2}) \frac{2 \cdot 24}{11} \cdot \frac{55}{2}}{\frac{60 \cdot 24}{110}} - 120 \cdot 55$

$= \frac{(840 - 3 \cdot 24 \cdot 5) \cdot 4 \cdot 24 \cdot 5}{6 \cdot 24} - 120 \cdot 55$
11

$= \frac{(840 - 360) \cdot 480}{6 \cdot 24} - 6600 = \frac{480 \cdot 480}{6 \cdot 24} - 6600$
11

$= 480 \cdot 480 \cdot \frac{11}{6 \cdot 24} - 6600 = 20 \cdot 80 \cdot 11 - 6600$
$= 17600 - 6600 = 11000$ thlr.

Es ſind alſo 480 Ztn. das Pfund für $\frac{480}{80}$ gr. $= 6$ gr. eingekauft, davon 120 Ztn. das Pfund für $\frac{480}{60}$ gr. $= 8$ gr., die übrigen 360 Ztn. aber das Pfund für 12 gr. verkauft worden. Dabei beträgt denn der wirkliche Gewinn 11000 thlr., der mögliche aber 13200 thlr. und dieſer iſt $27\frac{1}{2}$ mal größer als 480 Ztn.

41) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Band, bezahlt die Elle mit 300 mal weniger Groſchen, als er Ellen gekauft hat, verkauft davon zuerſt 3 mal mehr Ellen, als er Thaler gewonnen hat, ſo, daß die Elle 280 mal weniger Groſchen koſtet, als er Ellen kaufte, den Reſt aber verkauft er ſo, daß die Elle 20 mal weniger Groſchen koſtet, als er Thaler gewonnen hat. Es iſt die Frage: wie viel Ellen waren es, und wie viel hat er gewonnen, wenn man weiß, daß er $\frac{1}{8}$ mal ſo viel Thaler, als er Ellen kaufte, gewonnen haben würde, wenn er alles zu dem letztern Preiſe verkauft hätte?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Reſt der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	uy	$\frac{x}{q}$	x—uy	$\frac{y}{v}$	y	tx

Erſte Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = \frac{xy}{v},$$

alſo $vx^2 + mvtx = mxy.$

Mit x dividirt, kommt

$$vx + mvt = my,$$

also $vx = my - mvt,$

folglich $x = \frac{m(y-vt)}{v}.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + y = \frac{uyx}{q} + \frac{xy}{v} - \frac{uy^2}{v},$$

also $qvx^2 + mgvy = mvuyx + mqxy - mquy^2,$

oder $qvx^2 - mvuyx - mqxy = -mqvy - mquy^2,$

also $x^2qv - x(mvuy + mqy) = -mqvy - mquy^2.$

Setzt man nun den für x gefundenen Werth statt x in die Gleichung, so kommt

$$\frac{qvm^2(y-vt)^2}{v^2} - \frac{m(y-vt)}{v}(mvuy + mqy) = -mqvy - mquy^2.$$

Alles auf den Nenner v gebracht, kommt

$$qm^2(y-vt)^2 - m(y-vt)(mvuy + mqy) = -mqv^2y - mqvuy^2.$$

Alle Glieder durch m dividirt, gibt

$$qm(y-vt)^2 - (y-vt)(mvuy + mqy) = -qv^2y - qvuy^2.$$

Das Quadrat von $y - vt$ ist $= y^2 - 2yvt + v^2t^2.$ Schafft man also die Klammern weg, so kommt

$$qmy^2 - 2qmyvt + qmv^2t^2 - (mvuy^2 + mqy^2 - mv^2uty - mqvty) = -qv^2y - qvuy^2,$$

oder $qmy^2 - 2qmyvt + qmv^2t^2 - mvuy^2 - mqy^2 + mv^2uty + mqvty = -qv^2y - qvuy^2.$

Hier hebt sich $+qmy^2$ mit $-mqy^2$ und $-2qmvty$ gibt mit $+qmvty$ zusammen $-qmvty$, also kommt, wenn man zugleich alle Glieder mit y auf Eine Seite bringt,

$$qmv^2t^2 = mvuy^2 - qvuy^2 + qmvty - mv^2uty - qv^2y.$$

Alles durch v dividirt, gibt

$$qmvt^2 = muy^2 - quy^2 + qmty - mvuty - qvy,$$

oder $qmvt^2 = y^2u(m-q) + y[mt(q-vu) - qv].$

Diese quadratische Gleichung kann erst im zweiten Theile aufgelöst werden.

42) Exempel zu Nr. 112.

Es kauft jemand eine Partie Wein, den Anker für 5 mal weniger Thaler als er Anker kaufte, verkauft davon einen Theil, den Anker für 24 thlr., vom Übrigen den Anker für 4 mal weniger, als er Anker kaufte, gewinnt so $4\frac{1}{4}$ mal mehr Thaler, als die Zahl der Anker war und hätte 500 thlr. gewonnen, wenn er allen Wein zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Anker waren es? wie viel hat er zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x—y	$\frac{x}{r}$	sx	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+g=\frac{x^2}{r},$$

also $rx^2+rmg=mx^2,$

oder $rmg=mx^2-rx^2,$

oder $rmg=x^2(m-r),$

folglich $\frac{rmg}{m-r}=x^2,$

also $\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}=x.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+sx=yd+\frac{x^2}{r}-\frac{xy}{r},$$

also $rx^2+rmsx=rmyd+mx^2-mxy,$

oder $-rmyd=mx^2-rx^2-mxy-rmsx,$

oder $-rmyd=x^2(m-r)-x(my+rms).$

Man setze nun statt x^2 und x den oben gefundenen Werth, so kommt

$$-rmyd=rmg-(my+rms)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}},$$

oder $-rmyd-rmg=-(my+rms)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}.$

Alles durch m dividirt, kommt

$$-ryd-rg=-(y+rs)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}.$$

Man erhebe auf beiden Seiten zum Quadrate, um das Wurzelzeichen wegzuschaffen, so kommt

$$r^2y^2d^2+2r^2ydg+r^2g^2=(y^2+2yrs+r^2s^2)\frac{rmg}{m-r}.$$

Auf der rechten Seite wirklich multiplizirt, erhält man

$$r^2y^2d^2+2r^2ydg+r^2g^2=\frac{rmgy^2+2r^2mgsy+r^3s^2mg}{m-r}.$$

Alle Glieder durch r dividirt, erhält man

$$ry^2d^2+2rydg+rg^2=\frac{mgy^2+2rmgsy+r^2s^2mg}{m-r}.$$

Bringt man nun alle Glieder auf einerlei Nenner, indem man links mit m — r multiplizirt, so kommt

$$rmy^2d^2 + 2rmydg + rmg^2 - r^2y^2d^2 - 2r^2ydg - r^2g^2 = mgy^2 + 2rmgsy + r^2s^2mg.$$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, kommt

$$rmg^2 - r^2g^2 - r^2s^2mg = mgy^2 - rmd^2y^2 + r^2d^2y^2 + 2r^2dgy - 2rmdgy + 2mrsgy.$$

Zieht man nun durch die Klammer zusammen, was sich zusammenziehen läßt, so erhält man

$$g(rmg - r^2s^2m - r^2g) = y^2(mg - rmd^2 + r^2d^2) + y(2r^2dg - 2rmdg + 2mrsg),$$

oder $$gr(mg - rs^2m - rg) = y^2(mg + rd^2(r - m) + y2rg(rd - md + ms),$$

oder $$gr[m(g - rs^2) - rg] = y^2(mg - rd^2(m - r) + y2rg(rd + m(s - d).$$

Diese quadratische Gleichung wird wieder erst im zweiten Theile aufgelöst. Eben so ist es auch mit dem Exempel zum Nebenfalle.

43) Exempel zu Nr. 116.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel für 12 mal weniger Thaler, als er Wispel gekauft hat, verkauft davon 80 Wspl. zu einem gewissen Preise, vom Reste aber den Wispel für 10 mal weniger Thaler, als er Wispel gekauft hat, gewinnt so 5680 thlr., hätte aber 10 mal mehr Thaler gewonnen, als die Zahl der gekauften Wispel beträgt, wenn er alles Getreide zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Wispel hat er gekauft? wie theuer den ersten Theil verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$,	c	y	x — c	$\frac{x}{r}$	f	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = \frac{x^2}{r},$$

also $$rx^2 + rmtx = mx^2.$$

Mit x dividirt, kommt

$$rx + rmt = mx,$$

also $$rmt = mx - rx,$$

$$= x(m - r),$$

folglich $$\frac{rmt}{m - r} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = cy + \frac{x^2}{r} - \frac{xc}{r},$$

also $rx^2 + mrf = mrcy + mx^2 - mxc,$

oder $mrf - mrcy = mx^2 - rx^2 - mxc,$

oder $mrf - mrcy = x^2(m-r) - xmc.$

Setzt man obigen Werth für x, so kommt

$$mrf - mrcy = \frac{r^2m^2t^2}{(m-r)^2}(m-r) - \frac{rmt}{m-r}mc,$$

oder $$mrf - mrcy = \frac{r^2m^2t^2}{m-r} - \frac{rm^2ct}{m-r}.$$

Alles durch mr dividirt, kommt

$$f - cy = \frac{rmt^2}{m-r} - \frac{mct}{m-r}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$f(m-r) - cy(m-r) = rmt^2 - mct,$$

oder $$-cy(m-r) = mt(rt-c) - f(m-r).$$

Mit -1 alle Glieder multiplizirt, erhält man,

$$cy(m-r) = f(m-r) - mt(rt-c),$$

also $$y = \frac{f}{c} - \frac{mt(rt-c)}{c(m-r)}.$$

Im Exempel ist $m = 12$, $r = 10$, $t = 10$, $c = 80$.

Also $x = \frac{10 \cdot 12 \cdot 10}{12-10} = \frac{1200}{2} = 600$ Wspl.

$$y = \frac{5680}{80} - \frac{12.10(10.10-80)}{80(12-10)} = 71 - \frac{120 \cdot 70}{160}$$

$$= 71 - 15 = 56 \text{ thlr.}$$

Er hat also vom ersten Theil der Waare für den Wispel 56 thlr. bekommen, eingekauft hat er den Wispel zu $\frac{600}{12}$ thlr. $= 50$ thlr. und den Rest verkauft zu $\frac{600}{10}$ thlr. $= 60$ thlr. Der mögliche Gewinn beträgt bei diesem Handel 6000 thlr. $= 600.10$ thlr.

44) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand eine Partie Tuch, die Elle für 100 mal weniger Thaler, als er Ellen kaufte, verkauft davon einen Theil, nämlich 40 mal so viel Ellen, als er für die Elle Thaler bekommt, vom Übrigen die Elle für 80 mal weniger, als er Ellen gekauft hat, gewinnt so $66\frac{2}{3}$ mal so viel, als er beim ersten Verkaufe für die Elle bekam, hätte aber $\frac{3}{4}$ mal so viel gewonnen, als die Zahl aller Ellen beträgt, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es? wie theuer verkaufte er den ersten Theil?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	uy	y	x—uy	$\frac{x}{r}$	wy	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = \frac{x^2}{r},$$

also $rx^2 + mrtx = mx^2$.

Mit x dividirt, kommt

$$rx + mrt = mx,$$

also $$mrt = mx - rx,$$

folglich $$\frac{mrt}{m-r} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = uy^2 + \frac{x^2}{r} - \frac{uyx}{r},$$

also $rx^2 + rmwy = rmuy^2 + mx^2 - muyx$,

oder $rmwy - rmuy^2 = mx^2 - rx^2 - muyx$,

oder $rmwy - rmuy^2 = x^2(m-r) - muyx$.

Für x den Werth gesetzt, kommt

$$rmwy - rmuy^2 = \frac{(m^2r^2t^2}{(m-r)^2}(m-r) - \frac{m^2rtuy}{m-r},$$

oder $$rmwy - rmuy^2 = \frac{m^2r^2t^2}{m-r} - \frac{m^2rtuy}{m-r}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$rmwy(m-r) - rmuy^2(m-r) = m^2r^2t^2 - m^2rtuy.$$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, kommt

$$-m^2r^2t^2 = rmuy^2(m-r) - rmwy(m-r) - m^2rtuy.$$

Mit rm dividirt, kommt

$$-mrt^2 = uy^2(m-r) - wy(m-r) - mtuy.$$

Folglich

$$-mrt^2 = y^2u(m-r) - y(mtu + w(m-r).$$

Eine quadratische Gleichung, die wir auf den zweiten Theil verweisen müssen.

45) Exempel zu Nr. 118.

Es kauft jemand Kaffee, bezahlt den Zentner mit 20 mal weniger Thaler, als er Zentner gekauft hat, verkauft davon einen Theil, den Zentner für 40 thlr., das übrige den Zentner zu 45 thlr., gewinnt so $13\frac{1}{4}$ mal so viel, als er Zentner gekauft hat, würde aber 15 mal so viel, als die Zahl dieser

Zentner gewonnen haben, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Zentner waren es? wie viel verkaufte er zuerst?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	sx	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = xe,$$

oder $x^2 + mtx = mxe.$

Mit x dividirt, kommt

$$x + mt = me,$$

also $$x = me - mt,$$
$$= m(e - t).$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + sx = yd + xe - ye,$$

oder $x^2 + msx = myd + mxe - mye,$
oder $x^2 + msx - mxe = myd - mye,$
oder $x^2 + xm(s - e) = ym(d - e).$

Statt x den gefundenen Werth gesetzt, kommt

$$m^2(e - t)^2 + m(e - t)\,m(s - e) = ym(d - e).$$

Mit m dividirt, kommt

$$m(e - t)^2 + (e - t)\,m(s - e) = y(d - e),$$

oder $m(e - t)(e - t) + (e - t)\,m(s - e) = y(d - e),$
also $(e - t + s - e)\,m(e - t) = y(d - e),$
oder $(s - t)\,m(e - t) = y(d - e),$

folglich $$\frac{(s - t)\,m(e - t)}{d - e} = y.$$

Im Exempel ist $m = 20$, $d = 40$, $e = 45$, $s = 13\frac{3}{4}$, $t = 15$, also

$$x = 20(45 - 15) = 20 \cdot 30 = 600 \text{ Ztn.}$$

$$y = \frac{(13\frac{3}{4} - 15)\,20(45 - 40)}{40 - 45} = \frac{-\frac{5}{4} \cdot 20 \cdot 30}{-5} = \frac{\frac{5}{4} \cdot 20 \cdot 30}{5}$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150 \text{ Ztn.}$$

Es wurden also 600 Ztn. gekauft, der Zentner zu $\frac{600}{20}$ thlr. = 30 thlr., davon wurden 150 Ztn. à 40 thlr., und die übrigen

450 Stn. à 45 thlr., verkauft. Der Gewinn beträgt so 8250thlr. = 600 . $13\frac{3}{4}$ thlr. und der mögliche Gewinn 9000 thlr. = 600 . 15 thlr.

46) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Wein, den Anker für 10 mal weniger Thaler, als er Anker kaufte, verkauft davon einen Theil für 3 mal; den Rest aber für $2\frac{1}{2}$ mal weniger Thaler, als dieser Theil Anker enthielt, gewinnt so $3\frac{1}{3}$ mal so viel Thaler, als er Anker gekauft hat und würde 4 mal so viel als diese Anzahl der Anker gewonnen haben, wenn er allen Wein für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Anker betrug das Ganze? wie viel der zuerst verkaufte Theil?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	$\frac{y}{v}$	sx	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = \frac{xy}{v},$$

also $vx^2 + mvtx = mxy.$

Mit x dividirt, kommt

$$vx + mvt = my,$$

also $$vx = my - mvt,$$

folglich $$x = \frac{my - mvt}{v}.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + sx = \frac{y^2}{u} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v},$$

also $$vux^2 + muvsx = mvy^2 + muxy - muy^2,$$

oder $$vux^2 + muvsx - muxy = mvy^2 - muy^2,$$

oder $$vux^2 + x\,(mu\,(vs - y) = mvy^2 - muy^2.$$

Den Werth für x gesetzt, kommt

$$\frac{(my - mvt)^2}{v^2}\,vu + \frac{my - mvt}{v}\,(muvs - muy) = mvy^2 - muy^2,$$

oder

$$\frac{u\,(my - mvt)^2}{v} + \frac{my - mvt}{v}\,(muvs - muy) = mvy^2 - muy^2.$$

Alles auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$u\,(my - mvt)^2 + (my - mvt)\,(muvs - muy) = mv^2y^2 - muvy^2.$$

Wirklich quadrirt und die Klammern aufgelöſt, kommt

$u(m^2y^2 - 2m^2yvt + m^2v^2t^2) - m^2uvsy - m^2uy^2 - m^2v^2ut$
$+ m^2vuty = mv^2y^2 - muvy^2,$

oder

$um^2y^2 - 2um^2yvt + um^2v^2t^2 + m^2uvsy - m^2uy^2 - m^2v^2ut$
$+ m^2vuty = mv^2y^2 - muvy^2.$

Es hebt ſich $+um^2y^2$ mit $-m^2uy^2$ und $-2um^2yvt$ mit $+m^2vuty$ gibt zuſammen $-um^2vty$, alſo kommt

$um^2v^2t^2 - m^2v^2ut = um^2yvt - m^2uvsy + mv^2y^2 - muvy^2.$

Alles durch mv dividirt, kommt

$umvt^2 - mvust = umyt - musy + vy^2 - uy^2,$

oder $umvt(t-s) = yum(t-s) + y^2(v-u).$

Die Auflöſung dieſer quadratiſchen Gleichung folgt im zweiten Theile.

47) Exempel zu Nr. 124.

Es kauft jemand Getreide, verkauft davon den achten Theil, den Wiſpel für 12 mal weniger Thaler, als er Wiſpel gekauft hat, vom Reſte aber den Wiſpel für 50 thlr., gewinnt ſo $12\frac{1}{12}$ mal ſo viel Thaler, als er Wiſpel kaufte, hätte aber 3000 thlr. gewonnen, wenn er alles für den Preis des Reſtes verkauft hätte. Wie viel Wiſpel waren es? wie theuer hat er den Wiſpel eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Maaße.	Einkaufspreis.	Theil der Maaße.	Verkaufspreis.	Reſt der Maaße.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	sx	g

Erſte Gleichung.

$xy + g = xe,$

alſo $g = ye - xy$

$= y(e-y),$

folglich $\frac{g}{e-y} = x.$

Zweite Gleichung.

$xy + sx = \frac{x^2}{pq} + ex - \frac{ex}{p},$

alſo $pqxy + pqsx = x^2 + pqex - qex.$

Alles durch x dividirt, kommt

$pqy + pqs = x + pqe - qe,$

folglich $pqy + pqs - pqe + qe = x.$

Also $\frac{g}{e-y} = pqs - pqe + qe + pqy.$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$g = pqes - pqe^2 + qe^2 + pqey - pqsy + pqey - qey - pqy^2,$

oder $g - pqes + pqe^2 - qe^2 = 2pqey - pqsy - qey - pqy^2,$

oder $g - qe(ps - pe + e) = -y^2pq + yq(2pe - ps - e),$

oder $g - qe[p(s - e) + e] = -y^2pq + yq[p(2e - s) - e].$

Die weitere Auflösung dieser quadratischen Gleichung folgt im zweiten Theile.

Der Nebenfall gibt ebenfalls eine höhere Gleichung.

48) Exempel zu Nr. 128.

Von einer Partie Tuch kostet die Elle $2\frac{1}{4}$ thlr. beim Einkaufe, davon wird der dritte Theil die Elle für 100 mal weniger Thaler verkauft, als Ellen gekauft waren, wie theuer muß vom Reste die Elle verkauft werden, wenn 402 thlr. gewonnen werden. Man weiß, daß $1\frac{1}{4}$ mal mehr Thaler als die Zahl der gekauften Ellen beträgt, gewonnen worden wären, wenn alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Ellen waren es? wie theuer wurde vom Reste die Elle verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	y	f	tx

Erste Gleichung.

$$xb + tx = xy.$$

Mit x dividirt, kommt

$$b + t = y.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + f = \frac{x^2}{pq} + xy - \frac{xy}{p},$$

also $pqbx + pqf = x^2 + pqxy - qxy,$

oder $pqbx + pqf = x^2 + y(pqx - qx).$

Man setze statt y den gefundenen Werth, so kommt

$pqbx + pqf = x^2 + (b + t)pqx - (b + t)qx.$

Also $pqf = x^2 + (b + t)pqx - (b + t)qx - pqbx,$

oder $pqf = x^2 + x[(b + t)pq - (b + t)q - pqb],$

oder $pqf = x^2 + xq[(b + t)(p - 1) - pb].$

Diese quadratische Gleichung findet im zweiten Theile ihre Auflösung.

Der Nebenfall gibt auch eine höhere Gleichung.

49) Exempel zu Nr. 130.

Es kauft jemand Getreide, verkauft davon $\frac{2}{5}$, den Wispel zu 36 thlr., vom Übrigen den Wispel für 8 mal weniger Thaler, als er Wispel gekauft hat, gewinnt so $8\frac{2}{3}$ mal mehr Thaler, als die Zahl der Wispel beträgt und würde 3200 thlr. gewonnen haben, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Wispel waren es? wie theuer der Wispel eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	g

Erste Gleichung.

$$xy+g=\frac{x^2}{r},$$

$$\text{also}\quad rxy+rg=x^2,$$
$$\text{oder}\quad rg=x^2-rxy.$$

Zweite Gleichung.

$$xy+sx=\frac{xd}{p}+\frac{x^2}{r}-\frac{x^2}{pr},$$
$$\text{also}\quad prxy+prsx=rxd+px^2-x^2,$$

Alles durch x dividirt, kommt

$$pry+prs=rd+px-x,$$
$$\text{also}\quad pry+prs-rd=x(p-1),$$
$$\text{folglich}\quad \frac{pry+prs-rd}{p-1}=x.$$

Diesen Werth für x setze man in die erste Gleichung, so kommt

$$rg=\frac{(pry+prs-rd)^2}{(p-1)^2}-\frac{ry(pry+prs-rd)}{p-1}.$$

Alles unter einerlei Nenner gebracht, erhält man

$$rg(p-1)^2=(pry+prs-rd)^2-ry(p-1)(pry+prs-rd).$$

Das erste Glied der rechten Seite wirklich quadrirt, gibt

$$rg(p-1)^2=p^2r^2y^2+2p^2r^2sy+p^2r^2s^2-2pr^2dy-2pr^2ds+r^2d^2-(ryp+ry)(pry+prs-rd).$$

Löset man nun die Klammer rechts auf, so kommt

$$rg(p-1)^2=p^2r^2y^2+2p^2r^2sy+p^2r^2s^2-2pr^2dy-2pr^2ds+r^2d^2-p^2r^2y^2-p^2r^2sy+r^2pdy+pr^2y^2+pr^2sy-r^2dy.$$

Es hebt sich $+p^2r^2y^2$ mit $-p^2r^2y^2$ und $+2p^2r^2sy$ mit $-p^2r^2sy$ gibt $+p^2r^2sy$, desgleichen $-2pr^2dy$ mit $+r^2pdy$ gibt $-pr^2dy$.

Also kommt, wenn man zugleich alle Glieder durch r dividirt

$$g(p-1)^2 = p^2rsy + p^2rs^2 - prdy - 2prds + rd^2 + pry^2 + prsy - rdy.$$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, erhält man

$$g(p-1)^2 - p^2rs^2 + 2prds - rd^2 = y^2pr + yp^2rs - yprd + yprs - yrd.$$

Oder

$$g(p-1)^2 - r(p^2s^2 - 2psd + d^2) = y^2pr + yr(p^2s - pd + ps - d).$$

Oder

$$g(p-1)^2 - r[ps(ps-2d) + d^2] = y^2pr + yr[p(ps + s - d) - d].$$

Oder

$$g(p-1)^2 - r[ps(ps-2d) + d^2] = y^2pr + yr[p[s(p+1) - d] - d].$$

Die völlige Auflösung dieser quadratischen Gleichung siehe im zweiten Theile.

Der Nebenfall gibt auch eine höhere Gleichung.

50) Exempel zu Nr. 135.

Es kauft jemand Wein, den Anker zu 16 thlr., verkauft davon $\frac{1}{8}$, den Anker für 20 thlr., vom Übrigen aber den Anker für 20 mal weniger Thaler, als er Anker gekauft hatte. Wie viel Anker waren es und wie viel wird gewonnen, wenn man weiß, daß er 12 mal mehr Thaler, als die Zahl der gekauften Anker beträgt, gewonnen hätte, wenn alles für den letztern Preis verkauft worden wäre?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	tx

Erste Gleichung.

$$xb + tx = \frac{x^2}{r},$$

$$\text{also } rbx + rtx = x^2,$$

und durch x dividirt, kommt

$$rb + rt = x,$$

$$\text{oder } r(b+t) = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + y = \frac{xd}{p} + \frac{x^2}{r} - \frac{x^2}{pr},$$

also $prbx + pry = rdx + px^2 - x^2$,
folglich $pry = x^2(p-1) + x(rd - prb)$,
oder $pry = x^2(p-1) + xr(d - pb)$.

Man setze den für x gefundenen Werth, so kommt

$$pry = r^2(b+t)^2(p-1) + r^2(b+t)(d-pb).$$

Alles durch r dividirt, kommt

$$py = r(b+t)^2(p-1) + r(b+t)(d-pb),$$

oder $py = r(b+t)[(d-pb) + (b+t)(p-1)]$,

also $$y = \frac{r(b+t)[(d-pb)+(b+t)(p-1)]}{p}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $r = 20$, $b = 16$, $t = 8$, $d = 20$, $p = \frac{8}{3}$. Da nämlich p in der allgemeinen Bezeichnung als Divisor angenommen ist, nach der Angabe des Exempels aber die Menge der Anker $\frac{8}{3}$ mal genommen, doch mit $\frac{3}{8}$ multiplizirt werden soll, so muß man $\frac{3}{8}$ umkehren, wenn es Divisor werden soll. Es ist also

$$x = r(b+t) = 20(16+8) = 20 \cdot 24 = 480 \text{ Anker.}$$

$$y = \frac{20.(16+8)[(20-\frac{8}{3}.16)+(16+8)(\frac{8}{3}-1)]}{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{20.24(\frac{60-128}{3}+24.\frac{5}{3})}{\frac{8}{3}} = \frac{480(-\frac{68}{3}+\frac{120}{3})}{\frac{8}{3}}.$$

$$= \frac{480.\frac{52}{3}}{\frac{8}{3}} = 480 \cdot \tfrac{52}{3} \cdot \tfrac{3}{8} = 20 \cdot 52 \cdot 3$$

$$= 20.156 = 3120 \text{ thlr.}$$

Er hat also 3120 thlr. wirklich gewonnen und 480 Anker eingekauft. Der mögliche Gewinn aber wäre 3840 thlr. gewesen, und dies ist 8 mal mehr, als er Anker gekauft hat.

Wenn man aus der ersten Gleichung x bestimmt hat, so läßt sich schon das ganze Exempel rechnen, ohne daß man der zweiten Gleichung bedarf.

51) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Kaffee, und bezahlt den Zentner mit 130 mal weniger Thaler als er gewinnt. Nun verkauft er $\frac{2}{7}$ und bekommt für den Zentner $97\frac{1}{2}$ mal weniger Thaler als er gewinnt. Das Übrige verkauft er für $6\frac{2}{3}$ mal weniger Thaler den Zentner, als er Zentner gekauft hat. Wie viel Zentner hat er gekauft und wie viel Thaler gewonnen, wenn man weiß

daß er 15 mal mehr Thaler gewonnen hätte, als er Zentner gekauft hat, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{y}{u}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{y}{v}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{xy}{u}+tx=\frac{x^2}{r},$$

also $rxy+rtux=ux^2$.

Man dividire mit x, so kommt

$$ry+rtu=ux,$$

oder $$\frac{r(y+tu)}{u}=x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{xy}{u}+y=\frac{xy}{pv}+\frac{x^2}{r}-\frac{x^2}{pr},$$

also $pvrxy+pvury=urxy+puvx^2-uvx^2$,

folglich $pvury=x^2(puv-uv)+x(ury-pvry)$,

oder $pvury=x^2uv(p-1)+xyr(u-pv)$.

Setzt man für x den gefundenen Werth, so kommt

$$pvury=\frac{r^2(y+tu)^2}{u^2}.uv(p-1)+\frac{r(y+tu)}{u}.yr(u-pv),$$

oder

$$pvury=\frac{r^2(y+tu)^2}{u}.v(p-1)+\frac{r(y+tu)}{u}.yr(u-pv).$$

Auf einerlei Nenner gebracht, erhält man

$$pvu^2ry=r^2(y+tu)^2v(p-1)+r(y+tu)yr(u-pv).$$

Durch r dividirt, kommt

$$pvu^2y=r(y+tu)^2v(p-1)+(y+tu)yr(u-pv),$$

oder

$$\begin{aligned}pvu^2y&=r(y^2+2ytu+t^2u^2)v(p-1)+(y^2r+yrtu)(u-pv)\\&=ry^2v(p-1)+2yrtuv(p-1)+rt^2u^2v(p-1)\\&\quad+y^2ur-y^2rpv+yrtu^2-yrtupv\\&=ry^2vp-ry^2v+2yrtuvp-2yrtuv+rt^2u^2v(p-1)\\&\quad+y^2ur-y^2rpv+yrtu^2-yrtuvp.\end{aligned}$$

Es hebt sich $+ry^2vp$ mit $-y^2rpv$ und $+2yrtuvp$ mit $-yrtuvp$ gibt $+yrtuvp$. Also ist

$$pvu^2y=y^2ur-y^2rv+ytuvp-2yrtuv+yrtu^2+rt^2u^2v(p-1).$$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, kommt

$$-rt^2u^2v(p-1) = y^2r(u-v) + y(turvp - 2rtuv + rtu^2 - pvu^2)$$

oder

$$\begin{aligned} -rt^2u^2v(p-1) &= y^2r(u-v) + yu(trvp - 2rtv + rtu - pvu) \\ &= y^2r(u-v) + yu[tr(vp - 2v + u) - pvu] \\ &= y^2r(u-v) + yu[tr[v(p-2) + u] - pvu]. \end{aligned}$$

Die weitere Auflösung im zweiten Theile.

52) Exempel zu Nr. 145.

Es kauft jemand Tuch, verkauft davon 80 Ellen, die Elle für 40 mal weniger Thaler, als er Ellen gekauft hat, das Übrige die Elle zu $3\frac{1}{2}$ thlr., gewinnt so $\frac{1}{6}$ mal mehr Thaler, als er Ellen gekauft hat, hätte aber nur $\frac{1}{2}$ mal so viel, als Ellen sind, gewonnen, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es? wie theuer eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	c	$\frac{x}{q}$	x − c	e	sx	tx

Erste Gleichung.

$$xy + tx = xe,$$
$$\text{also} \quad y + t = e,$$
$$\text{und} \quad y = e - t.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + sx = \frac{xc}{q} + xe - ce,$$
$$\text{also} \quad qxy + qsx = xc + qxe - qce,$$
$$\text{oder} \quad qce = xc + qex - qyx - qsx$$
$$= x(c + qe - qy - qs).$$

Man setze statt y den gefundenen Werth, so erhält man

$$qce = x(c + qe - qe + qt - qs),$$
$$\text{oder} \quad qce = x(c + qt - qs),$$
$$\text{oder} \quad qce = x(c + q(t - s),$$
$$\text{also} \quad \frac{qce}{c + q(t-s)} = x.$$

Im Exempel ist $q = 40$, $c = 80$, $e = 3\frac{1}{2}$, $s = 1\frac{1}{6}$, $t = \frac{1}{2}$. Also

$$y = 3\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 3 \text{ thlr.}$$

$$\text{und} \quad x = \frac{40 \cdot 80 \cdot \frac{1}{2}}{80 + 40(\frac{1}{2} - \frac{7}{6})} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 7}{80 + 40 \cdot -\frac{2}{3}} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 7}{80 - \frac{80}{3}}$$
$$= \frac{40 \cdot 40 \cdot 7 \cdot 3}{160} = 10 \cdot 7 \cdot 3 = 210 \text{ Ellen.}$$

53)

53) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand Wein, den Anker für einen gewissen Preis, erkauft davon 3 mal so viel als der Anker beim Einkaufe kostet, n Anker für 6 mal weniger Thaler, als er Anker gekauft hat, m Reste aber bekommt er für den Anker $1\frac{1}{4}$ mal so viel, s er Thaler beim Einkaufe für denselben bezahlt hat. Er winnt so $5\frac{1}{16}$ mal so viel Thaler, als er Anker gekauft hat, ürde aber $7\frac{1}{2}$ mal so viel gewonnen haben, wenn Alles zu dem tern Preise wäre verkauft worden. Wie viel Anker waren ? Wie theuer der Anker eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	y	uy	$\frac{x}{q}$	x—uy	vy	sx	tx

Erste Gleichung.

$$xy + tx = xvy,$$
$$\text{also } y + t = vy,$$
$$\text{folglich } t = vy - y$$
$$= y(v-1),$$
$$\text{also } \frac{t}{v-1} = y.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + sx = \frac{uyx}{q} + xvy - uvy^2,$$
$$\text{also } qxy + qsx = uyx + qxvy - quvy^2,$$
$$\text{oder } qsx = yux + yqvx - yqx - y^2quv,$$
$$= y(ux + qvx - qx) - y^2quv.$$

Setzt man statt y den oben gefundenen Werth, so kommt

$$qsx = \frac{t}{v-1}(ux + qvx - qx) - \frac{t^2}{(v-1)^2}quv,$$

$$\text{er } qsx = \frac{tux}{v-1} + \frac{qvtx}{v-1} - \frac{qxt}{v-1} - \frac{t^2quv}{(v-1)^2}.$$

Alles auf Einen Nenner gebracht, kommt

$$sx(v-1)^2 = tux(v-1) + tqvx(v-1) - tqx(v-1) - quvt^2.$$

Also

$$uvt^2 = tux(v-1) + tqvx(v-1) - tqx(v-1) - qsx(v-1)^2,$$
$$\text{er } quvt^2 = x(v-1)[tu + tqv - tq - qs(v-1)],$$
$$\text{er } quvt^2 = x(v-1)[t(u + qv - q) - qs(v-1)],$$
$$\text{er } quvt^2 = x(v-1)[t[u + q(v-1)] - qs(v-1)],$$

$$\text{glich } x = \frac{quvt^2}{(v-1)[t[u + q(v-1)] - qs(v-1)]}.$$

Im Exempel ist $u = 3$, $q = 6$, $v = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, $s = 5\frac{15}{16} = \frac{95}{16}$, $t = 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$. Es ist also

$$x = \frac{6.3.\frac{7}{4}.\frac{225}{4}}{(\frac{7}{4}-1)[\frac{15}{2}[3+6(\frac{7}{4}-1)]-6.\frac{95}{16}(\frac{7}{4}-1)]}$$

$$= \frac{\frac{126.225}{16}}{\frac{3}{4}[\frac{15}{2}(3+6.\frac{3}{4})-6.\frac{95}{16}.\frac{3}{4}]} = \frac{126.225}{16.\frac{3}{4}(\frac{15}{2}.\frac{30}{4}-\frac{570}{16}.\frac{3}{4})}$$

$$= \frac{126.225}{12(\frac{450}{8}-\frac{1710}{64})} = \frac{126.225}{12(\frac{3600-1710}{64})} = \frac{126.225.64}{12.1890}$$

$$= \frac{225.16}{3.15} = \frac{15.16}{3} = 5.16 = 80 \text{ Anker.}$$

y ist aber $= \frac{t}{v-1} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{7}{4}-1} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{15}{2}.\frac{4}{3} = 10$ thlr.

Es sind also 80 Anker Wein, der Anker zu 10 thlr. gekauft worden. Davon wurden 30 Anker $= 3.10$ verkauft, der Anker zu $\frac{80}{6}$ thlr. $= 13\frac{1}{3}$ thlr., der Rest zu $\frac{7}{4}.10$ thlr. $= \frac{70}{4}$ thlr. $= 17\frac{1}{2}$ thlr. Der Gewinn beträgt so 475 thlr. $= 80.5\frac{15}{16}$ und der mögliche Gewinn 600 thlr. $80.7\frac{1}{2}$.

54) Exempel zu Nr. 151.

Von einer Partie Tuch kostet die Elle 100 mal weniger Thaler beim Einkaufe, als Ellen sind. Davon wird der dritte Theil verkauft, die Elle für 80 mal weniger Thaler als Ellen gekauft sind, das übrige aber die Elle für 64 mal weniger Thaler, als Ellen gekauft sind. Wie viel wird auf diese Art gewonnen, wenn man weiß, daß 3600 thlr. gewonnen worden wären, im Fall alle Ellen zu dem Preise des Restes wären verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	y	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+g = \frac{x^2}{r},$$

also $rx^2+mrg = mx^2$,
oder $mrg = mx^2-rx^2$,
oder $mrg = x^2(m-r)$,

also $$\frac{mrg}{m-r} = x^2.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+y=\frac{x^2}{pq}+\frac{x^2}{r}-\frac{x^2}{pr},$$

also $pqrx^2+pqrmy=mrx^2+mpqx^2-mqx^2,$

oder $pqrmy=x^2(mr+mpq-mq-pqr),$

also $\frac{pqrmy}{m[r+q(p-1)]-pqr}=x^2.$

Es sind also die beiden Werthe für x^2 einander gleich, daher die Gleichung

$$\frac{mrg}{m-r}=\frac{pqrmy}{m(r+q(p-1)-pqr}.$$

Man dividire die Zähler beider Brüche durch mr, so kommt

$$\frac{g}{m-r}=\frac{pqy}{m(r+q(p-1)-pqr}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$g[m(r+q(p-1)-pqr]=ypq(m-r).$$

Folglich $$y=\frac{g[m(r+q(p-1)-pqr}{pq(m-r)}.$$

Im Exempel ist $m=100$, $p=3$, $q=80$, $r=64$, $g=3600$, also

da $x^2=\frac{mrg}{m-r}$, so ist $x=\sqrt{\frac{mrg}{m-r}}$,

also $x=\sqrt{\frac{100\cdot64\cdot3600}{100-64}}=\sqrt{\frac{100\cdot64\cdot3600}{36}}$

$=\sqrt{100.64.100}=\sqrt{640000}=800$ Ellen.

$$y=\frac{3600[100(64+80(3-1)-3.80.64]}{3.80(100-64)}$$

$$=\frac{3600[100(64+80.2)-80.192]}{3.80.36}$$

$$=\frac{3600(100.224-15360)}{3.80.36}=\frac{3600(22400-15360}{3.80.36}$$

$$=\frac{10.7040}{3.8}=\frac{10.880}{3}=\frac{8800}{3}=2933\tfrac{1}{3}\text{ thlr.}$$

Es sind also 800 Ellen gekauft und die Elle mit 8 thlr. $=\frac{800}{100}$ bezahlt worden. Davon ist der dritte Theil $=266\frac{2}{3}$ Ellen, die Elle für $\frac{800}{80}=10$ thlr. verkauft worden, von den übrigen $533\frac{1}{3}$ Ellen aber ist die Elle mit $\frac{800}{64}$ thlr. $=12\frac{1}{2}$ thlr. bezahlt worden. Dies gibt einen wirklichen Gewinn von $2933\frac{1}{3}$ thlr. und einen möglichen von 3600 thlr.

Ein Nebenfall kann bloß entstehen, wenn der mögliche Gewinn g im Verhältniß zu dem wirklichen Gewinne ausgedrückt wird, also etwa $g=zy$. Alsdann ist nach dem Vorigen

$x^2 = \frac{mrzy}{m-r}$ und die Gleichung $\frac{\xi}{m-r} = \frac{pqy}{m(r+q(p-1)-pqr}$ wird nun in diese verwandelt

$$\frac{zy}{m-r} = \frac{pqy}{m(r+q(p-1)-pqr}.$$

Also $yz[m(r+q(p-1)-pqr] = ypq(m-r)$.

Da man auf beiden Seiten mit y dividiren kann, so wird die Gleichung unbestimmt. Man kann also für y mehrere Werthe setzen, die Größe z aber, womit y multiplizirt werden muß, um den möglichen Gewinn zu bekommen, muß durch die andern gegebenen Größen bestimmt werden. Dividirt man nämlich obige Gleichung durch y, so kommt

$$z[m(r+q(p-1)-pqr] = pq(m-r),$$

$$\text{also } z = \frac{pq(m-r)}{m(r+q(p-1)-pqr}.$$

Ist die Angabe von z diesem Werthe gleich, so ist die Aufgabe möglich.

55) Exempel zu Nr. 154.

Es bezahlt jemand den Zentner Kaffee mit 20 mal weniger Thaler als er Zentner gekauft hat, verkauft davon den dritten Theil für 15 mal weniger Thaler als die Menge der gekauften Zentner beträgt, vom Reste aber den Zentner für 30 thlr., und gewinnt so $8\frac{8}{9}$ mal so viel Thaler als er Zentner gekauft hat, wie viel betrüge der mögliche Gewinn, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte und wie viel Zentner hat er gekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	e	sx	y

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+y = xe,$$

$$\text{also } x^2+my = mex,$$

$$\text{oder } x^2-mex = -my.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+sx = \frac{x^2}{pq}+xe-\frac{xe}{p},$$

$$\text{oder } pqx^2+mpqsx = mx^2+mpqex-mqex.$$

Alles durch x dividirt, kommt

$$pqx + mpqs = mx + mpqe - mqe.$$

Also $mpqs - mpqe + mqe = mx - pqx,$

oder $mq(ps - pe + e) = x(m - pq),$

oder $mq[p(s - e) + e] = x(m - pq),$

folglich $$x = \frac{mq[p(s-e)+e]}{m-pq}.$$

Diesen Werth für x setze man in die erste Gleichung für den Werth von $-my$, so kommt

$$\left(\frac{mq[p(s-e)+e]}{m-pq}\right)^2 - \frac{m^2eq[p(s-e)+e]}{m-pq} = -my.$$

Erhebt man linker Hand wirklich zum Quadrate, löset zugleich die Klammer auf, und bringt unter einerlei Nenner, so kommt

$$\frac{m^2p^2q^2s^2 - 2m^2p^2q^2se + 2m^2pq^2es - 2m^2pq^2e^2 + m^2p^2q^2e^2 + m^2q^2e^2}{(m-pq)(m-pq)}$$
$$- \frac{m^2eq^2p^2s + m^2e^2q^2p^2 - m^2e^2q^2p + m^2eqps - m^2qpe^2 + m^2e^2q}{(m-pq)(m-pq)}$$
$$= -\frac{my(m-pq)(m-pq)}{(m-pq)(m-pq)}.$$

Die Zähler gleich gesetzt und gehoben, was sich heben läßt, kommt

$$m^2p^2q^2s^2 - m^2p^2q^2se + 2m^2pq^2es - m^2pq^2e^2 + m^2q^2e^2$$
$$- m^2eqps + m^2qpe^2 - m^2e^2q = -my(m-pq)^2.$$

Alles durch m dividirt, kommt

$$mp^2q^2s^2 - mp^2q^2se + 2mpq^2es - mpq^2e^2 + mq^2e^2$$
$$- m^2eqps + m^2qpe^2 - m^2e^2q = -y(m-pq)^2.$$

Durch die Klammer abgekürzt, kommt

$$mq(p^2qs^2 - p^2qse + 2pqes - pqe^2 + qe^2 - meps + mpe^2 - me^2) = -y(m-pq)^2,$$

oder $$mq[p(pqs^2 - pqse + 2qes - qe^2 - mes + me^2) + qe^2 - me^2] = -y(m-pq)^2,$$

oder $$mq[p[q(ps^2 - pse + 2es - e^2) - me(s-e)] + e^2(q-m)] = -y(m-pq)^2,$$

oder $$mq[p[q[s(ps - pe + 2e) - e^2] - me(s-e)] + e^2(q-m)] = -y(m-pq)^2,$$

oder $$mq[p[q[s[ps + e(2-p)] - e^2] - me(s-e)] + e^2(q-m)] = -y(m-pq)(m-pq),$$

oder $$mq[p[q[s[ps + e(2-p)] - e^2] - me(s-e)] + e^2(q-m)] = y(m-pq)(pq-m).$$

Also

$$y = \frac{mq[p[q[s[ps+e(2-p)]-e^2]-me(s-e)]+e^2(q-m)]}{(m-pq)(pq-m)}.$$

Im Exempel ist $m = 20$, $p = 3$, $q = 15$, $e = 30$, $s = 8\frac{2}{3} = \frac{50}{9}$. Folglich ist

$$y = \frac{20.15[3[15[\frac{80}{9}[3.\frac{80}{3}+30(2-3)]-30^2]-20.30(\frac{80}{9}-30)]+30^2(15-20)}{(20-3.15).(3.15-20)}$$

$$= \frac{20.15[3[15[\frac{80}{9}(\frac{80}{3}-30)-900]-600(\frac{80}{9}-\frac{270}{9})]+900.-5]}{-25.+25}$$

$$= \frac{20.15[3[15[\frac{80}{9}(\frac{80}{3}-\frac{90}{3})-900]-600.-\frac{190}{9}]-4500]}{-25.25}$$

$$= \frac{20.15[3[15(\frac{80}{9}.-\frac{10}{3}-900)+\frac{38000}{3}]-4500]}{-25.25}$$

$$= \frac{20.15[3[15(-\frac{800}{27}-\frac{24300}{27})+\frac{38000}{3}]-4500]}{-25.25}$$

$$= \frac{20.15[3(15.-\frac{25100}{27}+\frac{38000}{3})-4500]}{-25.25}$$

$$= \frac{20.15[3(-\frac{125500}{9}+\frac{38000}{3})-4500]}{-25.25}$$

$$= \frac{20.15[3(-\frac{125500}{9}+\frac{114000}{9})-4500]}{-25.25}$$

$$= \frac{20.15(3.-\frac{11500}{9}-4500)}{-25.25} = \frac{20.15(-\frac{11500}{3}-\frac{13500}{3})}{-25.25}$$

$$= \frac{20.15.-\frac{25000}{3}}{-25.25} = \frac{-20.15.25000}{-3.25.25} = \frac{+20.15.1000}{+3.25}$$

$$= 4.1000 = 4000 \text{ thlr.}$$

x aber ist $= \frac{mq[p(s-e)+e]}{m-pq} = \frac{20.15[3(\frac{80}{9}-30)+30]}{20-3.15}$

$$= \frac{20.15[3(\frac{80}{9}-\frac{270}{9})+30]}{-25} = \frac{20.15(3.-\frac{190}{9}+30)}{-25}$$

$$= \frac{20.15(-\frac{190}{3}+\frac{90}{3})}{-25} = \frac{20.15.-\frac{100}{3}}{-25}$$

$$= \frac{-20.15.100}{-3.25} = \frac{+20.15.100}{+3.25} = 4.100$$

$$= 400 \text{ Stn.}$$

Will man sich die lange Formel für den Werth von y ersparen, so kann man gleich erst x in Zahlen berechnen und dann dessen Werth in der Formel $x^2 - mex = -my$ setzen, so erhält man

$400^2 - 20 \cdot 30 \cdot 400 = -20 \cdot y,$
oder $160000 - 240000 = -20 \cdot y,$
oder $-80000 = -20 \cdot y,$
also $y = \frac{-80000}{-20} = \frac{80000}{20} = 4000$ thlr.

Es sind also 400 Ztn. eingekauft, der Zentner mit $\frac{400}{20} = 20$ thlr. bezahlt, davon $\frac{400}{3}$ Ztn. $= 133\frac{1}{3}$ Ztn., der Zentner zu $\frac{400}{15}$ thlr. $= 26\frac{2}{3}$ thlr. und der Rest $266\frac{2}{3}$ Ztn. der Zentner zu 30 thlr. verkauft worden. Der dabei gemachte Gewinn ist $= 3555\frac{5}{9}$ thlr. $= 8\frac{8}{9} \cdot 400$ und der mögliche Gewinn $= 4000$ thlr.

Im Nebenfalle wird e durch y bestimmt, also etwa $e = \frac{y}{u}$. Dadurch wird die Gleichung $x^2 - mex = -my$ verwandelt in $x^2 - m\frac{y}{u}x = -my$, oder $ux^2 - myx = -umy$, also $ux^2 = myx - umy$, oder $ux^2 = ym(x-u)$, also $\frac{ux^2}{m(x-u)} = y$.

Die Gleichung aber $mpqs - mpqe + mqe = x(m - pqx)$ wird verwandelt in

$$mpqs - mpq\frac{y}{u} + mq\frac{y}{u} = xm - pqx,$$

oder $mpqsu - mpqy + mqy = xum - upqx,$
also $mpqsu - umx + upqx = mpqy - mqy,$
oder $mpqsu - umx + upqx = ymq(p-1),$
folglich $\frac{mpqsu - umx + upqx}{mq(p-1)} = y.$

Man hat also

$$\frac{ux^2}{mx - mu} = \frac{mpqsu - umx + upqx}{mq(p-1)}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$x^2umq(p-1) = m^2pqsux - um^2x^2 + umpqx^2 - m^2pqsu^2 + m^2u^2x - mu^2pqx.$

Oder $x^2umqp - x^2umq = m^2pqsux - um^2x^2 + umppx^2 - m^2u^2pqs + m^2u^2x - mu^2pqx.$

Auf beiden Seiten hebt sich x^2umqp, also kommt, wenn man alles Unbekannte auf Eine Seite bringt,

$m^2u^2pqs = x^2umq - x^2um^2 + xm^2pqsu - xmu^2pq + xm^2u^2.$

Durchgängig mit um dividirt, kommt

$mupqs = x^2q - x^2m + xmpqs - xupq + xmu,$
oder $mupqs = x^2(q-m) + x(mpqs - upq + mu),$
oder $mupqs = x^2(q-m) + x[pq(ms-u) + mu].$

Eine quadratische Gleichung, deren Auflösung im zweiten Theile gelehrt wird.

56) Exempel zu Nr. 159.

Es kauft jemand Wein, den Anker für 12 mal weniger Thaler, als er Anker gekauft hat, verkauft davon den vierten Theil für einen gewissen Preis, den Übrigen für 10 mal weniger Thaler als er Anker gekauft hat, gewinnt so $556\frac{1}{2}$ thlr.; hätte aber $3\frac{1}{3}$ mal mehr Thaler gewonnen, als er Anker gekauft hat, wenn er allen Wein zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel Anker waren es? wie theuer verkaufte er den ersten Theil?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	y	$x-\frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	f	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+tx=\frac{x^2}{r},$$

oder $rx^2+mrtx=mx^2$.

Mit x dividirt, kommt

$$rx+mrt=mx,$$

also $$mrt=x(m-r),$$

folglich $$\frac{mrt}{m-r}=x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+f=\frac{xy}{p}+\frac{x^2}{r}-\frac{x^2}{pr},$$

also $prx^2+mprf=mrxy+mpx^2-mx^2$,

folglich $mprf=x^2(mp-m-pr)+mrxy$,

oder $mprf=x^2[m(p-1)-pr]+mrxy$.

Man setze statt x den gefundenen Werth, so kommt

$$mprf=\frac{m^2r^2t^2}{(m-r)^2}[m(p-1)-pr]+\frac{m^2r^2ty}{m-r}.$$

Alles auf Einen Nenner gebracht, kommt

$mprf(m-r)^2=m^2r^2t^2[m(p-1)-pr]+m^2r^2ty(m-r)$.

Mit mr dividirt, kommt

$pf(m-r)^2=mrt^2[m(p-1)-pr]+mrty(m-r)$.

Folglich $pf(m-r)^2-mrt^2[m(p-1)-pr]=mrty(m-r)$,

also $$\frac{pf(m-r)^2-mrt^2[m(p-1)-pr]}{mrt(m-r)}=y.$$

Im Exempel ist $f = 556\frac{4}{5} = \frac{2784}{5}$, $m = 12$, $r = 10$, $t = 3\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$, $p = 4$. Folglich ist

$$x = \frac{12.10.\frac{16}{5}}{12-10} = \frac{12.10.16}{2.5} = 12.16 = 192 \text{ Anker.}$$

$$y = \frac{556\frac{4}{5}.4(12-10)^2 - 12.10.\frac{16.16}{5.5}[12(4-1)-4.10]}{12.10.\frac{16}{5}(12-10)}$$

$$= \frac{\frac{2784}{5}.4.4 - 12.10.\frac{16.16}{5.5}(12.3-40)}{\frac{12.10.16.2}{5}}$$

$$= \frac{\frac{2784.4.4}{5} - \frac{12.2.16.16}{5}(36-40)}{12.2.16.2}$$

$$= \frac{2784.4.4 - 12.2.16.16.-4}{5.12.2.16.2}$$

$$= \frac{2784.16 + 12.2.16.16.4}{10.12.16.2} = \frac{232 + 2.16.4}{10.2}$$

$$= \frac{116 + 16.4}{10} = \frac{116+64}{10} = \frac{180}{10} \text{ 18 thlr.}$$

Es sind also 192 Anker gekauft worden, der Anker zu $\frac{192}{12}$ thlr. = 16 thlr., davon wurden verkauft $\frac{192}{4} = 48$ Anker und zwar der Anker zu 18 thlr., die übrigen 144 Anker aber der Anker zu $\frac{192}{10} = 19\frac{1}{5}$ thlr. Dabei ist denn der wirkliche Gewinn $= 556\frac{4}{5}$ thlr., der mögliche Gewinn aber ist $614\frac{2}{5}$ thlr. $= 192.3\frac{1}{5}$.

Im Nebenexempel wird f durch y bestimmt, also $f = uy$. Der Werth von x bleibt dann unverändert. Für den Werth von y aber wird die Gleichung $pf(m-r)^2 = mrt^2[m(p-1)-pr] + mrty(m-r)$ verwandelt in die

$$puy(m-r)^2 = mrt^2[m(p-1)-pr] + mrty(m-r).$$

Also

$$puy(m-r)(m-r) - mrty(m-r) = mrt^2[m(p-1)-pr],$$

oder $y(m-r)[pu(m-r) - mrt] = mrt^2[m(p-1)-pr]$,

folglich $$y = \frac{mrt^2[m(p-1)-pr]}{(m-r)[pu(m-r)-mrt]}.$$

Setzt man nach den Zahlen des vorigen Exempels $u = 30\frac{14}{15} = \frac{464}{15}$, so kommt

$$y = \frac{12.10.\frac{16.16}{5.5}[12(4-1)-4.10]}{(12-10)(4.\frac{464}{15}(12-10) - 12.10.\frac{16}{5})}$$

$$= \frac{\frac{12.2.16.16}{5}(12.3-410)}{2\left(\frac{4.464.2}{15} - 384\right)} = \frac{\frac{12.2.16.16.-4}{5}}{2\left(\frac{3712}{15} - \frac{5760}{15}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-96.16.16}{5}}{2.\frac{-2048}{15}} = \frac{-96.16.16}{5}.\frac{15}{-4096}$$

$$= \frac{96.16.16.3}{4096} = 18 \text{ thlr., wie oben.}$$

57) Exempel zu Nr. 163.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel für 9mal weniger Thaler, als es Wispel waren, verkauft davon einen Theil den Wispel für 8 mal, und vom Reste den Wispel für $6\frac{1}{4}$ mal weniger Thaler, als Wispel gekauft wurden, gewinnt so $14\frac{4}{5}$ mal so viel Thaler, als Wispel gekauft wurden, hätte aber 6336 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Wispel waren es? wie viel verkaufte er zuerst?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x — y	$\frac{x}{r}$	sx	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = \frac{x^2}{r},$$

also $rx^2 + mrg = mx^2$,

folglich $mrg = mx^2 - rx^2$,

oder $mrg = x^2(m-r)$,

also $\frac{mrg}{m-r} = x^2$,

und $\sqrt{\frac{mrg}{m-r}} = x$.

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + sx = \frac{xy}{q} + \frac{x^2}{r} - \frac{xy}{r},$$

also $qrx^2 + mqrsx = mrxy + mqx^2 - mqxy$.

Alles durch x dividirt, kommt

$$qrx + mqrs = mry + mqx - mqy,$$

folglich $mqrs + ymq - ymr = mqx - qrx$,

oder $mqrs + ym(q-r) = xq(m-r)$.

Setzt man nun statt x den gefundenen Werth, so erhält man

$$mqrs + ym(q-r) = q(m-r)\sqrt{\frac{mrg}{m-r}},$$

also $mqrs - q(m-r)\sqrt{\frac{mrg}{m-r}} = -ym(q-r)$.

Es ist aber $q(m-r) = \sqrt{q^2(m-r)^2}$, also

$q(m-r)\sqrt{\frac{mrg}{m-r}} = \sqrt{q^2(m-r)^2}\sqrt{\frac{mrg}{m-r}} =$

$\sqrt{\left[q^2(m-r)^2 \cdot \frac{mrg}{m-r}\right]} = \sqrt{q^2(m-r)mrg} = q\sqrt{(m-r)mrg}$.

Folglich iſt $mqrs - q\sqrt{[(m-r)mrg]} = -ym(q-r)$,

oder $q\sqrt{[(m-r)mrg]} - mqrs = ym(q-r)$,

und alſo $\frac{q\sqrt{[(m-r)mrg]} - mqrs}{m(q-r)} = y$,

oder $\frac{q[-mrs + \sqrt{[(m-r)mrg]}]}{m(q-r)} = y$.

Im Exempel iſt $q = 8$, $m = 9$, $r = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, $s = 14\frac{4}{5} = \frac{74}{5}$, $g = 6336$, alſo

$$y = \frac{8[-9 \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{74}{5} + \sqrt{[(9 - \frac{25}{4}) 9 \cdot \frac{25}{4} \cdot 6336]}]}{9(8 - \frac{25}{4})}$$

$$= \frac{8 \cdot [-9 \cdot \frac{5}{4} \cdot 74 + \sqrt{[(\frac{36}{4} - \frac{25}{4}) \cdot 9 \cdot \frac{25}{4} \cdot 6336]}]}{9(8 - \frac{25}{4})}$$

$$= \frac{8[\frac{-9 \cdot 185}{2} + \sqrt{(\frac{11}{4} \cdot 9 \cdot 25 \cdot 1584)}]}{9 \cdot \frac{7}{4}}$$

$$= \frac{8[\frac{-1665}{2} + \sqrt{(11 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 396)}]}{\frac{63}{4}}$$

$$= \frac{8(-\frac{1665}{2} + \sqrt{980100})}{\frac{63}{4}} = \frac{8(-\frac{1665}{2} + 990) \cdot 4}{63}$$

$$= \frac{8(-\frac{1665}{2} + \frac{1980}{2}) \cdot 4}{63} = \frac{8 \cdot 315 \cdot 2}{63} = 8 \cdot 5 \cdot 2$$

$= 80$ Wſpl.

und $x = \sqrt{\frac{9 \cdot \frac{25}{4} \cdot 6336}{9 - \frac{25}{4}}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 25 \cdot 1584}{\frac{11}{4}}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 25 \cdot 1584}{11}}$

$= \sqrt{9 \cdot 25 \cdot 144} = 3 \cdot 5 \cdot 12 = 360$ Wſpl.

Es ſind alſo eingekauft worden 360 Wſpl., der Wiſpel zu $\frac{360}{9}$ thlr. $= 40$ thlr. Davon ſind verkauft worden 80 Wſpl. der Wiſpel zu $\frac{360}{8} = 45$ thlr. Die übrigen 280 Wſpl. aber wurden der Wiſpel zu $\frac{360}{6\frac{1}{4}} = \frac{360}{\frac{25}{4}} = \frac{360 \cdot 4}{25} = \frac{72 \cdot 4}{5}$ $= \frac{288}{5} = 57\frac{3}{5}$ thlr. verkauft und ſo $14\frac{4}{5}$ mal 360 thlr. $= 5328$ thlr. gewonnen.

Im Nebenexempel wird bloß g durch y beſtimmt. Es ſei $g = zy$, ſo wird $x = \sqrt{\frac{mrzy}{m-r}}$ und $x^2 = \frac{mrzy}{m-r}$. Folglich

verwandelt sich die Gleichung $mqrs + ym(q-r) = xq(m-r)$ in diese

$$mqrs + ym(q-r) = q(m-r)\sqrt{\frac{mrzy}{m-r}}.$$

Man erhebe die Glieder auf beiden Seiten zum Quadrate, so kommt

$$m^2q^2r^2s^2 + 2m^2qrs(q-r)y + y^2m^2(q-r)^2$$
$$= q^2(m-r)^2 \cdot \frac{mrzy}{m-r},$$

oder $m^2q^2r^2s^2 + 2m^2qrs(q-r)y + y^2m^2(q-r)^2$
$$= q^2(m-r)mrzy.$$

Alles durch m dividirt, gibt

$$mq^2r^2s^2 + 2mqrs(q-r)y + y^2m(q-r)^2 = q^2(m-r)rzy.$$

Also

$$y^2m(q-r)^2 + 2mqrs(q-r)y - q^2(m-r)rzy = -mq^2r^2s^2.$$

Oder

$$y^2m(q-r)^2 + yqr[(2ms(q-r) - qz(m-r)] = -mq^2r^2s^2.$$

Eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile gelöst wird.

58) Exempel zu Nr. 168.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel für 12 mal weniger Thaler, als die Zahl der Wispel beträgt; davon verkauft er 120 Wspl., den Wispel für 10 mal weniger Thaler, als er Wispel gekauft hat. Wie viel Getreide hat er gekauft und wie theuer muß er vom Reste den Wispel verkaufen, wenn er 14 mal mehr Thaler gewinnen will, als er Wispel gekauft hat und wenn der mögliche Gewinn die Zahl der gekauften Wispel 16 mal übertrifft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	c	$\frac{x}{q}$	$x-c$	y	sx	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + tx = xy,$$

also $x^2 + mtx = mxy.$

Mit x dividirt, kommt

$$x + mt = my,$$

folglich $x = my - mt$
$$= m(y - t).$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + sx = \frac{cx}{q} + xy - cy,$$

$$qx^2 + mqsx = mcx + mqxy - mqcy,$$

$$mqcy = -qx^2 + x(mc + mqy - mqs).$$

In dieser Gleichung setze man für x den gefundenen Werth, so kommt

$$mqcy = -qm^2(y-t)^2 + m(y-t)(mc + mqy - mqs).$$

Mit m dividirt, kommt

$$qcy = -qm(y-t)^2 + (y-t)(mc + mqy - mqs),$$

$$\text{oder } qcy = -qm(y^2 - 2yt + t^2) + ymc + mqy^2 - mqsy - mct - mqty + mqst,$$

$$\text{oder } qcy = -qmy^2 + 2qmyt - qmt^2 + ymc + mqy^2 - mqty - mqsy + mqst - mct.$$

Es hebt sich $-qmy^2$ mit $+mqy^2$ und $+2qmyt$ mit $-mqty$ gibt $+mqty$. Also kommt

$$qcy = qmty + mcy - mqsy - qmt^2 + mqst - mct.$$

Folglich

$$qmt^2 - mqst + mct = qmty + mcy - mqsy - qcy,$$

$$\text{oder } mt(qt - qs + c) = y(qmt + mc - mqs - qc),$$

$$\text{oder } mt[c + q(t-s)] = y[m(q(t-s) + c) - qc],$$

$$\text{oder } mt[c + q(t-s)] = y[m[q(t-s) + c)] - qc],$$

$$\text{also } y = \frac{mt[c + q(t-s)]}{m[q(t-s) + c] - qc}.$$

Im Exempel ist $m = 12$, $q = 10$, $c = 120$, $s = 14$, $t = 16$, also

$$y = \frac{12 \cdot 16(120 + 10(16-14)}{12[10(16-14) + 120] - 10 \cdot 120} = \frac{12 \cdot 16(120 + 20)}{12(20 + 120) - 1200}$$

$$= \frac{12 \cdot 16 \cdot 140}{12 \cdot 140 - 1200} = \frac{16 \cdot 14}{14 - 10} = \frac{16 \cdot 14}{4} = 4 \cdot 14$$

$$= 56 \text{ thlr.}$$

$$x = 12(56 - 16) = 12 \cdot 40 = 480 \text{ Wspl.}$$

Es sind also 480 Wspl. eingekauft und der Wispel mit $\frac{480}{12} = 40$ thlr. bezahlt worden. Davon wurden verkauft 120 Wspl., der Wispel für $\frac{480}{10} = 48$ thlr. und der Rest von 360 Wspl. der Wispel zu 56 thlr. Der Gewinn beträgt so 6720 thlr. $= 14 \cdot 480$ und der mögliche Gewinn 7680 thlr. $= 16 \cdot 480$.

Im Nebenexempel wird c durch y bestimmt, also etwa $c = uy$, d. h. es werden zuerst u mal mehr Wispel verkauft, als der Verkaufspreis des Restes in Thalern beträgt. Alsdann

wird die obige Gleichung $qmt^2 - mqst + mct = qmty + mcy - mqsy - qcy$ verwandelt in

$qmt^2 - mqst + muyt = qmty + muy^2 - mqsy - quy^2$,
oder $qmt^2 - mqst = muy^2 - quy^2 + qmty - mqsy - mtuy$,
oder $qmt(t-s) = y^2u(m-q) + ym(qt - qs - tu)$,
oder $qmt(t-s) = y^2u(m-q) + ym[q(t-s) - tu)]$.

Diese quadratische Gleichung findet im zweiten Theile ihre Auflösung.

59) Exempel zu Nr. 172.

Es kauft jemand Tuch, die Elle für $2\frac{1}{2}$ thlr., verkauft davon den dritten Theil, die Elle für 400 mal, und den Rest für 360 mal weniger Thaler, als er Ellen gekauft hat, gewinnt so $\frac{12}{24}$ mal so viel Thaler, als die Zahl der gekauften Ellen beträgt und hätte noch mehr gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Ellen waren es? wie viel beträgt der mögliche Gewinn?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	y

Erste Gleichung.

$$xb + y = \frac{x^2}{r},$$

also $rbx + ry = x^2$,

Zweite Gleichung.

$$xb + sx = \frac{x^2}{pq} + \frac{x^2}{r} - \frac{x^2}{pr},$$

also $pqrbx + pqrsx = rx^2 + pqx^2 - qx^2$.

Mit x dividirt, kommt

$$pqrb + pqrs = rx + pqx - qx,$$

folglich $pqr(b+s) = x[r + q(p-1)]$,

daher $$x = \frac{pqr(b+s)}{r + q(p-1)}.$$

Setzt man nun diesen Werth in die erste Gleichung, so erhält man

$$\frac{bpqr^2(b+s)}{r + q(p-1)} + ry = \frac{p^2q^2r^2(b+s)^2}{[r + q(p-1)]^2}.$$

Bringt man nun alle Glieder unter einerlei Nenner, so kommt

$$bpqr^2(b+s)[r + q(p-1)] + ry[r + q(p-1)]^2 = p^2q^2r^2(b+s)^2.$$

Mit r dividirt, erhält man

$$bpqr(b+s)[r+q(p-1)]+y[(r+q(q-1)]^2 = p^2q^2r(b^2+2bs+s^2).$$

Oder $$y[(r+q(p-1)]^2 = p^2q^2r(b^2+2bs+s^2) - bpqr(b+s)(r+qp-q).$$

Löst man nach und nach die Klammern auf, so erhält man

$$y[(r+q(p-1)]^2 = p^2q^2rb^2+2p^2q^2rbs+p^2q^2rs^2 - (b^2pqr+bpqrs)(r+qp-q)$$
$$= p^2q^2b^2r+2p^2q^2rbs+p^2q^2s^2r-(b^2pqr^2+b^2p^2q^2r - b^2pq^2r+bpqr^2s+bp^2q^2rs-bpq^2rs)$$
$$= p^2q^2b^2r+2p^2q^2rbs+p^2q^2s^2r-b^2p^2q^2r-p^2q^2rbs - b^2pqr^2+b^2pq^2r+bpq^2rs-bpqr^2s.$$

Es hebt sich $p^2q^2b^2r$ mit $-b^2p^2q^2r$ und $2p^2q^2rbs$ gibt mit $-p^2q^2rbs$ zusammen p^2q^2rbs. Also hat man

$$y[(r+q(p-1)]^2 = p^2q^2s^2r+p^2q^2rbs-b^2pqr^2+b^2pq^2r+bpq^2rs-bpqr^2s$$
$$= pqr(pqs^2+pqbs-b^2r+b^2q+bqs-brs)$$
$$= pqr[q(ps^2+pbs+b^2+bs)-br(b+s)]$$
$$= pqr[q[s(ps+pb+b)+b^2]-br(b+s)]$$
$$= pqr[q[s[p(s+b)+b]+b^2]-br(b+s)].$$

Folglich $$y = \frac{pqr[q[s[p(s+b)+b]+b^2]-br(b+s)]}{[r+q(p-1)]^2}.$$

Im Exempel ist $p = 8$, $q = 400$, $r = 360$, $s = \frac{19}{24}$, $b = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Folglich

$$y = \frac{8.400.360\left[400\left[\frac{19}{24}\left[8\left(\frac{5}{2}+\frac{19}{24}\right)+\frac{5}{2}\right]+\frac{25}{4}\right]-\frac{5}{2}.360\left(\frac{5}{2}+\frac{19}{24}\right)\right]}{[(360+400(8-1)]^2}$$

$$= \frac{8.400.360\left[400.\left[\frac{19}{24}\left(8.\frac{79}{24}+\frac{5}{2}\right)+\frac{25}{4}\right]-5.180.\frac{79}{24}\right]}{3160.3160}$$

$$= \frac{8.400.360\left[400\left(\frac{79}{24}.\frac{173}{6}+\frac{25}{4}\right)-5.15.\frac{79}{2}\right]}{3160.3160}$$

$$= \frac{8.400.360\left[400\left(\frac{2297}{144}+\frac{25}{4}\right)-\frac{5.15.79}{2}\right]}{3160.3160}$$

$$= \frac{8.400.360\left(400.\frac{4187}{144}-\frac{5925}{2}\right)}{3160.3160}$$

$$= \frac{8.400.360\left(\frac{418700}{36}-\frac{106650}{36}\right)}{3160.3160} = \frac{8.400.360.\frac{312050}{36}}{3160.3160}$$

$$= \frac{8.400.3120500}{3160.3160} = \frac{8.4.312050}{316.316} = \frac{2.312050}{79.79}$$

$$= \frac{624100}{79.79} = 1000 \text{ thlr.}$$

x aber ist $= \frac{pqr(b+s)}{r+q(p-1)} = \frac{8.400.360.\frac{79}{2\frac{1}{2}}}{360+400.7} = \frac{8.400.15.79}{3160}$

$= \frac{8.10.15.79}{79} = 8.10.15 = 1200$ Ellen.

Es sind also 1200 Ellen gekauft worden, die Elle für $2\frac{1}{2}$ thlr. Der achte Theil oder 150 Ellen wurden verkauft zu $\frac{1200}{400} = 3$ thlr., der Rest zu $\frac{1200}{360} = 3\frac{1}{3}$ thlr. Es wurden 950 thlr. $= \frac{19}{24}.1200$ gewonnen und der mögliche Gewinn wäre 1000 thlr. gewesen.

Im Nebenfalle wird b durch y bestimmt, z. B. $b = \frac{y}{u}$. Dann hat man in der ersten Gleichung

$$r\frac{y}{u}x + ry = x^2,$$

oder $$ryx + ury = ux^2.$$

In der zweiten Gleichung aber hat man

$$pqr\frac{y}{u} + pqrs = x[r+q(p-1)],$$

also $$pqry + upqrs = xu[r+q(p-1)],$$

folglich $$\frac{pqry+upqrs}{u(r+q(p-1)} = x.$$

Setzt man diesen Werth statt x in die erste Gleichung, so bekommt man

$$\frac{r^2pqy^2+upqr^2sy}{u(r+q(p-1)} + ury = \frac{u(pqry+upqrs)^2}{u^2(r+q(p-1)^2} = \frac{(pqry+upqrs)^2}{u[(r+q(p-1)]^2}.$$

Oder nachdem man auf einerlei Nenner gebracht hat,

$$(pqr^2y^2+upqr^2sy)(r+pq-q)+u^2ry(r+pq-q)^2 = (pqry+upqrs)^2.$$

Alles durch r dividirt, kommt

$$(pqry^2+upqrsy)(r+pq-q)+u^2y(r+pq-q)^2 = \frac{(pqry+upqrs)^2}{r}.$$

Die Klammern aufgelöst, quadrirt und rechter Hand durch r dividirt, nachdem man das Quadrat gemacht hat, kommt

$$pqr^2y^2+upqr^2sy+p^2q^2ry^2+up^2q^2rsy-pq^2ry^2-upq^2rsy + u^2y(r^2+2rpq-2pq^2-2rq+p^2q^2+q^2) = p^2q^2ry^2+2up^2q^2rsy+u^2p^2q^2s^2r.$$

Oder

$$pqr^2y^2+upqr^2sy+p^2q^2ry^2+up^2q^2rsy-pq^2ry^2-upq^2rsy + u^2r^2y+2u^2rpqy-2u^2pq^2y-2u^2rqy+u^2p^2q^2y + u^2q^2y = p^2q^2ry^2+2up^2q^2rsy+u^2p^2q^2s^2r.$$

Alle

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, kommt

$$pqr^2y^2 - pq^2ry^2 + p^2q^2ry^2 - p^2q^2ry^2 + upqr^2sy - upq^2rsy + up^2q^2rsy - 2up^2q^2rsy + u^2r^2y + 2u^2rpqy - 2u^2pq^2y - 2u^2rqy + u^2p^2q^2y + u^2q^2y = u^2p^2q^2s^2r.$$

Es hebt sich $+p^2q^2ry^2$ mit $-p^2q^2ry^2$ und $+up^2q^2rsy$ mit $-2up^2q^2rsy$ gibt $-up^2q^2rsy$. Also kommt

$$pqr^2y^2 - pq^2ry^2 + upqr^2sy - upq^2rsy - up^2q^2rsy + u^2r^2y + 2u^2rpqy - 2u^2pq^2y - 2u^2rqy + u^2p^2q^2y + u^2q^2y = u^2p^2q^2s^2r.$$

Oder

$$y^2pqr(r-q) + yu(pqr^2s - pq^2rs - p^2q^2rs + ur^2 + 2urpq - 2upq^2 - 2urq + up^2q^2 + uq^2) = u^2p^2q^2s^2r.$$

Oder

$$y^2pqr(r-q) + yu[q(pr^2s - pqrs - p^2qrs + 2urp - 2upq - 2ur + up^2q + uq) + ur^2] = u^2p^2q^2s^2r.$$

Oder

$$y^2pqr(r-q) + yu[q[p(r^2s - qrs - pqrs + 2ur - 2uq + upq) - 2ur + uq] + ur^2] = u^2p^2q^2s^2r.$$

Oder

$$y^2pqr(r-q) + yu[q[p[r(rs - qs - pqs + 2u) - 2uq + upq] - u(2r-q)] + ur^2] = u^2p^2q^2s^2r.$$

Oder

$$y^2pqr(r-q) + yu[q[p[r[s[r - q(1+p) + 2u] - uq(2-p)] - u(2r-q)] + ur^2] = u^2p^2q^2s^2r.$$

Die Gleichung ist quadratisch. Ihre Auflösung folgt also im zweiten Theile.

60) Exempel zu Nr. 178.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel für 32 thlr., verkauft davon den dritten Theil zu einem gewissen Preise, das Übrige den Wispel für 6 mal weniger, als er Wispel gekauft hat, gewinnt so $15\frac{1}{5}$ mal so viel Thaler, als die Zahl der gekauften Wispel beträgt, und hätte $18\frac{2}{3}$ mal so viel gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Wispel waren es? wie theuer hat er den ersten Theil verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	$\frac{x}{p}$	y	$x - \frac{x}{p}$	$\frac{x}{r}$	sx	tx

Erste Gleichung.

$$xb + tx = \frac{x^2}{r},$$

also $rxb + rtx = x^2$,

und mit x dividirt, kommt

$$rb + rt = x,$$

oder $r(b + t) = x.$

Zweite Gleichung.

$$xb + sx = \frac{xy}{p} + \frac{x^2}{r} - \frac{x^2}{pr},$$

oder $rpbx + rpsx = rxy + px^2 - x^2.$

Mit x dividirt, kommt

$$rpb + rps = ry + px - x,$$

oder $rp(b + s) = ry + x(p - 1).$

Statt x den Werth gesetzt, kommt

$$rp(b + s) = ry + r(b + t)(p - 1),$$

also $rp(b + s) - r(b + t)(p - 1) = ry,$

oder wenn man mit r dividirt

$$p(b + s) - (b + t)(p - 1) = y.$$

Im Exempel ist $b = 32$, $p = 3$, $s = 15\frac{1}{9}$, $t = 18\frac{2}{3}$, $r = 6$, also

$x = 8(32 + 6) = 8 \cdot 38 = 304$ Wspl.

$y = 3(32 + 15\frac{1}{9}) - 2(32 + 18\frac{2}{3}) = 3 \cdot 47\frac{1}{9} - 2 \cdot 50\frac{2}{3}$
$= 141\frac{1}{3} - 101\frac{1}{3} = 40$ thlr.

Es sind also 304 Wspl. eingekauft worden, der Wispel zu 32 thlr., davon wurde der dritte Theil $= 101\frac{1}{3}$ Wspl. verkauft, der Wispel zu 40 thlr., die übrigen $202\frac{2}{3}$ Wspl. der Wispel zu $\frac{304}{6} = 50\frac{2}{3}$ thlr. Der Gewinn ist daher $4593\frac{1}{3}$ thlr. $= 15\frac{1}{9} \cdot 304$ und der mögliche Gewinn $= 4053\frac{1}{3}$ thlr. $= 18\frac{2}{3} \cdot 304$.

Im Nebenexempel wird b durch y bestimmt, also etwa $b = \frac{y}{u}$.

Es ist daher $x = r\left(\frac{y}{u} + t\right)$,

oder $ux = r(y + ut)$,

also $x = \frac{r(y + ut)}{u}$.

Diesen Werth für x, so wie den Werth für b, setze man in die Gleichung $rp(b + s) = ry + x(p - 1)$, so bekommt man

$$rp\left(\frac{y}{u} + s\right) = ry + \frac{r(y + ut)(p - 1)}{u}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht und mit r dividirt, kommt

$$p(y+us) = uy+(y+ut)(p-1).$$

Die Klammern aufgelöst, erhält man

$$py+pus = uy+py+put-y-ut,$$

$$py-uy-py+y = put-pus-ut,$$

$$y-uy = u[p(t-s)-t],$$

$$uy-y = -u[p(t-s)-t],$$

$$y(u-1) = -u[p(t-s)-t],$$

$$y = \frac{-u[p(t-s)-t]}{u-1}.$$

Nach den Zahlen des vorigen Exempels ist $u = \frac{5}{4}$, also

$$y = \frac{-\frac{5}{4}[3(18\frac{2}{3}-15\frac{1}{3})-18\frac{2}{3}]}{\frac{5}{4}-1} = \frac{-\frac{5}{4}(3.3\frac{1}{3}-18\frac{2}{3})}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{5}{4}(10-18\frac{2}{3})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{5}{4}.-8}{\frac{1}{4}} = 10.\frac{4}{1} = 40 \text{ thlr.}$$

wie vorher; und

$$x = \frac{r(y+ut)}{u} = \frac{6(40+\frac{5}{4}.18\frac{2}{3})}{\frac{5}{4}} = \frac{6(40+\frac{5}{4}.\frac{56}{3})}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{6(40+\frac{280}{12})}{\frac{5}{4}} = \frac{6(\frac{480+280}{12})}{\frac{5}{4}} = 6.\frac{760}{12}.\frac{4}{5} = \frac{6.152}{3}$$

$$= 2.152 = 304 \text{ Wspl.}$$

61) Exempel zu Nr. 183.

Es kauft jemand eine Partie Kaffee, den Zentner für 2 mal weniger Thaler, als er Zentner gekauft hat, verkauft davon den dritten Theil, den Zentner für 10 mal weniger Thaler, als die Zahl der gekauften Zentner beträgt, das übrige aber so, daß er 12 mal so viel Thaler gewinnt, als er Zentner gekauft hat und daß er 16 mal so viel gewonnen hätte, wenn alles zu dem letzten Preise wäre verkauft worden. Wie viel Zentner waren es? wie theuer hat er den Rest verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	$\frac{x}{p}$	$\frac{x}{q}$	$x-\frac{x}{p}$	y	sx	tx

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m}+tx = xy,$$

also $x^2+mtx = mxy.$

Mit x dividirt, kommt

$$x + mt = my,$$

folglich $$x = m(y - t).$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + sx = \frac{x^2}{pq} + xy - \frac{xy}{p},$$

also $$pqx^2 + mpqsx = mx^2 + mpqxy - mqyx.$$

Durch x dividirt, kommt

$$pqx + mpqs = mx + mpqy - mqy,$$

oder $$x(pq - m) + mpqs = mpqy - mqy.$$

Statt x den Werth gesetzt, kommt

$$m(y - t)(pq - m) + mpqs = ymq(p - 1),$$

oder $$(my - mt)(pq - m) + mpqs = ymq(p - 1),$$

oder $$mypq - m^2y - mtpq + m^2t + mpqs = ymq(p - 1).$$

Durch m dividirt, erhält man

$$ypq - my - tpq + mt + pqs = yq(p - 1).$$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, kommt

$$ypq - yq(p - 1) - my = tpq - pqs - mt,$$

oder $$ypq - yqp + yq - my = pq(t - s) - mt,$$

also $$y(q - m) = pq(t - s) - mt,$$

folglich $$y = \frac{pq(t - s) - mt}{q - m}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $p = 3$, $m = 12$, $q = 10$, $s = 12$, $t = 16$, also

$$y = \frac{3.10(16 - 12) - 12.16}{10 - 12} = \frac{30.4 - 192}{-2} = \frac{120 - 192}{-2}$$

$$= \frac{-72}{-2} = 36 \text{ thlr.}$$

$$x = 12(36 - 16) = 12.20 = 240 \text{ Ztn.}$$

Es sind also 240 Ztn., der Zentner zu $\frac{24p}{12} = 20$ thlr. eingekauft und $\frac{240}{3}$ oder 80 Ztn. zu $\frac{240}{10} = 24$ thlr., der Rest von 160 Ztn. aber zu 36 thlr. verkauft worden. Dabei beträgt der wirkliche Gewinn 2880 thlr. $= 12.240$ und der mögliche 3840 thlr. $= 16.240$.

Durch die Methode der Subtraktion findet man die Werthe für x und y leichter. Es ist dies überhaupt bei mehrern der bisherigen Exempel der Fall, aber die gebrauchte Kombinations- und Substitutionsmethode schien uns für die Übung des Lernenden instruktiver und darum haben wir sie gewöhnlich der leichtern vorgezogen.

§. 263.

Jetzt wollen wir noch zu den übrigen Aufgaben der Tabelle n §. 254. Exempel beifügen, und nur, wo es nöthig scheint, uf Nebenfälle Rücksicht zu nehmen. Wir glauben, daß diese ch dem Beispiele der bisher betrachteten Nebenfälle leicht zu lden sind; auch wird der, welcher die bisherigen Auflösungen ohl gefaßt hat, keine Schwierigkeit finden, jede Nebenaufgabe benfalls richtig aufzulösen.

In den bisher betrachteten Fällen von 1 bis 6 war die anze Waare als unbekannt angenommen worden. Die folgenden älle setzen andere Theile der Aufgabe als unbekannt.

§. 264.

1) Exempel zu Nr. 7.

Es hat jemand 480 Ztn. gekauft, einen Theil verkauft er den Zentner zu 25 thlr., das Übrige den Zentner zu 30 thlr., gewinnt so 2400 thlr., hätte aber 3000 thlr. gewonnen, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel hat er zuerst verkauft und wie theuer den Zentner eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	x	y	d	a — y	e	f	g

Erste Gleichung.

$$ax + g = ae,$$
$$\text{also} \quad ax = ae - g,$$
$$x = \frac{ae - g}{a}.$$

Zweite Gleichung.

$$ax + f = yd + ae - ey,$$
$$\text{also} \quad ax = yd - ey + ae - f,$$
$$\text{folglich} \quad x = \frac{y(d-e) + ae - f}{a}$$
$$= \frac{ae - y(e-d) - f}{a}.$$

$$\text{Daher} \quad \frac{ae-g}{a} = \frac{ae - y(e-d) - f}{a},$$
$$\text{oder} \quad ae - g = ae - y(e-d) - f,$$
$$\text{also} \quad f - g = -y(e-d),$$
$$\text{oder} \quad g - f = +y(e-d),$$
$$\text{folglich} \quad \frac{g-f}{e-d} = y.$$

Im Exempel ist $a = 480$, $d = 25$, $e = 30$, $f = 2400$, $g = 3000$, also

$$x = \frac{480 \cdot 30 - 3000}{480} = \frac{480 - 100}{16} = \frac{380}{16} = 23\frac{3}{4} \text{ thlr.}$$

$$y = \frac{3000 - 2400}{30 - 25} = \frac{600}{5} = 120 \text{ Ztn.}$$

Es sind also 480 Ztn., der Zentner zu $23\frac{3}{4}$ thlr. eingekauft worden, folglich ist die Ausgabe 11400 thlr. Nun wurden verkauft 120 Ztn. à 25 thlr., also die erste Einnahme = 3000 thlr., die übrigen 360 Ztn. aber zu 30 thlr., also Einnahme = 10800, daher ganze Einnahme = 13800 thlr., folglich wirklicher Gewinn = 2400 thlr., die mögliche Einnahme aber = 14400 thlr., also möglicher Gewinn = 3000 thlr.

Anmerkung. Wäre im vorigen Exempel der Verkaufspreis des ersten Theils dem Einkaufspreise gleich, also $d = x$, so hieße die zweite Gleichung

$$ax + f = yx + ae - ey,$$

folglich $ax - yx = ae - ey - f$,

oder $x(a - y) = ae - ey - f$,

also $$x = \frac{ae - ey - f}{a - y}.$$

Daher $$\frac{ae - g}{a} = \frac{ae - ey - f}{a - y},$$

folglich $a^2e - aey - ag + gy = a^2e - aey - af$,

oder $af - ag = -gy$,

oder $a(g - f) = gy$,

folglich $$\frac{a(g - f)}{g} = y.$$

In den Zahlen des Exempels ist also

$$y = \frac{480(3000 - 2400)}{3000} = \frac{480 \cdot 600}{3000} = \frac{48 \cdot 6}{3} = 96 \text{ Ztn.}$$

In diesem Falle werden also zuerst 96 Ztn. à $23\frac{3}{4}$ thlr. verkauft, die Einnahme ist = 2280 thlr., die Einnahme für die übrigen 384 Ztn. aber 11520 thlr., also ganze Einnahme 13800 thlr., folglich 2400 thlr. Gewinn.

Die Formeln für x und y lassen sich leicht in Worte ausdrücken. Es war $x = \frac{ae - g}{a}$, d. h. wenn man die mögliche Einnahme weniger den möglichen Gewinn durch die ganze Waare dividirt, so erhält man den Einkaufspreis, denn der mögliche Gewinn von der möglichen Einnahme abgezogen, muß ja eben die Ausgabe für das Ganze geben. Es war $y = \frac{g - f}{e - d}$, d. h., man findet den zuerst verkauften Theil,

denn man den Unterschied der Gewinne durch den Unterschied der Verkaufspreise dividirt. Oder war $y = a \cdot \frac{g-f}{g}$, so heißt dies: Man dividire den Unterschied beider Gewinne durch den möglichen Gewinn, und multiplizire diesen Quotienten mit der ganzen Waare, so erhält man den zuerst verkauften Theil.

Eben so lassen sich aus jenen Formeln leicht Proportionen bilden.

Die Formel $x = \frac{ae-g}{a}$ gibt die Proportion:

$$a : ae-g = 1 : x,$$

d. h., die ganze Waare zur ganzen Ausgabe, wie die Einheit der Waare zum Einkaufspreise für diese Einheit.

Die Formel $y = \frac{g-f}{e-d}$ gibt die Proportion:

$$e-d : g-f = 1 : y,$$

d. h., der Unterschied der beiden Verkaufspreise für die Einheit verhält sich zum Unterschiede des möglichen und wirklichen Gewinnes, wie die Einheit der Waare zu dem zuerst verkauften Theile.

Die Formel endlich $y = \frac{a(g-f)}{g}$ gibt die Proportion:

$$g : a = g-f : y,$$

d. h., der mögliche Gewinn zur ganzen Waare, wie der Unterschied der Gewinne zu dem zuerst verkauften Theile.

§. 265.

2) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es hat jemand Kaffee gekauft, 20 mal mehr Zentner als der Zentner beim Einkaufe kostet. Er verkauft davon einen Theil, den Zentner für 8 mal weniger Thaler, als dieser Theil Zentner enthält, verkauft das Übrige, den Zentner für 40 thlr., gewinnt so 4848 thlr., hätte aber 10 mal mehr Thaler gewonnen, als er Zentner gekauft hat, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie theuer hat er den Zentner eingekauft? wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
mx	x	y	$\frac{y}{u}$	x−y	e	f	tx

Erste Gleichung.

$$mx^2 + tx = mex,$$
$$\text{also} \quad mx + t = me,$$
$$\text{oder} \quad mx = me - t,$$
$$\text{folglich} \quad x = e - \frac{t}{m}.$$

Zweite Gleichung.

$$mx^2 + f = \frac{y^2}{u} + mxe - ye,$$
$$\text{also} \quad umx^2 + uf = y^2 + umxe - uey.$$

Man ziehe diese Gleichung von der ersten $mx^2 + tx = mex$ ab, nachdem man in dieser alle Glieder mit u multiplizirt hat, um einerlei Koeffizienten zu bekommen. Also

Erste Gleichung	$= umx^2 + utx =$	$umex.$
Zweite Gleich. negativ	$= -umx^2 - uf = -y^2 -$	$umex + uey.$
Summe	$utx - uf = -y^2$	$+ uey.$

Statt x den Werth gesetzt, ergibt sich

$$\frac{utme - ut^2}{m} - uf = -y^2 + uey.$$

Folglich $utme - ut^2 - muf = -my^2 + muey,$
oder $ut^2 - utme + muf = my^2 - muey,$
oder $u(t^2 - tme + mf) = my^2 - muey,$
oder $u(t^2 - m.(te - f) = my^2 - muey.$

Eine quadratische Gleichung, deren weitere Auflösung im zweiten Theile folgt.

§. 266.

3) Exempel zu Nr. 8.

Es kauft jemand 500 Ztn., verkauft davon 200 Ztn. für einen gewissen Preis, vom übrigen den Zentner für 40 thlr., gewinnt so 3000 thlr.; hätte aber 4000 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie theuer hat er eingekauft und den ersten Theil verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	x	c	y	a − c	e	f	g

Erste Gleichung.

$$ax + g = ae,$$
$$\text{also} \quad ax = ae - g,$$
$$\text{und} \quad x = e - \frac{g}{a}.$$

Zweite Gleichung.

$$ax + f = cy + ae - ce.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g - f = -cy + ce,$$

oder $$f - g = cy - ce,$$

also $$f - g + ce = cy,$$

folglich $$\frac{f-g}{c} + e = y,$$

oder $$e - \frac{g-f}{c} = y.$$

Im Exempel ist $a = 500$, $c = 200$, $e = 40$, $f = 3000$, $g = 4000$. Also ist

$$x = e - \frac{g}{a} = 40 - \frac{4000}{500} = 40 - 8 = 32 \text{ thlr.}$$

$$y = e - \frac{g-f}{c} = 40 - \frac{4000-3000}{200} = 40 - \frac{1000}{200}$$

$$= 40 - 5 = 35 \text{ thlr.}$$

Es sind also 500 Stn. à 32 thlr. eingekauft, 200 Stn. à 35 thlr. und 300 Stn. à 40 thlr. verkauft worden. Die Ausgabe war also 16000 thlr., die erste Einnahme = 7000, die zweite = 12000, also ganze Einnahme = 19000 thlr., folglich 3000 thlr. Gewinn und die mögliche Einnahme = 20000 thlr., als möglicher Gewinn = 4000 thlr.

§. 267.

4) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand 420 Wspl. Getreide, verkauft davon 140 Wspl. für einen gewissen Preis, das Übrige $1\frac{1}{4}$ mal theurer, gewinnt so $124\frac{4}{5}$ mal so viel Thaler, als der Wispel beim Einkaufe kostet; hätte aber 5880 thlr. gewonnen, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie theuer hat er eingekauft? wie theuer den ersten Theil verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	x	c	y	a − c	my	sx	g

Erste Gleichung.

$$ax + g = amy,$$

also $$ax = amy - g,$$

folglich $$x = \frac{amy - g}{a}.$$

Zweite Gleichung.

$$ax + sx = cy + amy - cmy.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$g - sx = -cy + cmy.$$

folglich $$-sx = -cy + cmy - g,$$

oder $$sx = cy - cmy + g$$
$$= g - (cmy - cy),$$

also $$x = \frac{g - cy(m-1)}{s}.$$

Daher $$\frac{amy - g}{a} = \frac{g - cy(m-1)}{s}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$amsy - sg = ag - acy(m-1).$$

Also $amsy + acy(m-1) = ag + sg,$

oder $ya(ms + c(m-1) = g(a+s),$

folglich $$y = \frac{g(a+s)}{a(ms + c(m-1)}.$$

Im Exempel ist $g = 5880$, $a = 420$, $s = 124\frac{4}{9} = \frac{1120}{9}$, $m = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $c = 140$. Also

$$y = \frac{5880\left(420 + \frac{1120}{9}\right)}{420\left[\frac{5}{4} \cdot \frac{1120}{9} + 140\left(\frac{5}{4} - 1\right)\right]} = \frac{5880\left(\frac{3780+1120}{9}\right)}{420\left(\frac{1400}{9} + 140 \cdot \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{5880 \cdot \frac{4900}{9}}{420\left(\frac{1400}{9} + 35\right)} = \frac{\frac{1960 \cdot 4900}{3}}{420\left(\frac{1400+315}{9}\right)}$$

$$= \frac{9604000}{3} \cdot \frac{9}{1715 \cdot 420} = \frac{9604000 \cdot 3}{1715 \cdot 420} = \frac{960400}{1715 \cdot 14}$$

$$= \frac{68600}{1715} = \frac{13720}{343} = 40 \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{amy - g}{a} = \frac{420 \cdot \frac{5}{4} \cdot 40 - 5880}{420} = \frac{420 \cdot 50 - 5880}{420}$$

$$= 50 - 14 = 36 \text{ thlr.}$$

Es sind also die 420 Wspl. zu 36 thlr. eingekauft und 140 Wspl. zu 40 thlr., die übrigen 280 Wspl. aber zu $40 \cdot \frac{4}{5} = 50$ thlr. verkauft worden. Die Ausgabe war daher 15120 thlr., die erste Einnahme $= 5600$ thlr., die zweite 14000 thlr., also die ganze 19600 thlr., folglich der Gewinn 4480 thlr. und dieser $124\frac{4}{9}$ mal größer, als der Einkaufspreis 36 thlr. Der mögliche Gewinn aber ist 5880 thlr.

§. 268.

5) Exempel zu Nr. 9.

Es kauft jemand 60 Anker Wein, verkauft davon 24 zu 20 thlr., den übrigen so, daß er 200 thlr. gewinnt, und daß er 300 thlr. gewonnen hätte, wenn aller Wein für den letztern Preis verkauft worden wäre. Wie theuer hat er eingekauft? wie theuer den Rest verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	x	c	d	a — c	y	f	g

Erste Gleichung.

$$ax + g = ay.$$

Also $ax = ay - g,$

folglich $x = y - \frac{g}{a}.$

Zweite Gleichung.

$$ax + f = cd + ay - cy.$$

Zieht man die letztere Gleichung von der erstern ab, so kommt

$$g - f = -cd + cy.$$

Also $g - f + cd = cy,$

Folglich $\frac{g - f}{c} + d = y.$

Im Exempel ist $a = 60$, $c = 24$, $d = 20$ thlr., $f = 200$, $g = 300$. Also

$$y = \frac{300 - 200}{24} + 20 = \frac{100}{24} + 20 = 4\frac{1}{6} + 20 = 24\frac{1}{6} \text{ thlr.}$$

$$x = 24\frac{1}{6} - \frac{300}{60} = 24\frac{1}{6} - 5 = 19\frac{1}{6} \text{ thlr.}$$

Es sind also die 60 Anker zu $19\frac{1}{6}$ thlr. eingekauft, die 24 Anker zu 20 thlr. und die übrigen 36 Anker zu $24\frac{1}{6}$ thlr. verkauft worden. Es kommt daher der wirkliche Gewinn = 200 thlr. und der mögliche = 300 thlr.

6) Nimmt man bei diesem Falle an, daß der erste Theil der Waare für den Einkaufspreis verkauft würde, also daß $d = x$ wäre, so würde die Aufgabe unbestimmt werden. Es wäre dann die zweite Gleichung $= ax + f = cx + ay - cy$. Zieht man diese von der ersten ab, so kommt

$$g - f = -cx + cy.$$

Also $cx = cy - (g - f),$

folglich $x = y - \frac{g - f}{c}.$

zu finden. Es seien diese Größen x und y, ihre Summe = s, ihr Unterschied = d, so hat man die Gleichungen $x+y=s$ und $x-y=d$. Aus der ersten folgt $x=s-y$, aus der zweiten $x=d+y$. Also ist $s-y=d+y$, folglich $s-d=y+y=2y$, also $y=\frac{s-d}{2}$ und da $x=d+y$ war, so ist $x=d+\frac{s-d}{2}=\frac{2d+s-d}{2}=\frac{d+s}{2}$, d. h. die größere Größe x findet man, wenn man die Summe und den Unterschied addirt und davon die Hälfte nimmt; die kleinere Größe y aber, wenn man den Unterschied von der Summe abzieht und vom Reste die Hälfte nimmt. Oder da $\frac{s+d}{2}=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$ und $\frac{s-d}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$ ist, so ist auch die größere Größe x gleich der halben Summe zur halben Differenz addirt und die kleinere Größe y gleich der halben Summe, weniger der halben Differenz.

Ist also im Exempel $x+y=m$ und $y-x=\frac{f}{a-c}$, so ist $y=\frac{m}{2}+\frac{f}{2(a-c)}=\frac{m(a-c)+f}{2(a-c)}$ und $x=\frac{m}{2}-\frac{f}{2(a-c)}=\frac{m(a-c)-f}{2(a-c)}$.

Es sei $y+x=m=30$, so ist

$$y=\frac{30(60-24)+200}{2(60-24)}=\frac{30.36+200}{2.36}=\frac{1080+200}{72}$$

$$=\frac{1280}{72}=17\frac{28}{36}=17\frac{7}{9}$$

und $x=\frac{30(60-24)-200}{2(60-24)}=\frac{30.36-200}{2.36}=\frac{1080-200}{72}$

$$=\frac{880}{72}=\frac{110}{9}=12\frac{2}{9}.$$

Der Anker hat also beim Einkaufe $12\frac{2}{9}$ thlr. gekostet und vom Reste ist der Anker für $17\frac{7}{9}$ thlr. verkauft worden. Dann ist die Ausgabe $=60.12\frac{2}{9}=\frac{60.110}{9}=\frac{20.110}{3}=\frac{2200}{3}=733\frac{1}{3}$ thlr.; die erste Einnahme $=\frac{24.110}{9}=\frac{8.110}{3}=\frac{880}{3}=293\frac{1}{3}$ und die zweite Einnahme $=36.17\frac{7}{9}=\frac{36.160}{9}=4.160=640$ thlr., also ganze Einnahme $=933\frac{1}{3}$ und daher der Gewinn $=200$ thlr.

Man hätte auch f oder g durch ihr Verhältniß zu x oder y bestimmen können, so würde die Aufgabe auch bestimmt gewesen sein. Es sei $g=uy$, so wäre die erste Gleichung

$$ax + uy = ay,$$
$$\text{also} \quad ax = ay - uy,$$
$$\text{oder} \quad ax = y(a-u),$$
$$\text{also} \quad x = \frac{y(a-u)}{a};$$

und da aus der zweiten Gleichung folgte $x = y - \frac{f}{a-c}$, so hätte man

$$\frac{y(a-u)}{a} = y - \frac{f}{a-c},$$

folglich $y(a-u)(a-c) = ay(a-c) - af,$
also $af = ay(a-c) - y(a-u)(a-c),$
oder $af = y(a-c)(a-a+u),$
oder $af = y(a-c)u,$
also $\frac{af}{u(a-c)} = y.$

Es sei $u = 20$, so ist nach den übrigen Zahlen des Exempels

$$y = \frac{60.200}{20(60-24)} = \frac{60.200}{20.36} = \frac{5.10}{3} = 16\tfrac{2}{3}$$

und $x = \frac{16\frac{2}{3}(60-20)}{60} = \frac{\frac{50}{3}.40}{60} = \frac{\frac{50}{3}.2}{3} = \frac{100}{9}$
$= 11\frac{1}{9}.$

Es ist also der Anker für $11\frac{1}{9}$ thlr. eingekauft, eben so theuer der erste Theil, der Rest aber zu $16\frac{2}{3}$ thlr. verkauft worden.

§. 269.

7) Exempel zu Nr. 10.

Es kauft jemand 432 Wspl. Getreide, verkauft davon 108 Wspl. zu 40 thlr., das übrige zu 45 thlr. Wie viel gewinnt er, wenn man weiß, daß der mögliche Gewinn 6000 thlr. betragen hätte und wie theuer hat er eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	x	c	d	a − c	e	y	g

Erste Gleichung.

$$ax + g = ae,$$
$$\text{also} \quad ax = ae - g,$$
$$x = e - \frac{g}{a}.$$

Zweite Gleichung.

$$ax + y = cd + ae - ce,$$

$$\text{also} \quad ax = ae + c(d - e) - y$$

$$= ae - c(e - d) - y,$$

$$\text{folglich} \quad x = e - \frac{c(e-d)+y}{a}.$$

$$\text{Daher} \quad e - \frac{g}{a} = e - \frac{c(e-d)+y}{a},$$

$$\text{also} \quad -\frac{g}{a} = -\frac{c(e-d)+y}{a},$$

$$\text{oder} \quad g = c(e-d) + y,$$

$$\text{folglich} \quad g - c(e-d) = y.$$

Im Exempel ist $a = 432$, $c = 108$, $d = 40$, $e = 45$, $g = 6000$. Also

$$x = e - \frac{g}{a} = 45 - \frac{6000}{432} = 45 - 13\frac{8}{9} = 31\frac{1}{9} \text{ thlr.}$$

$$y = g - c(e-d) = 6000 - 108(45 - 40)$$

$$= 6000 - 108 \cdot 5 = 6000 - 540 = 5460 \text{ thlr.}$$

Die Probe gibt alles richtig.

8) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand 400 Wspl. Getreide, verkauft davon 4 mal so viel, als der Wispel Thaler kostet, den Wispel zu 36 thlr., das Übrige den Wispel zu 40 thlr. Wie theuer hat er eingekauft und wie viel gewonnen, wenn man weiß, daß er, alles für den Preis des Restes verkauft, $1\frac{1}{7}$ mal so viel gewonnen hätte, als der wirkliche Gewinn beträgt?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	x	mx	d	a − mx	e	y	py

Erste Gleichung.

$$ax + py = ae,$$

$$\text{also} \quad ax = ae - py,$$

$$\text{folglich} \quad x = e - \frac{py}{a}.$$

Zweite Gleichung.

$$ax + y = mdx + ae - mex.$$

Diese

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$py - y = mex - mdx,$$

also $y(p-1) = xm(e-d)$,

daher $\frac{y(p-1)}{m(e-d)} = x$.

Also $e - \frac{py}{a} = \frac{y(p-1)}{m(e-d)}$.

Folglich $mea(e-d) - pym(e-d) = ya(p-1)$,

oder $mea(e-d) = pym(e-d) + ya(p-1)$,

oder $mea(e-d) = y[pm(e-d) + a(p-1)]$,

daher $\frac{mea(e-d)}{pm(e-d)+a(p-1)} = y$,

oder $\frac{ea}{p + \frac{a(p-1)}{m(e-d)}} = y$.

Im Exempel ist $m = 4$, $a = 400$, $d = 36$, $e = 40$, $p = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Also

$$y = \frac{40.400}{\frac{4}{3} + \frac{400.(\frac{4}{3}-1)}{4.(40-36)}} = \frac{16000}{\frac{4}{3} + \frac{400.\frac{1}{3}}{4.4}} = \frac{16000}{\frac{4}{3} + \frac{25}{3}}$$

$$= \frac{16000.3}{29} = \frac{48000}{29} = 1655\tfrac{5}{29}.$$

$$x = \frac{\frac{48000}{29}(\frac{4}{3}-1)}{4(40-36)} = \frac{\frac{48000}{29}.\frac{1}{3}}{4.4} = \frac{48000}{29.4.4.3} = \frac{1000}{29}$$

$$= 34\tfrac{14}{29} \text{ thlr.}$$

Es ist also der Wispel für $34\frac{14}{29}$ thlr. eingekauft und zuerst $4.34\frac{14}{29} = 137\frac{17}{29}$ Wspl. à 36 thlr. verkauft worden, der Rest $262\frac{2}{29}$ Wspl. aber zu 40 thlr. Die Ausgabe ist daher $13793\frac{3}{29}$ thlr., die erste Einnahme $= 4965\frac{12}{29}$ thlr., die zweite Einnahme $= 10482\frac{22}{29}$ thl., die ganze Einnahme also $15448\frac{8}{29}$ thl., daher der wirkliche Gewinn $= 1655\frac{5}{29}$ thlr., wie es sein soll. Die mögliche Einnahme ist $= 16000$ thlr., also der mögliche Gewinn $= 2206\frac{26}{29}$ und dieser ist $= 1655\frac{5}{29}.\frac{4}{3}$.

§. 270.

9) Exempel zu Nr. 11.

Es kauft jemand 100 Ztn., verkauft davon 40 Ztn., den Zentner zu 32 thlr., das übrige zu 40 thlr., gewinnt 400 thlr., wie viel hätte er gewonnen, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte und wie theuer hat er eingekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	x	c	d	a — c	e	f	y

Erste Gleichung.

$$ax + y = ae,$$
$$\text{also} \quad ax = ae - y,$$
$$\text{folglich} \quad x = e - \frac{y}{a}.$$

Zweite Gleichung.

$$ax + f = cd + ae - ce.$$

Zieht man diese Gleichung von der ersten ab, so kommt

$$y - f = -cd + ce,$$
$$\text{oder} \quad y = f + c(e - d).$$

Diesen Werth statt y in die Gleichung für x gesetzt, kommt

$$x = e - \frac{f + c(e-d)}{a}.$$

Im Exempel ist $a = 100$, $c = 40$, $d = 32$, $e = 40$, $f = 400$, also

$$x = 40 - \frac{400 + 40(40-32)}{100} = 40 - \frac{400 + 40 \cdot 8}{100}$$
$$= 40 - \frac{720}{100} = 40 - 7\frac{1}{5} = 32\frac{4}{5} \text{ thlr.}$$
$$y = 400 + 40\,(40 - 32) = 400 + 40 \cdot 8 = 720 \text{ thlr.}$$

Rechnet man das Exempel aus, so wird sich Alles in Richtigkeit finden.

10) Exempel zu einem Nebenfalle.

Es kauft jemand 12 mal so viel Zentner als der Zentner Thaler kostet, verkauft davon 3 mal so viel, als der Einkaufspreis für den Zentner beträgt, und zwar den Zentner zu 40 thlr., das Übrige aber den Zentner für 120 mal weniger Thaler, als der mögliche Gewinn beträgt. Wie theuer ist eingekauft und wie viel beträgt der mögliche Gewinn, wenn der wirkliche 4950 thlr. ausmacht?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil d. Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Mögl. Gewinn.
mx	x	qx	d	mx — qx	$\frac{y}{p}$	f	y

Erste Gleichung.

$$mx^2 + y = \frac{mxy}{p},$$

also $pmx^2 + py = mxy,$

folglich $pmx^2 - mxy = -py.$

Zweite Gleichung.

$$mx^2 + f = qdx + \frac{mxy}{p} - \frac{qxy}{p},$$

also $pmx^2 + pf = pqdx + mxy - qxy,$

folglich $pf = -pmx^2 + pqdx + mxy - qxy,$

oder $pf = -x^2pm + x(pqd + my - qy).$

Beides quadratische Gleichungen, die erst im zweiten Theile aufgelöst werden.

§. 271.

11) Exempel zu Nr. 12.

Es kauft jemand 800 Ellen Tuch, die Elle zu 3 thlr., verkauft davon einen Theil für einen gewissen Preis, den Rest zu $4\frac{1}{2}$ thlr., gewinnt 800 thlr., hätte aber 1000 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Ellen verkaufte er zuerst und wie theuer die Elle?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	x	y	a — x	e	f	g

Erste Gleichung.

$$ab + g = ae.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = xy + ae - xe.$$

Da in der ersten Gleichung keine von den unbekannten Größen vorkommt, und aus der zweiten nicht alle beide bestimmt werden können, so ist die Aufgabe selbst unbestimmt. Der mögliche Gewinn ist unnöthig angegeben, denn da $g = ae - ab$, d. h. der mögliche Gewinn gleich dem Unterschiede der Ausgabe und möglichen Einnahme ist, so kann g nicht willkührlich angenommen werden und ist auch wirklich im Exempel falsch angegeben, denn die Ausgabe ist = 2400 thlr. und die mögliche Einnahme = 3600 thlr., also der mögliche Gewinn 1200 thlr. Im Exempel muß also der mögliche Gewinn wegbleiben. Dann gibt es aber nur Eine Gleichung und daher darf das Exempel

nur Eine unbekannte Größe enthalten. Sobald aber eine der bekannten Größen, die in der ersten Gleichung vorkommen, durch ihr Verhältniß zu einer von den unbekannten Größen bestimmt wird, so ist die Auflösung der Aufgabe möglich und der mögliche Gewinn kann willkührlich angegeben werden. Es ist also dieser Fall nur in seinen Nebenfällen möglich, und von diesen wollen wir einen anführen.

12) Es kauft jemand 800 Ellen Tuch, bezahlt die Elle mit 3 thlr., verkauft davon einen Theil zu einem gewissen Preise, das Übrige aber $1\frac{1}{2}$ mal theurer, gewinnt so 400 thlr., hätte aber $1\frac{1}{2}$ mal so viel Thaler gewonnen, als er Ellen zuerst verkauft hat, wenn alles zu dem letztern Preise wäre verkauft worden. Wie viel Ellen hat er zuerst verkauft und wie theuer?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	x	y	a — x	my	f	qx

Erste Gleichung.

$$ab + qx = amy,$$

$$\text{also} \quad qx = amy - ab,$$

$$\text{folglich} \quad x = \frac{amy - ab}{q}.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = xy + amy - myx.$$

Zieht man diese Gleichung von der ersten ab, so kommt

$$qx - f = -xy + myx,$$

$$\text{also} \quad -f = -xy + myx - qx,$$

$$\text{oder} \quad f = xy - myx + qx,$$

$$\text{oder} \quad f = x(y - my + q).$$

Setzt man statt x den in der ersten Gleichung gefundenen Werth, so kommt

$$f = \frac{amy - ab}{q}(y - my + q),$$

$$\text{oder} \quad qf = (amy - ab)[y(1 - m) + q],$$

$$\text{oder} \quad qf = amy^2(1 - m) - aby(1 - m) + amqy - abq,$$

$$\text{also} \quad qf + abq = y^2am(1 - m) + y(amq - ab(1 - m)),$$

$$\text{oder} \quad q(f + ab) = y^2am(1 - m) + ya[mq - b(1 - m)].$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung folgt im zweiten Theile.

§. 272.

13) Exempel zu Nr. 13.

Es kauft jemand 100 Ztn. Kaffee, das Pfund für 6 gr., verkauft davon einen Theil, das Pfund für 8 gr., den übrigen so, daß er $1558\frac{1}{3}$ thlr. gewinnt und $1833\frac{1}{3}$ thlr. gewonnen hätte, wenn alles für den Preis des Restes verkauft worden wäre. Wie viel hat er zuerst verkauft und wie theuer den Rest bezahlt bekommen?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	x	d	a—x	y	f	g

Erste Gleichung.

$$ab + g = ay,$$

$$\text{also } b + \frac{g}{a} = y.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = xd + ay - xy.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g - f = -xd + xy,$$

oder $$g - f = x(y - d).$$

Statt y den Werth gesetzt, kommt

$$g - f = x\left(b + \frac{g}{a} - d\right),$$

$$\text{also } \frac{g-f}{b-d+\frac{g}{a}} = x.$$

Im Exempel ist $a = 100$ Ztn., $b = 6$ gr. $= \frac{1}{4}$ thlr. pro Pfund, also $\frac{110}{4}$ thlr. für den Zentner, $d = 8$ gr. $= \frac{1}{3}$ thlr., also $\frac{110}{3}$ thlr. für den Zentner, $f = 1558\frac{1}{3}$, $g = 1833\frac{1}{3}$ thlr.

Also $$x = \frac{1833\frac{1}{3} - 1558\frac{1}{3}}{\frac{110}{4} - \frac{110}{3} + \frac{1833\frac{1}{3}}{100}} = \frac{275}{\frac{330}{12} - \frac{440}{12} + \frac{5500}{300}}$$

$$= \frac{275}{-\frac{110}{12} + \frac{55}{3}} = \frac{275}{-\frac{110}{12} + \frac{220}{12}} = \frac{275}{\frac{110}{12}}$$

$$= \frac{12 \cdot 275}{110} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ Ztn.}$$

$$y = \frac{110}{4} + \frac{1833\frac{1}{3}}{100} = \frac{110}{4} + \frac{5500}{300} = \frac{110}{4} + \frac{55}{3}$$

$$= \frac{330}{12} + \frac{220}{12} = \frac{550}{12} = 45\frac{5}{6} \text{ thlr. für den Zentner,}$$

also für das Pfund $\frac{550 \cdot 24}{12 \cdot 110}$ gr. $= 10$ gr.

Es sind also von den 100 Ztn. zuerst 30 Ztn. das Pfund zu 8 gr., und dann 70 Ztn. das Pund zu 10 gr., verkauft worden. Dabei ist dann der wirkliche Gewinn $1558\frac{1}{3}$ thlr. und der mögliche $1833\frac{1}{3}$ thlr. gewesen.

14) Ein Nebenexempel ließe sich bilden, wenn man d durch x und g durch y ausdrückte, z. B. $d = \frac{x}{m}$ und $g = qy$.

Dann hieße die erste Gleichung

$$ab + qy = ay,$$

also $$ab = ay - qy,$$

$$= y(a - q),$$

folglich $$\frac{ab}{a-q} = y.$$

Die zweite Gleichung aber wäre

$$ab + f = \frac{x^2}{m} + ay - xy,$$

also $$mab + mf = x^2 + may - mxy,$$

oder $$m(ab + f) = x^2 + aym - mxy.$$

Statt y den Werth gesetzt, kommt

$$m(ab + f) = x^2 + \frac{abm(a-x)}{a-q},$$

oder $$ma^2b - mabq + maf - mfq = x^2(a-q) + a^2bm - abmx.$$

Folglich, da sich ma^2b auf beiden Seiten hebt, kommt die quadratische Gleichung

$$maf - mfq - mabq = x^2(a-q) - abmx,$$

oder $$m(af - fq - abq) = x^2(a-q) - abmx,$$

oder $$m[f(a-q) - abq] = x^2(a-q) - abmx.$$

Die Auflösung siehe im zweiten Theile.

§. 273.

15) Exempel zu Nr. 14.

Es kauft jemand 400 Ellen, die Elle zu 2 thlr., verkauft einen Theil, die Elle zu $2\frac{1}{2}$ thlr., den Rest zu $2\frac{3}{4}$ thlr., wie viel hätte er gewonnen und wie viel hat er zuerst verkauft, wenn man weiß, daß er 300 thlr. gewonnen hätte, wenn alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	x	d	a − x	e	y	g

Erste Gleichung.

$$ab + g = ae.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = xd + ae - ex.$$

Hier ist wieder der Fall, wie in Nr. 11. Der mögliche Gewinn ist unnöthig angegeben, weil er schon durch die Größen a, b und e bekannt ist. Auch ist er nur zufällig richtig. Aus der zweiten Gleichung aber kann nur Eine unbekannte Größe bestimmt werden; die Aufgabe gehört also zu den unbestimmten. Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man $g - y = -xd + xe$, oder $g - y = x(e - d)$, also $-y = x(e - d) - g$, oder $y = g - x(e - d)$. Man wird also einen realen Werth für y erhalten, wenn man x so bestimmt, daß $x(e - d)$ kleiner ist als g, und da $g = a(e - b)$ ist, so muß $x(e - d)$ kleiner als $a(e - b)$ sein. Unter dieser Bedingung kann man x beliebig wählen und man wird jedesmal einen positiven Werth für y erhalten. Umgekehrt, nimmt man y beliebig an, so muß, da $\frac{g - y}{e - d}$, oder $\frac{a(e - b) - y}{e - d} = x$ ist, y kleiner als $a(e - b)$ angenommen werden, wenn x einen realen Werth erhalten soll. Nach den Zahlen des Exempels ist g oder $a(e - b) = 300$ und $e - d = \frac{1}{4}$ thlr. Es muß also, wenn man x annehmen will, $x \cdot \frac{1}{4}$ kleiner sein als 300 und da es auch nicht größer, als die ganze Waare = 400 Ellen sein kann, in welchem Falle der Rest = 0 würde, so ist der höchste Werth für $x = 400$, also = a, dann ist $300 - 400 \cdot \frac{1}{4} = 200$ thlr. als der gesuchte Gewinn y. Nimmt man y an, so muß es, da $a(e - b) = 300$ ist, auch kleiner als 300 angenommen werden. Der höchste Werth für y ist also 300 selbst und dann wird $x = \frac{300 - 300}{e - d} = 0$, d. h. es ist gar nichts für den Preis d, sondern alles für den Preis e verkauft worden.

Drückt man im Exempel eine oder mehrere der bekannten Größen, die sich in der ersten Gleichung befinden, durch ihr Verhältniß zu den unbekannten aus, so wird die Aufgabe bestimmt. Z. B. es sei $g = my$, so ist die erste Gleichung $ab + my = ae$, also $my = a(e - b)$ und $y = \frac{a(e - b)}{m}$. Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten ab, so bleibt $my - y = x(e - d)$, oder $y(m - 1) = x(e - d)$.

Für y den Werth geschrieben, kommt $\frac{a(e-b)}{m}(m-1) = x(e-d)$, also $\frac{a(e-b)(m-1)}{m(e-d)} = x$.

Heißt es also z. B. in der Aufgabe: der mögliche Gewinn ist $\frac{4}{3}$ mal größer, als der wirkliche Gewinn, so ist $m = \frac{4}{3}$, also

$$y = \frac{400 \cdot \frac{3}{4} \text{ thlr.}}{\frac{4}{3}} = 400 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3600}{16} = 225 \text{ thlr.}$$

und $$x = \frac{400 \cdot \frac{3}{4} \cdot (\frac{4}{3} - 1)}{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{400 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 400 \cdot \frac{1}{4}$$
$$= 300 \text{ Ellen.}$$

Hätte man e durch y bestimmt, z. B. $e = \frac{y}{q}$, so wäre die erste Gleichung $ab + g = \frac{ay}{q}$, also $q(ab+g) = ay$ und folglich $y = \frac{q(ab+g)}{a}$. Zieht man nun wieder die zweite Gleichung von der ersten ab, so kommt $g - y = x\left(\frac{y}{q} - d\right)$, oder $g - y = \frac{xy}{q} - xd$, also, statt y den gefundenen Werth gesetzt, kommt

$$g - \frac{q(ab+g)}{a} = \frac{xq(ab+g)}{aq} - xd,$$

oder $$g - \frac{q(ab+g)}{a} = \frac{x(ab+g)}{a} - xd,$$

also $ag - q(ab+g) = x(ab+g) - adx,$
oder $ag - qab - qg = x(ab+g - ad),$
oder $g(a-q) - qab = x(g + a(b-d),$
oder $g(a-q) - qab = x(g - a(d-b),$

also $$\frac{g(a-q) - qab}{g - a(d-b)} = x.$$

Es sei den obigen Zahlen gemäß $q = 81\frac{9}{11} = \frac{900}{11}$, so ist

$$y = \frac{\frac{900}{11}(400 \cdot 2 + 300)}{400} = \frac{\frac{900}{11} \cdot 1100}{400} = \frac{900 \cdot 100}{400}$$
$$= 225 \text{ thlr.}$$

und $$x = \frac{300(400 - \frac{900}{11}) - \frac{900}{11} \cdot 400 \cdot 2}{300 - 400(2\frac{1}{2} - 2)}$$
$$= \frac{300 \cdot \frac{4400 - 900}{11} - \frac{900 \cdot 800}{11}}{300 - 400 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{300 \cdot 3500 - 720000}{11}}{300 - 200}$$
$$= \frac{\frac{1050000 - 720000}{11}}{100} = \frac{330000}{11 \cdot 100} = 300 \text{ Ellen.}$$

§. 274.

16) Exempel zu Nr. 15.

Es kauft jemand 840 Ztn. Zucker, das Pfund zu 8 gr., verkauft einen Theil, das Pfund zu 10gr., das Übrige zu $12\frac{1}{2}$gr., gewinnt $14116\frac{2}{3}$ thlr., wie viel hätte er gewonnen, wenn alles zu dem letztern Preise wäre verkauft worden und wie viel hat er zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	x	d	a — x	e	f	y

Erste Gleichung.

$$ab + y = ae,$$
$$\text{also} \quad y = a(e - b).$$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = xd + ae - xe,$$
$$\text{also} \quad xe - xd = ae - ab - f,$$
$$\text{oder} \quad x(e - d) = a(e - b) - f,$$
$$\text{folglich} \quad x = \frac{a(e-b)-f}{e-d}.$$

Wie man sieht, sind die Bestimmungen von x und y sehr leicht. Es ist $a = 840$ Ztn. $= 92400$ Pfd., $b = \frac{1}{3}$ thlr., $d = \frac{5}{12}$ thlr., $e = \frac{25}{48}$ thlr., $f = 14116\frac{2}{3}$ thlr. Also

$$y = 92400\left(\tfrac{25}{48} - \tfrac{1}{3}\right) = 92400\left(\tfrac{25}{48} - \tfrac{16}{48}\right) = 92400 \cdot \tfrac{9}{48}$$
$$= \tfrac{831600}{48} = 17325 \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{92400\left(\frac{25}{48} - \frac{1}{3}\right) - 14116\frac{2}{3}}{\frac{25}{48} - \frac{5}{12}} = \frac{92400 \cdot \frac{9}{48} - 14116\frac{2}{3}}{\frac{25}{48} - \frac{20}{48}}$$
$$= \frac{17325 - 14116\frac{2}{3}}{\frac{5}{48}} = \frac{3208\frac{1}{3}}{\frac{5}{48}} = \frac{9625}{3} \cdot \frac{48}{5}$$
$$= 1925 \cdot 16 = 30800 \text{ Pfd.} = 280 \text{ Ztn.}$$

17) Wir wollen in einem Nebenfalle d durch x und f durch y bestimmen und d durch $\frac{x}{m}$ und f durch $\frac{y}{q}$ ausdrücken, so bleibt die erste Gleichung unverändert, die zweite aber wird verwandelt in

$$ab + \frac{y}{q} = \frac{x^2}{m} + ae - xe.$$

Zieht man diese Gleichung von der ersten ab, so kommt

$$y - \frac{y}{q} = xe - \frac{x^2}{m},$$

oder $qmy - my = qmex - qx^2$,
also $ym(q-1) = qmex - qx^2$.

Für y den Werth gesetzt, kommt

$a(e-b)m(q-1) = qmex - qx^2$,
oder $qx^2 - qmex = -a(e-b)m(q-1)$,

eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile aufgelöst wird. Auch wenn man d und e durch x, oder d durch x und e durch y bestimmt hätte, würden quadratische Gleichungen gekommen sein.

Hätte man den Einkaufspreis b durch x, oder die ganze Waare a durch x bestimmt, so wären einfache Gleichungen gekommen. Es sei $b = \frac{x}{p}$, so heißt die erste Gleichung

$$\frac{ax}{p} + y = ae,$$

also $ax + py = pae$,
folglich $py = pae - ax$,
also $y = \frac{a(pe-x)}{p}$;

und die zweite Gleichung

$$\frac{ax}{p} + f = xd + ae - xe.$$

Diese von der ersten abgezogen, kommt

$$y - f = xe - xd,$$
oder $y = x(e-d) + f$.

Also hat man

$$\frac{a(pe-x)}{p} = x(e-d) + f,$$

oder $ape - ax = xp(e-d) + pf$,
folglich $ape - pf = xp(e-d) + ax$,
oder $p(ae-f) = x[p(e-d)+a]$,

also $\frac{p(ae-f)}{p(e-d)+a} = x$.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung für y, so kommt

$$y = \frac{a\left(pe - \frac{p(ae-f)}{p(e-d)+a}\right)}{p}.$$

Zähler und Nenner lassen sich mit p heben, also kommt

$$y = a\left(e - \frac{ae - f}{p(e-d)+a}\right)$$
$$= \frac{a[pe(e-d)+ae-ae+f]}{p(e-d)+a}$$
$$= \frac{a[pe(e-d)+f]}{p(e-d)+a}.$$

Beispiel.

Es kauft jemand 100 Ztn., und bezahlt für den Zentner 2 mal weniger Thaler, als er zuerst Zentner für den Preis von 25 thlr. pro Zentner verkauft. Das übrige verkauft er den Zentner zu 30 thlr. und gewinnt so 800 thlr., wie viel Zentner hat er zuerst verkauft und wie Thaler gewonnen, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte?

Im Exempel ist $a = 100$, $p = 2$, $f = 800$, $d = 25$, $e = 30$, also

$$y = \frac{100[2.30(30-25)+800]}{2(30-25)+100} = \frac{100(60.5+800)}{2.5+100}$$
$$= \frac{100.1100}{110} = 1000 \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{2(100.30-800)}{2(30-25)+100} = \frac{2.(3000-800)}{2.5+100} = \frac{4400}{110}$$
$$= 40 \text{ Ztn.}$$

Es sind also zuerst 40 Ztn. verkauft worden, und der Einkaufspreis ist $= \frac{40}{2} = 20$ thlr., der mögliche Gewinn aber $= 1000$ thlr.

Es sei $a = rx$, also die erste Gleichung

$$rxb + y = rxe,$$
$$\text{folglich} \quad y = rxe - rxb$$
$$= rx(e-b).$$

Zweite Gleichung.

$$rxb + f = xd + rxe - xe.$$

Diese von der ersten abgezogen, kommt

$$y - f = xe - xd$$
$$= x(e-d),$$

also, wenn man für y den Werth setzt, kommt

$$rx(e-b) - f = x(e-d),$$

folglich $rx(e-b) - x(e-d) = f$,

oder $x[r(e-b) - (e-d)] = f$,

daher $$x = \frac{f}{r(e-b)-(e-d)}.$$

Nach den Zahlen des vorigen Exempels ist $r = \frac{5}{2}$. Also

$$x = \frac{800}{\frac{5}{2}(30-20)-(30-25)} = \frac{800}{\frac{5}{2}.10-5} = \frac{800}{25-5}$$

$$= \frac{800}{20} = 40 \text{ Stn.}$$

Da $y = rx(e-b)$ war, so ist, für x den Werth gesetzt, $y = \frac{rf(e-b)}{r(e-b)-(e-d)}$ und wenn man Zähler und Nenner durch $r(e-b)$ dividirt, so kommt

$$y = \frac{f}{1-\frac{e-d}{r(e-b)}}.$$

Also in Zahlen

$$y = \frac{800}{1-\frac{30-25}{\frac{5}{2}(30-20)}} = \frac{800}{1-\frac{5}{\frac{5}{2}.10}} = \frac{800}{1-\frac{5}{25}} = \frac{800}{1-\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{800}{\frac{4}{5}} = 1000 \text{ thlr.}$$

§. 275.

18) Exempel zu Nr. 16.

Es kauft jemand 600 Wspl., den Wispel zu 40 thlr., verkauft 200 Wspl. für einen gewissen Preis, das Übrige so, daß er 6000 thlr. gewinnt, hätte aber 10000 thlr. gewonnen, wenn er alles zu dem Preise des Restes verkauft hätte. Wie theuer hat er den ersten Theil und den Rest verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	c	x	a—c	y	f	g

Erste Gleichung.

$$ab + g = ay,$$

$$\text{also } b + \frac{g}{a} = y.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = cx + ay - cy.$$

Diese von der ersten Gleichung abgezogen, kommt

$$g - f = -cy - cx.$$

Man setze statt y den Werth, so kommt

$$g - f = cb + \frac{cg}{a} - cx,$$

oder

$$g - f = \frac{acb + cg}{a} - cx,$$

oder

$$g - f - \frac{c(ab+g)}{a} = -cx,$$

oder

$$\frac{c(ab+g)}{a} - (g - f) = cx,$$

folglich

$$\frac{ab+g}{a} - \frac{g-f}{c} = x,$$

oder

$$b + \frac{g}{a} - \frac{g-f}{c} = x.$$

Im Exempel ist $b = 40$, $a = 600$, $c = 200$, $f = 6000$, $g = 10000$. Also

$$y = 40 + \frac{10000}{600} = 40 + 16\frac{2}{3} = 56\frac{2}{3} \text{ thlr.}$$

$$x = 40 + 16\frac{2}{3} - \frac{4000}{200} = 56\frac{2}{3} - 20 = 36\frac{2}{3} \text{ thlr.}$$

Es sind also die 200 Wspl. mit Schaden, nämlich der Wispel zu $36\frac{2}{3}$ thlr., der Rest aber mit bedeutendem Gewinn, nämlich der Wispel zu $56\frac{2}{3}$ thlr. verkauft worden.

§. 276.

19) Exempel zu Nr. 17.

Es kauft jemand 600 Ellen Tuch, die Elle zu $2\frac{3}{4}$ thlr., verkauft 180 Ellen zu einem gewissen Preise, das Übrige die Elle für $3\frac{1}{2}$ thlr., wie viel gewinnt er und wie theuer hat er zuerst die Elle verkauft, wenn er 450 thlr. gewonnen hätte, wofern alles für den letztern Preis wäre verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	c	x	a − c	e	y	g

Erste Gleichung.

$$ab + g = ae.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + y = cx + ae - ce.$$

Wie man aus den Gleichungen sieht, ist die Aufgabe wieder unbestimmt, wie in 11. und 15. Der mögliche Gewinn ist unnöthig angegeben, da er schon durch den Unterschied der Ausgabe und möglichen Einnahme bestimmt ist.

Um die Aufgabe bestimmt zu machen, wollen wir den möglichen Gewinn durch sein Verhältniß zum wirklichen aus-

drücken und statt g schreiben py, so heißt die erste Gleichung $ab + py = ae$, also $py = ae - ab = a(e-b)$ und folglich $y = \frac{a(e-b)}{p}$. Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten ab, so kommt

$$py - y = ce - cx,$$
$$\text{also } y(p-1) = ce - cx.$$

Statt y den Werth gesetzt, kommt

$$\frac{a(e-b)(p-1)}{p} = ce - cx,$$

$$\text{also } a(e-b)(p-1) = pce - pcx,$$
$$\text{folglich } pcx = pce - a(e-b)(p-1)$$
$$\text{daher } x = e - \frac{a(e-b)(p-1)}{pc}.$$

Im Exempel ist $a = 600$, $b = 2\frac{1}{4}$, $c = 180$, $e = 3\frac{1}{2}$, p sei $= 1\frac{1}{4}$, so ist

$$y = \frac{600.(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4})}{1\frac{1}{4}} = \frac{600(\frac{14}{4} - \frac{11}{4})}{\frac{5}{4}} = \frac{600 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}$$
$$= \frac{1800}{4} \cdot \frac{4}{5} = 360 \text{ thlr.}$$

$$x = 3\tfrac{1}{2} - \frac{600(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4})(1\frac{1}{4} - 1)}{\frac{5}{4} \cdot 180} = 3\tfrac{1}{2} - \frac{600 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{900}$$
$$= 3\tfrac{1}{2} - \frac{1800}{16} \cdot \frac{4}{900} = 3\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 3 \text{ thlr.}$$

Die ersten 180 Ellen sind also die Elle zu 3 thlr. verkauft worden und der mögliche Gewinn ist $\frac{5}{4} \cdot 360 = 450$ thlr.

§. 277.

20) Exempel zu Nr. 18.

Es kauft jemand 432 Wspl., den Wispel zu 20 thlr., verkauft 108 Wspl. für einen gewissen Preis, das übrige den Wispel zu 25 thlr., gewinnt so 1800 thlr., wie theuer hat er die 108 Wspl. verkauft und wie viel hätte er gewonen, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte?

Die Aufgabe ist so leicht, daß wir alle weitere Erörterung übergehen wollen. y ist $= a(e-b)$ und $x = e - \frac{a(e-b) - f}{c}$.

Wir wollen daher lieber einen Nebenfall betrachten und e durch x, a aber durch y bestimmen.

Es kauft also jemand Getreide, den Wispel zu 20 thlr., verkauft davon 108 Wspl. für einen gewissen Preis, das übrige

an Wispel $1\frac{2}{3}$ mal theurer, als er beim Verkaufe der 108 Wspl. bekam. Er gewinnt so 1800 thlr. Wie viel hätte er gewonnen, wenn alles zu dem letztern Preise wäre verkauft worden und wie theuer verkaufte er die 108 Wspl., wenn man weiß, daß er 5 mal weniger Wispel kaufte, als der mögliche Gewinn in Thalern beträgt?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
$\frac{y}{p}$	b	c	x	$\frac{y}{p}-c$	qx	f	y

Erste Gleichung.

$$\frac{yb}{p}+y=\frac{yqx}{p},$$

Mit y dividirt, kommt

$$\frac{b}{p}+1=\frac{qx}{p},$$

also $b+p=qx,$

folglich $\frac{b+p}{q}=x.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{yb}{p}+f=cx+\frac{qxy}{p}-cqx.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$y-f=cqx-cx$$
$$=xc(q-1).$$

Statt x den Werth gesetzt, kommt

$$y-f=\frac{b+p}{q}\cdot c(q-1),$$

also $y=\frac{(b+p)c(q-1)}{q}+f.$

Im Exempel ist $b=20,\ c=108,\ q=1\frac{2}{3}=\frac{15}{13},$ $p=5.$ Also

$$x=\frac{20+5}{\frac{15}{13}}=25\cdot\frac{13}{15}=\frac{5\cdot13}{3}=\frac{65}{3}=21\frac{2}{3}\text{ thlr.}$$

$$y=\frac{(20+5)\cdot108\,(1\frac{2}{3}-1)}{\frac{15}{13}}+1800=\frac{25\cdot108\cdot\frac{2}{3}}{\frac{15}{13}}+1800$$

$$=\frac{25\cdot108\cdot2}{13}\cdot\frac{13}{15}+1800=5\cdot36\cdot2+1800$$
$$=360+1800=2160\text{ thlr.}$$

Er hat also $\frac{2160}{5} = 432$ Wspl. eingekauft, die 108 Wspl. zu $21\frac{2}{3}$ thlr. verkauft und der mögliche Gewinn ist 2160 thlr.

§. 278.

21) Exempel zu Nr. 19.

Es kauft jemand 500 Ztn., den Zentner zu 40 thlr., verkauft davon 100 Ztn. zu 45 thlr., das übrige so, daß er einen bedeutenden Gewinn macht. Wie theuer verkauft er also den Rest und wie viel gewinnt er, wenn man weiß, daß der mögliche Gewinn 4000 thlr. betragen hätte?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	c	d	a — c	x	y	g

Erste Gleichung.

$$ab + g = ax,$$

$$\text{also} \quad b + \frac{g}{a} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + y = cd + ax - cx.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g - y = cx - cd.$$

Statt x den Werth gesetzt, kommt

$$g - y = cb + \frac{cg}{a} - cd,$$

$$\text{oder} \quad ag - ay = acb + cg - acd,$$

$$\text{also} \quad ag - acb + acd - cg = ay,$$

$$\text{oder} \quad \frac{g(a-c) + ac(d-b)}{a} = y,$$

$$\text{oder} \quad \frac{g(a-c)}{a} + c(d-b) = y.$$

Im Exempel ist $a = 500$, $b = 40$, $c = 100$, $d = 45$, $g = 4000$. Also

$$x = 40 + \frac{4000}{500} = 40 + 8 = 48 \text{ thlr.}$$

$$y = \frac{4000(500-100)}{500} + 100(45-40)$$

$$= \frac{4000 \cdot 400}{500} + 100 \cdot 5 = 3200 + 500$$

$$= 3700 \text{ thlr.}$$

Der Rest ist zu 48 thlr. pro Zentner verkauft und dabei sind 3700 thlr. gewonnen worden.

22)

22) Im Nebenexempel läßt sich c durch x und g durch y ausdrücken, z. B.

Es kauft jemand 400 Wspl., den Wispel zu 30 thlr., verkauft davon 100 Wspl., den Wispel $\frac{5}{6}$ mal wohlfeiler, als den Rest. Wie theuer verkauft er diesen und wie viel gewinnt er, wenn man weiß, daß der mögliche Gewinn $1\frac{1}{4}$ mal größer ist, als der wirkliche?

Es sei also $d = px$ und $g = my$, so ist die erste Gleichung $ab + my = ax$,

$$\text{also } b + \frac{my}{a} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + y = cpx + ax - cx.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$my - y = cx - cpx,$$

$$\text{oder } y(m-1) = cx - cpx,$$

$$\text{oder } y(m-1) = cx(1-p),$$

$$\text{also } \frac{y(m-1)}{c(1-p)} = x.$$

Daher die Gleichung

$$\frac{ab + my}{a} = \frac{y(m-1)}{c(1-p)}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$abc(1-p) + myc(1-p) = ay(m-1),$$

$$\text{also } abc(1-p) = ay(m-1) - myc(1-p),$$

$$\text{oder } abc(1-p) = y[a(m-1) - mc(1-p)],$$

$$\text{folglich } \frac{abc(1-p)}{a(m-1) - mc(1-p)} = y.$$

Im Exempel ist $a = 400$, $b = 30$, $c = 100$, $p = \frac{5}{6}$, $m = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Also ist

$$y = \frac{400.30.100(1-\frac{5}{6})}{400(1\frac{1}{4}-1) - \frac{5}{4}.100(1-\frac{5}{6})} = \frac{400.30.100.\frac{1}{6}}{400.\frac{1}{4} - \frac{5}{4}.100.\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{400.5.100}{100 - \frac{125}{6}} = \frac{400.5.100}{\frac{600-125}{6}} = \frac{400.5.100.6}{600-125}$$

$$= \frac{400.5.100.6}{475} = \frac{80.100.6}{19} = \frac{48000}{19} = 2526\frac{6}{19}\text{thlr.}$$

Setzt man in der Formel für x den für y gefundenen Werth, so erhält man x in bekannten Größen. Es ist also

$$x = b + \frac{my}{a} = b + \frac{mabc(1-p)}{a[(m-1) - mc(1-p)]a}$$

$$= b + \frac{mbc(1-p)}{a(m-1) - mc(1-p)}.$$

Ist [illegible] also

$$x = 30 + \frac{\frac{5}{4} \cdot 30 \cdot 100 \cdot \frac{3}{8}}{100 \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 100 \cdot \frac{3}{8}} = 30 + \frac{5 \cdot 5 \cdot 25}{100 - 1 \cdot 5 \cdot \frac{3}{8}}$$

$$= 30 + \frac{625}{\frac{[illegible]}{[illegible]}} = 30 + \frac{[illegible]}{[illegible]} = 30 + \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

$$= 30 + \frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible] \text{ thlr.}$$

Da $yx = \frac{5}{4} \cdot 3\frac{[illegible]}{[illegible]}$ thlr. $= \frac{5}{4} \cdot \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]} = 3[illegible]$ thlr. ist, so sind die 100 Wspl. zu $3\frac{[illegible]}{[illegible]}$ thlr., die übrigen 300 Wspl. zu $3\frac{[illegible]}{[illegible]}$ thlr. verkauft worden. Die Einnahme ist so $14526\frac{[illegible]}{[illegible]}$ thlr., die Ausgabe 12000 thlr., also der wirkliche Gewinn $= 2526\frac{[illegible]}{[illegible]}$ thlr. Die mögliche Einnahme ist $1515\frac{[illegible]}{[illegible]}$ thlr., also der mögliche Gewinn $= 315\frac{[illegible]}{[illegible]}$ thlr. und dieser ist $\frac{5}{4}$ mal so groß, als der wirkliche, denn $\frac{5}{4} \cdot 2526\frac{[illegible]}{[illegible]} = 315\frac{[illegible]}{[illegible]}$.

§ 279.

23) Exempel zu Nr. 20.

Es kauft jemand 450 Ellen, die Elle zu 3 thlr., verkauft 130 Ellen, die Elle zu $3\frac{1}{2}$ thlr., das Übrige so, daß er 900 thlr. gewinnt. Wie theuer also der Rest, und wie viel hätte er gewinnen können, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	c	d	a − c	x	f	y

Erste Gleichung.

$$ab + y = ax,$$

also $$b + \frac{y}{a} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = cd + ax - cx.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$y - f = cx - cd.$$

Für x den Werth gesetzt, kommt

$$y - f = cb + \frac{cy}{a} - cd,$$

also $$ay - af = acb + cy - acd,$$

oder $$ay - cy = acb - acd + af,$$

oder $$y(a - c) = a(cb - cd + f)$$
$$= a[c(b - d) + f],$$

also $$y = \frac{a[c(b - d) + f]}{a - c}.$$

Im Exempel ist $a = 450$, $c = 130$, $b = 3$, $d = 3\frac{1}{2}$, $f = 900$. Also

$$y = \frac{450[130(3-3\frac{1}{2})+900]}{450-130} = \frac{450(900-65)}{320} = \frac{45.835}{32}$$
$$= 1174\frac{7}{32} \text{ thlr.}$$

Es war $x = b + \frac{y}{a} = b + \frac{(b-d)+f}{a-c}$, folglich in Zahlen

$$x = 3 + \frac{130(3-3\frac{1}{2})+900}{450-130} = 3 + \frac{130.-\frac{1}{2}+900}{320}$$
$$= 3 + \frac{-65+900}{320} = 3 + \frac{835}{320} = 3 + \frac{167}{64} = 3 + 2\frac{39}{64}$$
$$= 5\frac{39}{64} \text{ thlr.}$$

Der Rest ist also die Elle zu $5\frac{39}{64}$ thlr. verkauft und so wirklich 900 thlr. gewonnen worden. Hätte aber alles so theuer verkauft werden können, so würde der Gewinn $1174\frac{7}{32}$ thlr. betragen haben.

In einem Nebenexempel könnte man f durch y, z. B. $f = \frac{y}{q}$, und d oder b durch x bestimmen, z. E. $b = \frac{x}{m}$, oder $d = \frac{x}{p}$. Die Ausführung wollen wir dem Schüler überlassen.

24) Exempel zu Nr. 21.

Es kauft jemand 80 Ztn. den Zentner zu 20 thlr., verkauft davon 30 Ztn. zu 25 thlr., das Übrige zu 28 thlr., wie viel gewinnt er wirklich und wie viel hätte er gewinnen können, wenn alles für den letztern Preis wäre verkauft worden?

Das Exempel braucht kaum einer algebraischen Entwicklung, höchstens kann diese zur Abkürzung der Rechnung dienen. Nimmt man die Buchstaben in der Bedeutung, wie sie bisher immer gebraucht worden sind, so ist der mögliche Gewinn $y = a(e-b)$ und der wirkliche $x = a(e-b) - c(e-d)$.

Als Nebenfall könnte man e durch y und d durch x bestimmen, also z. B. $e = \frac{y}{p}$, $d = \frac{x}{m}$. Dann wäre die erste Gleichung

$$ab + y = \frac{ay}{p},$$

also $abp + py = ay$,
oder $abp = ay - py$,
oder $abp = y(a-p)$,
also $\frac{abp}{a-p} = y$.

Zweite Gleichung.

$$ab + x = \frac{cx}{m} + \frac{ay}{p} - \frac{cy}{p}.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$y - x = \frac{cy}{p} - \frac{cx}{m},$$

also $pmy - pmx = mcy - pcx,$

oder $pmy - mcy = pmx - pcx,$

oder $ym(p-c) = px(m-c).$

Für y den Werth gesetzt, kommt

$$\frac{abpm(p-c)}{a-p} = px(m-c),$$

also $abm(p-c) = x(m-c)(a-p)$

Daher $\frac{abm(p-c)}{(m-c)(a-p)} = x.$

Beispiel.

25) Es kauft jemand 800 Ellen, die Elle zu 2 thlr., verkauft 250 Ellen, die Elle für $358\frac{1}{3}$ mal weniger Thaler, als er wirklich gewinnt und vom Reste die Elle für $342\frac{6}{7}$ mal weniger Thaler, als er hätte gewinnen können, wenn er alles zu dem Preise des Restes verkauft hätte. Wie viel beträgt der wirkliche und mögliche Gewinn?

Es ist also $a = 800$, $b = 2$ thlr., $c = 250$ Ellen, $m = 358\frac{1}{3} = \frac{1075}{3}$ und $p = 342\frac{6}{7} = \frac{2400}{7}$. Folglich

$$y = \frac{abp}{a-p} = \frac{800 \cdot 2 \cdot \frac{2400}{7}}{800 - \frac{2400}{7}} = \frac{\frac{1600 \cdot 2400}{7}}{\frac{5600-2400}{7}}$$

$$= \frac{1600 \cdot 2400}{3200} = 1200 \text{ thlr.}$$

$$x = \frac{800 \cdot 2 \cdot \frac{1075}{3}\left(\frac{2400}{7} - 250\right)}{\left(\frac{1075}{3} - 250\right)\left(800 - \frac{2400}{7}\right)} = \frac{\frac{1600 \cdot 1075 \cdot 650}{3 \cdot 7}}{\frac{325 \cdot 3200}{3 \cdot 7}}$$

$$= \frac{1600 \cdot 1075 \cdot 650}{325 \cdot 3200} = \frac{16 \cdot 1075 \cdot 650}{325 \cdot 32} = \frac{1075 \cdot 650}{325 \cdot 2}$$

$$= 1075 \text{ thlr.}$$

Es sind also wirklich 1075 thlr. gewonnen worden, der mögliche Gewinn aber wäre 1200 thlr. gewesen. Die 250 Ellen sind zu $\frac{1075}{358\frac{1}{3}} = \frac{3225}{1075} = 3$ thlr., und der Rest zu $\frac{1200}{342\frac{6}{7}} = \frac{8400}{2400} = 3\frac{1}{2}$ thlr. verkauft worden.

§. 280.

26) Exempel zu Nr. 22.

Es hat jemand Zucker gekauft und verkauft davon einen Theil, den Zentner zu 30 thlr., die übrigen 250 Ztn. aber zu 36 thlr., gewinnt so 2400 thlr. und hätte 3600 thlr. gewonnen, wenn alles zu dem letztern Preise wäre verkauft worden. Wie theuer hat er eingekauft und wie viel Zentner zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
r+x	y	x	d	r	e	f	g

Erste Gleichung.

$$ry+xy+g = re+xe,$$

also $$g+ry-re = xe-yx,$$

oder $$g+ry-re = x(e-y),$$

folglich $$\frac{g+r(y-e)}{e-y} = x,$$

oder $$\frac{g-r(e-y)}{e-y} = x,$$

folglich $$\frac{g}{e-y}-r = x.$$

Zweite Gleichung.

$$ry+xy+f = xd+re.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g-f = xe-xd,$$

oder $$g-f = x(e-d),$$

also $$\frac{g-f}{e-d} = x.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{g}{e-y}-r = \frac{g-f}{e-d}, \text{ folglich}$$

$$g(e-d)-r(e-d)(e-y) = (g-f)(e-y),$$

also $$g(e-d) = (g-f)(e-y)+r(e-d)(e-y),$$

oder $$g(e-d) = [g-f+r(e-d)](e-y).$$

Also $$\frac{g(e-d)}{g-f+r(e-d)} = e-y.$$

Folglich $$y = e-\frac{g(e-d)}{g-f+r(e-d)}.$$

Im Exempel ist $d = 30$ thlr., $e = 36$ thlr., $g = 3600$ thlr., $f = 2400$ thlr., $r = 250$ Stn. Also

$x = \frac{3600-2400}{36-30} = \frac{1200}{6} = 200$ Stn.,

folglich die ganze Waare $= r + x = 450$ Stn.

$$y = 36 - \frac{3600(36-30)}{3600-2400+250(36-30)} = 36 - \frac{3600 \cdot 6}{1200+250 \cdot 6}$$

$$= 36 - \frac{3600}{200+250} = 36 - \frac{3600}{450} = 36 - 8 = 28 \text{ thlr.}$$

Der Einkaufspreis war also 28 thlr.

Man kann in diesem Exempel d und e durch y, f und g durch x ausdrücken. Es sei also $d = my$, $e = py$, $f = qx$, $g = sx$.

Erste Gleichung.

$$ry + yx + sx = rpy + xpy,$$

also $yx + sx - xpy = rpy - ry,$

oder $x[(s - y(p-1)] = yr(p-1),$

also $$x = \frac{yr(p-1)}{s - y(p-1)}.$$

Zweite Gleichung.

$$ry + xy + qx = myx + rpy,$$

also $xy + qx - myx = rpy - ry,$

oder $x[y(1-m) + q] = ry(p-1),$

folglich $$x = \frac{ry(p-1)}{y(1-m)+q} = \frac{ry(p-1)}{q - y(m-1)}.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{ry(p-1)}{q-y(m-1)} = \frac{ry(p-1)}{s-y(p-1)}.$$

Wenn gleiche Brüche gleiche Zähler haben, so müssen auch die Nenner gleich sein. Also ist

$$q - y(m-1) = s - y(p-1),$$

folglich $q - s = y(m-1) - y(p-1),$

oder $q - s = y(m - 1 - p + 1),$

oder $q - s = y(m-p),$

also $$\frac{q-s}{m-p} = y = \frac{s-q}{p-m}.$$

Nach den Zahlen des obigen Exempels sei $m = \frac{15}{14}$, $p = \frac{9}{7}$, $q = 12$, $s = 18$. Also ist

$$y = \frac{s-q}{p-m} = \frac{18-12}{\frac{9}{7} - \frac{15}{14}} = \frac{6}{\frac{18-15}{14}} = \frac{6 \cdot 14}{3}$$

$$= 28 \text{ thlr.}$$

$x = \frac{ry(p-1)}{s-y(p-1)}$. Da $y = \frac{s-q}{p-m}$ ist, so ist

$$x = \frac{\frac{r(s-q)(p-1)}{p-m}}{s-\frac{s-q}{p-m}(p-1)} = \frac{\frac{r(s-q)(p-1)}{p-m}}{\frac{s(p-m)-(s-q)(p-1)}{p-m}}$$

$$= \frac{r(s-q)(p-1)}{s(p-m)-(s-q)(p-1)} = \frac{r}{\frac{s(p-m)}{(s-q)(p-1)}-1}$$

Also in Zahlen

$$x = \frac{250}{\frac{18(\frac{5}{4}-\frac{1}{14})}{(18-12)(\frac{2}{7}-1)}-1} = \frac{250}{\frac{18\cdot 3}{14}-1} = \frac{250}{\frac{54}{14}\cdot\frac{7}{12}-1}$$

$$= \frac{250}{\frac{9}{4}-1} = \frac{250}{\frac{5}{4}} = \frac{250\cdot 4}{5} = 200 \text{ Ztn.}$$

Es wurde also die Waare eingekauft, der Zentner zu 28 thlr., die 200 Ztn. wurden verkauft zu $28\cdot\frac{15}{14} = 30$ thlr., die 250 Ztn. zu $28\cdot\frac{9}{7} = 36$ thlr. Der wirkliche Gewinn war $= 12\cdot 200 = 2400$ thlr., der mögliche Gewinn $= 18\cdot 200 = 3600$ thlr.

§. 281.

27) Exempel zu Nr. 23.

Es kostet jemanden der Wispel Getreide 50 thlr., von seinem Vorrathe verkauft er einen Theil zu einem gewissen Preise, die übrigen 320 Wspl. zu 64 thlr., gewinnt bei diesem Handel 6000 thlr. und hätte 8000 gewonnen, wenn er alles zu dem Preise des Restes verkauft hätte. Wie viel Getreide hat er zuerst und wie theuer dasselbe verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
$r+x$	b	x	y	r	e	f	g

Erste Gleichung.

$$rb+xb+g = re+xe,$$

also $g+r(b-e) = x(e-b)$,

oder $g-r(e-b) = x(e-b)$,

also $\frac{g-r(e-b)}{e-b} = x$,

oder $\frac{g}{e-b}-r = x$.

Zweite Gleichung.

$$rb + xb + f = xy + re.$$

Von der ersten Gleichung diese abgezogen, kommt

$$g - f = xe - xy,$$

oder $$g - f = x(e - y),$$

also $$\frac{g-f}{e-y} = x.$$

Daher $$\frac{g}{e-b} - r = \frac{g-f}{e-y},$$

oder $$\frac{g - r(e-b)}{e-b} = \frac{g-f}{e-y}.$$

Also $ge - gy - re(e-b) + ry(e-b) = ge - gb - fe + fb.$

Folglich $gb - fb + fe - re(e-b) = gy - ry(e-b),$

oder $gb + f(e-b) - re(e-b) = y[g - r(e-b)],$

oder $gb - (re-f)(e-b) = y[g - r(e-b)].$

Also $$\frac{gb - (re-f)(e-b)}{g - r(e-b)} = y.$$

Im Exempel ist $b = 50$, $e = 64$, $g = 8000$, $f = 6000$, $r = 320$. Es ist also

$$x = \frac{8000}{64-50} - 320 = \frac{8000}{14} - 320 = 571\tfrac{3}{7} - 320$$
$$= 251\tfrac{3}{7} \text{ Wspl.}$$

Das ganze Getreide betrug also $320 + 251\frac{3}{7} = 571\frac{3}{7}$ Wspl.

$$y = \frac{8000 \cdot 50 - (320 \cdot 64 - 6000)(64-50)}{8000 - 320(64-50)}$$

$$= \frac{400000 - (20480 - 6000) \cdot 14}{8000 - 320 \cdot 14} = \frac{400000 - 14480 \cdot 14}{8000 - 4480}$$

$$= \frac{400000 - 202720}{3520} = \frac{197280}{3520} = 56\tfrac{1}{22} \text{ thlr.}$$

Es sind also $571\frac{3}{7}$ Wspl., der Wispel zu 50 thlr., eingekauft worden, also die Ausgabe $28571\frac{3}{7}$ thlr. Verkauft wurden $251\frac{3}{7}$ Wspl. zu $56\frac{1}{22}$ thlr. und 320 Wspl. zu 64 thlr., daher die ganze Einnahme $34571\frac{3}{7}$ thlr., folglich der wirkliche Gewinn 6000 thlr., die mögliche Einnahme $36571\frac{3}{7}$ thlr., also der mögliche Gewinn 8000 thlr.

Im Nebenexempel könnte man e durch y, f durch x bestimmen. Wir wollen es der eigenen Ausführung überlassen.

§. 282.

28) Exempel zu Nr. 24.

Von einem Vorrathe Tuch, wovon die Elle $2\frac{1}{2}$ thlr. kostet, wird ein Theil zu 3 thlr., die übrigen 640 Ellen aber so verkauft, daß zusammen 770 thlr. gewonnen werden. Man hätte

aber 900 thlr. gewinnen können, wenn alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel wurde zuerst und wie theuer der Rest verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
$x+x$	b	x	d	r	y	f	g

Erste Gleichung.

$$rb+xb+g = ry+xy,$$

also $rb-ry+g = xy-xb,$

oder $r(b-y)+g = x(y-b),$

oder $g-r(y-b) = x(y-b),$

also $\frac{g}{y-b}-r = x.$

Zweite Gleichung.

$$rb+xb+f = xd+ry,$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g-f = xy-xd,$$

oder $g-f = x(y-d),$

also $\frac{g-f}{y-d} = x.$

Daher $\frac{g-f}{y-d} = \frac{g-r(y-b)}{y-b}.$

Also $gy-bg-fy+bf = gy-gd-yr(y-b)+dr(y-b),$

oder $gd-bg+bf = fy-y^2r+yrb+dry-drb,$

oder $gd-bg+fb+drb = -y^2r+fy+yrb+dy,$

oder $g(d-b)+b(f+dr) = -y^2r+y(f+r(b+d)).$

Eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile aufgelöst wird.

Bestimmt man im Nebenexempel b und d durch y, und f und g durch x, so kommen einfache Gleichungen. Es sei $b = \frac{y}{p}$, $d = \frac{y}{q}$, $f = mx$ und $g = sx$, so hat man die Gleichungen:

Erste Gleichung.

$$\frac{ry}{p}+\frac{xy}{p}+sx = ry+xy,$$

also $ry+xy+psx = pry+pxy,$

oder $xy-pxy+psx = pry-ry,$

also $x[y(r-p)+ps] = yr(p-1),$

folglich $x = \frac{yr(p-1)}{y(1-p)+ps}.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{ry}{p} + \frac{xy}{p} + mx = \frac{xy}{q} + ry.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$sx - mx = xy - \frac{xy}{q},$$

also $qsx - qmx = qxy - xy.$

Alles durch x dividirt, kommt

$$qs - qm = qy - y,$$

oder $q(s-m) = y(q-1),$

also $\frac{q(s-m)}{q-1} = y.$

Setzt man diesen Werth statt y in die erste Gleichung, so kommt

$$x = \frac{\frac{q(s-m)r(p-1)}{q-1}}{\frac{q(s-m)(r-p)}{q-1} + ps} = \frac{\frac{q(s-m)r(p-1)}{q-1}}{\frac{q(s-m)(r-p)+ps(q-1)}{q-1}}$$

$$= \frac{q(s-m)r(p-1)}{ps(q-1)-q(s-m)(p-1)}.$$

Es sei $p = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$, $q = 1\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$, $m = 3$, $s = 4$, $r = 640$, so ist

$$y = \frac{\frac{7}{6}(4-3)}{\frac{7}{6}-1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{7}{6}\cdot\frac{6}{1} = 7.$$

$$x = \frac{\frac{7}{6}(4-3)\,640\,(\frac{7}{5}-1)}{\frac{7}{6}\cdot 4\,(\frac{7}{5}-1) - \frac{7}{6}(4-3)(\frac{7}{5}-1)} = \frac{\frac{7}{6}\cdot 640\cdot\frac{2}{5}}{\frac{7}{6}\cdot 4\cdot\frac{2}{5} - \frac{7}{6}\cdot\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{\frac{7\cdot 640\cdot 2}{6\cdot 5}}{\frac{28}{30} - \frac{14}{30}} = \frac{\frac{7\cdot 128}{3}}{\frac{14}{30}} = \frac{7\cdot 128}{3}\cdot\frac{30}{14} = 64\cdot 10$$

$= 640$ Ellen.

Da nun r auch $= 640$ Ellen ist, so ist die ganze Waare $= r + x = 1280$ Ellen. Die Elle ist eingekauft worden für $\frac{y}{p} = \frac{7}{\frac{7}{5}} = 7\cdot\frac{5}{7} = 5$ thlr. und die ersten 640 Ellen verkauft für $\frac{y}{q} = \frac{7}{\frac{7}{6}} = 7\cdot\frac{6}{7} = 6$ thlr., die übrigen 640 Ellen aber zu 7 thlr. Dabei ist denn gewonnen worden $mx = 3\cdot 640 = 1920$ thlr., und der mögliche Gewinn wäre gewesen $4\cdot x = 2560$ thlr.

§. 283.

29) Exempel zu Nr. 25.

Von einem Vorrathe Zucker kostet der Zentner beim Einkaufe 30 thlr., ein Theil wird verkauft zu 36 thlr., die übrigen

260 Ztn. zu 40 thlr. Wie viel wird gewonnen, wenn man weiß, daß der mögliche Gewinn 4000 thlr. betragen hätte, und wie viel wurde zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
$t+x$	b	x	d	r	e	y	g

Erste Gleichung.

$$rb+xb+g = re+xe,$$
$$\text{also } rb-re+g = xe-xb,$$
$$\text{oder } r(b-e)+g = x(e-b),$$
$$\text{oder } g-r(e-b) = x(e-b),$$
$$\text{also } \frac{g}{e-b}-r = x.$$

Zweite Gleichung.

$$rb+xb+y = xd+re.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g-y = xe-xd,$$
$$\text{oder } g-y = x(e-d),$$
$$\text{also } \frac{g-y}{e-d} = x.$$

Folglich hat man

$$\frac{g-y}{e-d} = \frac{g-r(e-b)}{e-b},$$

oder $g(e-b)-y(e-b) = g(e-d)-r(e-b)(e-d)$,
Folglich $g(e-b)-g(e-d)+r(e-b)(e-d) = y(e-b)$,
oder $g(e-b-e+d)+r(e-b)(e-d) = y(e-b)$,
oder $g(d-b)+r(e-b)(e-d) = y(e-b)$,
Also $\frac{g(d-b)}{e-b}+r(e-d) = y.$

Im Exempel ist $b = 30$, $d = 36$, $e = 40$, $r = 260$, $g = 4000$, also

$$x = \frac{g}{e-b}-r = \frac{4000}{40-30}-260 = \frac{4000}{10}-260$$
$$= 400-260 = 140 \text{ Ztn.}$$
$$y = \frac{4000(36-30)}{40-30}+260(40-36) = \frac{4000\cdot 6}{10}+260\cdot 4$$
$$= 400\cdot 6+1040 = 2400+1040 = 3440 \text{ thlr.}$$

Es sind also zusammen 400 Ztn. Zucker gewesen, welche 12000 thlr. gekostet haben. Davon wurden verkauft 140 Ztn.

zu 36 thlr., und 260 Stn. zu 40 thlr., also die ganze Einnahme 15440 thlr., folglich der wirkliche Gewinn = 3440 thlr., die mögliche Einnahme = 16000 thlr., folglich der mögliche Gewinn = 4000 thlr.

In einem Nebenfalle kann man z. B. d und e durch y, g durch x bestimmen.

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
$r+x$	b	x	$\frac{y}{p}$	r	$\frac{y}{q}$	y	mx

Erste Gleichung.

$$rb+xb+mx = \frac{ry}{q}+\frac{xy}{q},$$

also $qrb+qxb+qmx = ry+xy,$
folglich $qxb+qmx-xy = ry-qrb,$
oder $x(qb+qm-y) = ry-qrb,$
also $$x = \frac{ry-qrb}{qb+qm-y}.$$

Zweite Gleichung.

$$rb+xb+y = \frac{xy}{p}+\frac{ry}{q}.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$mx-y = \frac{xy}{q}-\frac{xy}{p},$$

also $pqmx-pqy = pxy-qxy.$
Folglich $pqmx-pxy+qxy = pqy,$
oder $x(pqm-py+qy) = pqy.$
Daher $$x = \frac{pqy}{pqm-py+qy}.$$
Folglich ist $$\frac{ry-qrb}{qb+qm-y} = \frac{pqy}{pqm-py+qy}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$pqmry-pq^2mrb-pry^2+pqrby+qry^2-q^2rby = pq^2by+pq^2my-pqy^2.$$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht, kommt

$$pqy^2-pry^2+qry^2+pqmry+pqrby-pq^2by-pq^2my-q^2rby = pq^2mrb.$$

Oder

$$y^2(pq-pr+qr)+y(pqmr+pqrb-pq^2b-q^2rb-pq^2m) = pq^2mrb.$$

Oder

$$y^2[pq+r(q-p)]+y[pq(mr+rb-qb-qm)-q^2rb] = pq^2mrb.$$

Oder

$$y^2[pq+r(q-p)]+y[pq[r(m+b)-q(b+m)]-q^2rb] = pq^2mrb.$$

Oder

$$y^2(pq+r(q-p)+y[pq(r-q)(b+m)-q^2rb] = pq^2mrb.$$

Die weitere Auflösung siehe im zweiten Theile.

§. 284.

30) Exempel zu Nr. 26.

Von einer Partie Tuch kostet die Elle 3 thlr., ein Theil wird verkauft die Elle für $3\frac{1}{4}$ thlr., die übrigen 480 Ellen zu $4\frac{1}{6}$ thlr. Man gewinnt so 800 thlr., wie viel hätte man gewinnen können, wenn alles für den letztern Preis wäre verkauft worden, und wie viel Ellen wurden zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
$r+x$	b	x	d	r	e	f	y

Erste Gleichung.

$$rb+xb+y = re+xe,$$
$$\text{also } y+rb-re = xe-xb,$$
$$\text{oder } y-(re-rb) = x(e-b),$$
$$\text{oder } y-r(e-b) = x(e-b),$$
$$\text{also } \frac{y}{e-b}-r = x.$$

Zweite Gleichung.

$$rb+xb+f = xd+re.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$y-f = xe-xd,$$
$$\text{also } y-f = x(e-d),$$
$$\text{folglich } \frac{y-f}{e-d} = x.$$

Daher

$$\frac{y-f}{e-d} = \frac{y-r(e-b)}{e-b}.$$

Also $(y-f)(e-b) = y(e-d)-r(e-b)(e-d)$,
oder $y(e-b)-f(e-b) = y(e-d)-r(e-b)(e-d)$,
folglich $y(e-b)-y(e-d) = f(e-b)-r(e-b)(e-d)$,
oder $y[(e-b)-(e-d)] = (e-b)[f-r(e-d)]$,

also $y = \frac{(e-b)[f-r(e-d)]}{(e-b)-(e-d)} = \frac{(e-b)[f-r(e-d)]}{e-b-e+d}$

$= \frac{(e-b)[f-r(e-d)]}{d-b}$.

Im Exempel ist $b = 3$, $d = 3\frac{3}{4}$, $r = 480$, $e = 4\frac{1}{8}$, $f = 800$. Also

$y = \frac{(4\frac{1}{8}-3)[800-480(4\frac{1}{8}-3\frac{3}{4})]}{3\frac{3}{4}-3} = \frac{1\frac{1}{8}(800-480(4\frac{2}{32}-3\frac{24}{32}))}{\frac{3}{4}}$

$= \frac{\frac{7}{8}(800-480.\frac{5}{32})}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{8}(800-40.5)}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{8}.\frac{4}{3}.600$

$= \frac{7.4.100}{3} = \frac{2800}{3} = 933\frac{1}{3}$ thlr. Also

$x = \frac{y}{e-b} - r = \frac{933\frac{1}{3}}{4\frac{1}{8}-3} - 480 = \frac{\frac{2800}{3}}{1\frac{1}{8}} - 480$

$= \frac{2800}{3.\frac{7}{8}} - 480 = \frac{2800.2}{7} - 480 = 800 - 480$

$= 320$ Ellen.

Es sind also $320 + 480 = 800$ Ellen, die Elle zu 3 thlr. gekauft worden, also die Ausgabe $= 2400$ thlr. Verkauft wurden 320 Ellen, die Elle zu $3\frac{3}{4}$ thlr., also Einnahme 1200 thlr., dann 480 Ellen zu $4\frac{1}{8}$, also Einnahme 2000 thlr., folglich ganze Einnahme 3200 thlr., daher der wirkliche Gewinn $=$ 800 thlr. Wenn aber alles zu $4\frac{1}{8}$ thlr. verkauft worden wäre, so wäre die Einnahme gewesen $\frac{20000}{8} = 3333\frac{1}{3}$ thlr., folglich der mögliche Gewinn $= 933\frac{1}{3}$ thlr.

31) Um ein Nebenexempel zu bilden, könnte man b und d durch x, e und f durch y ausdrücken, z. B. $b = \frac{x}{m}$, $d = \frac{x}{p}$, $e = \frac{y}{q}$, $f = \frac{y}{s}$. Also erste Gleichung

$$\frac{rx}{m} + \frac{x^2}{m} + y = \frac{ry}{q} + \frac{xy}{q},$$

also $qrx + qx^2 + qmy = mry + mxy$.
Oder $qx^2 + qrx - mxy = mry - qmy$.
Oder $qx^2 + x(qr - my) = my(r - q)$.

Zweite Gleichung.

$$\frac{rx}{m} + \frac{x^2}{m} + \frac{y}{s} = \frac{x^2}{p} + \frac{ry}{q}.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$y - \frac{y}{s} = \frac{xy}{q} - \frac{x^2}{p},$$

also $pqsy - pqy = psxy - sqx^2$.

Die weitere Auflösung siehe im zweiten Theile.

§. 285.

Zum Beschluß wollen wir noch einige Fälle bemerken, wo eine der bekannten Größen vermittelst einer Proportion durch die unbekannten Größen bestimmt wird.

32) Es kauft jemand 800 Wspl., den Scheffel zu $\frac{4}{5}$ thlr., verkauft davon einen Theil zu einem gewissen Preise, das übrige den Scheffel zu $1\frac{1}{4}$ thlr., gewinnt so 3000 thlr.; wenn er aber alles zu dem letztern Preise verkauft hätte, so hätte er so vielmal mehr gewonnen, so vielmal der ganze Vorrath den zuerst verkauften Theil übertrifft. Wie viel hat er zuerst verkauft und wie theuer den Scheffel?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	x	y	a — x	e	f	zf

Der mögliche Gewinn zf ist aus der angegebenen Proportion bekannt. Es soll sich nämlich verhalten $x : a = f : zf$, folglich $zf = \frac{af}{x}$ und mit f auf beiden Seiten dividirt, kommt $z = \frac{a}{x}$, welchen Werth wir also gleich für z setzen wollen.

Erste Gleichung.

$$ab + \frac{af}{x} = ae,$$

also $xab + af = aex,$

oder $af = aex - abx,$

oder $f = ex - bx,$

oder $f = x(e - b),$

also $\frac{f}{e-b} = x.$

Zweite Gleichung.

$$ab + f = xy + ae - xe,$$

also $xe - xy = ae - ab - f,$

oder $x(e - y) = a(e - b) - f,$

folglich $x = \frac{a(e-b)-f}{e-y}.$

Daher $\frac{f}{e-b} = \frac{a(e-b)-f}{e-y},$

also $fe - fy = a(e-b)^2 - fe + fb,$

oder $2fe - a(e-b)^2 - fb = fy,$

oder $f(2e - b) - a(e-b)^2 = fy,$

folglich $2e - b - \frac{a(e-b)^2}{f} = y.$

Im Exempel iſt $a = 800$, $b = \frac{2}{3}$ thlr. pro Scheffel, alſo 20 thlr. pro Wiſpel, $c = 1\frac{1}{2}$ thlr. pro Scheffel, alſo 30 thlr. pro Wiſpel, $f = 3000$ thlr. Daher

$$x = \frac{3000}{30-20} = \frac{3000}{10} = 300 \text{ Wiſpl.}$$

$$y = 2.30 - 20 - \frac{800(30-20)^2}{3000} = 60 - 20 - \frac{800.x^2}{3000}$$

$$= 40 - \frac{800 \cdot 100}{3000} = 40 - \frac{80}{3} = 40 - 26\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3} \text{ thlr.}$$

pro Wiſpel oder $13\frac{1}{3}$ gr. pro Scheffel. Da nun $zf = \frac{af}{x}$ iſt, ſo iſt der mögliche Gewinn $= \frac{800 \cdot 3000}{300} = \frac{8 \cdot 3000}{3}$ $= 8000$ thlr. und es verhält ſich $3000 : 8000 = 300 : 800$.

Es ſind alſo zuerſt 300 Wiſpl. unter dem Einkaufspreiſe, nämlich der Wiſpel zu $13\frac{1}{3}$ thlr., die übrigen 500 aber theuer, nämlich zu 30 thlr. verkauft worden.

Es kann f ſo angegeben werden, daß $y = 0$ wird, in welchem Falle der Theil der Waare, welcher zuerſt verkauft werden ſollte, als verdorben zu betrachten iſt. Es wird nämlich $y = 0$, wenn $2c - b = \frac{a(c-b)^2}{f}$ iſt. Dieſe Bedingung hängt theils ab, von dem Verhältniſſe des Einkaufspreiſes b zum Verkaufspreiſe c, theils von dem Verhältniſſe des Gewinnes f zu der Menge von Einheiten, in denen die ganze Waare gegeben iſt. Eins dieſer Verhältniſſe wird durch das andere beſtimmt. Es mag ſich alſo verhalten $b : c = 1 : p$ und $a : f = 1 : m$, ſo iſt $c = bp$ und $f = am$. Setzt man nun $2c - b = \frac{a(c-b)^2}{f}$ und ſtatt c und f die angenommenen Werthe, ſo kommt

$$2pb - b = \frac{a(pb-b)^2}{ma},$$

$$\text{oder } b(2p-1) = \frac{ab^2(p-1)^2}{ma}.$$

Auf beiden Seiten mit b dividirt, kommt

$$2p - 1 = \frac{ab(p-1)^2}{ma}.$$

Alſo $ma(2p-1) = ab(p-1)^2$.

Mit a dividirt, kommt

$$m(2p-1) = b(p-1)^2,$$

$$\text{folglich} \qquad m = \frac{b(p-1)^2}{2p-1}.$$

Hat man alſo den Verkaufspreis c willkührlich angenommen, ſo muß die Zahl m, welche angibt, wie viel mal f gröſſer

größer sein muß, als die Waare, $= \frac{b(p-1)^2}{2p-1}$ sein, im Fall nämlich $y = 0$ werden soll. Ist m nicht dieser Zahl gleich, also entweder größer oder kleiner, so muß y entweder positiv oder negativ werden. Ist m größer, so ist $f = ma$ größer als $\frac{ab(p-1)^2}{2p-1}$ und y muß positiv werden, weil alsdann der Bruch $\frac{a(e-b)^2}{f}$ kleiner ist als $2e-b$. Ist aber m kleiner, so ist $f = ma$ auch kleiner als $\frac{ab(p-1)^2}{2p-1}$ und folglich der Bruch $\frac{a(e-b)^2}{f}$ größer, als $2e-b$ und daher y negativ, folglich die Aufgabe praktisch ohne Sinn.

Die Preise e und b müssen immer so bestimmt werden, daß sie Preise der Einheit sind, welche der Angabe der Waare zum Grunde liegt. Ist die Waare in Zentner, Pfunde, Wispel, Scheffel u. s. w. gegeben, so müssen auch e und b die Preise von Zentner, Pfunde, Wispel und Scheffel sein. Sind sie als Preise kleinerer oder größerer Einheiten gegeben, so müssen sie erst in die Preise der Einheiten verwandelt werden, in welchen die Waare gegeben ist.

Wir wollen nun zu allen 3 Fällen für y Beispiele anführen.

1) Beispiel, wo $y = 0$ wird.

Es kauft jemand 300 Ztn. Kaffee, das Pfund für 8 gr., verkauft davon einen Theil für einen gewissen Preis, das übrige das Pfund für 12 gr., gewinnt 1375 thlr., hätte aber so vielmal mehr gewonnen, als die ganze Waare den zuerst verkauften Theil übertrifft, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel hat er zuerst und wie theuer verkauft?

Der Gewinn f ist in diesem Exempel $= 1375$ thlr. angegeben. Soll also $y = 0$ werden, so muß $m = \frac{f}{a} = \frac{1375}{300} = \frac{11}{12} = \frac{b(p-1)^2}{2p-1}$ sein.

Es ist aber $b = \frac{1}{3}$ thlr. pro Pfund, also $36\frac{2}{3}$ thlr. pro Zentner und $e = \frac{1}{2}$ thlr. pro Pfund, also 55 thlr. pro Zentner und daher $\frac{e}{b} = p = \frac{55}{\frac{110}{3}} = 55 \cdot \frac{3}{110} = \frac{3}{2}$. Also ist

$$\frac{(p-1)^2}{2p-1} = \frac{\frac{110}{3}(\frac{3}{2}-1)^2}{2\cdot\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{110}{3}\cdot\frac{1}{4}}{2} = \frac{110}{24} = \frac{55}{12},$$

so hat m seinen richtigen Werth und y muß $= 0$ werden.

Denn es ist nun $2e - b - \frac{a(e-b)^2}{f} = y = 110 - 36\frac{4}{7}$
$- \frac{300.(18\frac{1}{2})^2}{1375} = 73\frac{1}{3} - \frac{300.55.55}{9.375} = 73\frac{1}{3} - \frac{300.55}{9.25}$
$= 73\frac{1}{3} - \frac{60.11}{9} = 73\frac{1}{3} - \frac{20.11}{3} = 73\frac{1}{3} - 73\frac{1}{3} = 0.$

Da $x = \frac{f}{e-b} = \frac{1375}{55-36\frac{2}{7}} = \frac{1575}{18\frac{1}{7}} = \frac{1375.3}{55}$
$= 25.3 = 75$ Ztn. ist, so beträgt die Ausgabe für 300 Ztn. 11000 thlr., die Einnahme für die übrigen 225 Ztn. aber 12375 thlr., also Gewinn = 1375 thlr., folglich kann er für die 75 Ztn. nichts bekommen haben und daher muß y = 0 sein.

2) Beispiel, wo y einen positiven Werth bekommt.

Es kauft jemand 400 Ztn. Kaffee, das Pfund für 6gr., verkauft einen Theil für einen gewissen Preis, das Übrige zu 10 gr., gewinnt 5000 thlr., würde aber so vielmal mehr gewonnen haben, als der erste Theil von der ganzen Waare übertroffen wird, wenn er alles zu dem letztern Preise verkauft hätte. Wie viel hat er zuerst verkauft und wie theuer?

In diesem Exempel ist $b = \frac{1}{4}$ thlr. pro Pfund, also $27\frac{1}{2}$ thlr. pro Zentner und $e = \frac{5}{12}$ thlr. pro Pfund, also $45\frac{5}{6}$ thlr. pro Zentner, also $p = \frac{e}{b} = \frac{\frac{275}{6}}{\frac{55}{2}} = \frac{275}{6}.\frac{2}{55}$
$= \frac{5}{3}$. Es ist ferner $m = \frac{f}{a} = \frac{5000}{400} = 12\frac{1}{2}$. Aber m auch $= \frac{b(p-1)^2}{2p-1} = \frac{\frac{55}{2}(\frac{5}{3}-1)^2}{2.\frac{5}{3}-1} = \frac{\frac{55}{2}.\frac{4}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{55}{2}.\frac{4}{9}.\frac{3}{7}$
$= \frac{55.2}{3.7} = \frac{110}{21} = 5\frac{5}{21}$. Dies ist also kleiner als $12\frac{1}{2}$, folglich muß y positiv werden.

Es ist aber $y = 2e - b - \frac{a(e-b)^2}{f} = 2.45\frac{5}{6} - 27\frac{1}{2}$
$- \frac{400.(45\frac{5}{6}-27\frac{1}{2})^2}{5000} = 91\frac{2}{3} - 27\frac{1}{2} - \frac{400.(18\frac{1}{2})^2}{5000} = 64\frac{1}{6}$
$- \frac{400.(\frac{55}{3})^2}{5000} = 64\frac{1}{6} - \frac{4.55.55}{9.50} = 64\frac{1}{6} - \frac{4.11.11}{9.2} =$
$64\frac{1}{6} - \frac{242}{9} = 64\frac{1}{6} - 26\frac{8}{9} = 37\frac{15}{18}$ thlr.

x ist $= \frac{5000}{45\frac{5}{6} - 27\frac{1}{2}} = \frac{5000}{18\frac{1}{3}} = \frac{5000.3}{55} = 272\frac{8}{11}$ Ztn.

Die Ausgabe bei diesem Handel war 11000 thlr., die Einnahme für die ersten 275 Ztn. = $10166\frac{2}{3}$ thlr., die Einnahme für die übrigen $127\frac{3}{11}$ Ztn. = $5833\frac{1}{3}$ thlr., also die ganze Einnahme = 16000 thlr., folglich 5000 thlr. Gewinn. Der mögliche Gewinn aber wäre $7333\frac{1}{3}$ thlr. gewesen und dieser

ist so vielmal größer als 5000 thlr., so vielmal 400 größer ist als 275, denn es verhält sich $272\frac{8}{11} : 400 = 5000 : 7333\frac{1}{3}$.

3) Beispiel, wo y negativ kommt.

Es kauft jemand 600 Wspl., den Scheffel für 20 gr., verkauft einen Theil für einen gewissen Preis, vom Übrigen den Scheffel für 1 thlr. 8 gr., gewinnt 1800 thlr., hätte aber, wenn alles für den letztern Preis verkauft worden wäre, so vielmal mehr gewonnen, als die ganze Waare größer ist, wie der zuerst verkaufte Theil. Wie viel beträgt dieser Theil und wie theuer wurde er eingekauft?

Es ist also $b = 20$ gr. pro Scheffel, also 20 thlr. pro Wispel und $e = 1$ thlr. 8 gr. pro Scheffel, also 32 thlr. pro Wispel und da $\frac{e}{b} = p$, so ist $p = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$. Ferner $\frac{f}{a} = m = \frac{1800}{600} = 3$; dies muß, wenn $y = 0$ werden soll, $= \frac{b(p-1)^2}{2p-1}$ sein, aber $\frac{b(p-1)^2}{2p-1} = \frac{20.(\frac{8}{5}-1)^2}{2.\frac{8}{5}-1} = \frac{20.(\frac{8}{5})^2}{\frac{16}{5}-1} = \frac{20.\frac{9}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{4.9}{\frac{11}{5}} = \frac{36}{11} = 3\frac{3}{11}$. Also ist m kleiner als $\frac{b(p-1)^2}{2p-1}$, folglich wird y negativ.

Es ist $x = \frac{1800}{32-20} = \frac{1800}{12} = 150$ Wspl. $y = 2.32 - 20 - \frac{600(32-20)^2}{1800} = 64 - 20 - \frac{600.12^2}{1800} = 44 - \frac{12.12}{3} = 44 - 48 = -4$ thlr.

Die Ausgabe für 600 Wspl. ist also 12000 thlr., die erste Quasieinnahme $= -600$ thlr., die Einnahme für den Rest $= 14400$ thlr., also die ganze Einnahme $= 13800$ thlr. und folglich der Gewinn 1800 thlr. Die mögliche Einnahme ist 19200 thlr., also der mögliche Gewinn 7200 thlr. und es verhält sich $150 : 600 = 1800 : 7200$.

Man könnte sich etwa denken: dem Käufer wären die 150 Wspl. verdorben, er hätte also gar nichts dafür eingenommen und zur Strafe hätte er noch 600 thlr. bezahlen müssen. Beim Verkaufe des Restes gewann er nun eigentlich 2400 thlr., da aber jene 600 thlr. abgingen, so hat er wirklich nur 600 thlr. gewonnen.

33) Es kauft jemand 500 Ztn., das Pfund für 6 gr., verkauft davon einen Theil das Pfund für 8 gr., vom Übrigen

das Pfund für 9 gr., wie theuer verkauft er vom ersten Theile das Pfund und wie viel gewinnt er, wenn, alles für den letztern Preis verkauft, der mögliche Gewinn den wirklichen so vielmal übertroffen hätte, als der Rest den ersten Theil übertrifft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
a	b	x	d	a—x	e	y	zy

Da sich der mögliche Gewinn zum wirklichen verhalten soll, wie der Rest der Waare zum ersten Theile, so wird zy durch die Proportion bestimmt: $x : a-x = y : zy$, also $zy = \frac{ay-xy}{x}$, folglich $z = \frac{a-x}{x}$. Es ergeben sich nun die Gleichungen:

Erste Gleichung.

$$ab + \frac{a-x}{x}y = ae,$$

also $abx + ay - xy = aex.$
Folglich $ay = aex - abx + xy,$
oder $ay = x[a(e-b)+y].$

Daher $$x = \frac{ay}{a(e-b)+y}.$$

Zweite Gleichung.

$$ab + y = xd + ae - xe.$$

Also $xe - xd = ae - ab - y,$
oder $x(e-d) = a(e-b) - y,$

folglich $$x = \frac{a(e-b)-y}{e-d}.$$

Dies gibt die Gleichung

$$\frac{a(e-b)-y}{e-d} = \frac{ay}{a(e-b)+y}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$a^2(e-b)^2 + a(e-b)y - a(e-b)y - y^2 = ay(e-d),$
also $a^2(e-b)^2 - y^2 = ay(e-d),$
folglich $a^2(e-b)^2 = y^2 + ay(e-d),$

eine quadratische Gleichung, die im zweiten Theile aufgelöst wird.

34) Von einer Partie Tuch kostet die Elle $1\frac{1}{2}$ thlr., davon werden 200 Ellen zu einem gewissen Preise verkauft, die übrigen zu 3 thlr. Wie viel Tuch war es und wie theuer wurde der

ste Theil verkauft, wenn man weiß, daß der wirkliche Gewinn vielmal kleiner ist als der mögliche, welcher 800 thlr. beträgt, vielmal der Einkaufspreis kleiner ist, als der Verkaufspreis r den ersten Theil der Waare?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	c	y	x—c	e	v	g

Nach der Angabe soll sich der mögliche Gewinn zum wirklichen verhalten, wie der Verkaufspreis des ersten Theils zum Einkaufspreise, also $g : v = y : b$, folglich $v = \frac{bg}{y}$.

Erste Gleichung.

$$xb + g = xe,$$

also $$g = x(e-b),$$

daher $$\frac{g}{e-b} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + \frac{bg}{y} = cy + xe - ce.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g - \frac{bg}{y} = ce - cy,$$

folglich $$gy - bg = cey - cy^2,$$

oder $$cy^2 - cey + gy = bg,$$

oder $$cy^2 - y(ce-g) = bg.$$

Die Gleichung ist also quadratisch und wird im zweiten Theile vollends aufgelöst.

35) Es kauft jemand Getreide, den Wispel zu 30 thlr., verkauft einen Theil für einen gewissen Preis, die übrigen 300 Wspl. den Wispel für 40 thlr. Der mögliche Gewinn übertrifft den wirklichen so vielmal, als der Verkaufspreis des ersten Theiles den Einkaufspreis, und das Verhältniß des ersten Theils zur ganzen Waare ist zusammengesetzt aus dem Verhältnisse des Einkaufspreises zum Verkaufspreise für den ersten Theil der Waare und des Einkaufspreises zum Verkaufspreise des Restes. Wie viel wurde zuerst verkauft und wie theuer? wie viel wurde wirklich und möglicher Weise gewonnen?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
$r+x$	b	x	y	r	e	v	w

Nach der Angabe soll sich verhalten

$$w : v = y : b,$$

also $$w = \frac{vy}{b}.$$

Aber auch $$w = (r+x)e-(r+x)b,$$

oder $$w = (r+x)(e-b).$$

Also $$\frac{vy}{b} = (r+x)(e-b),$$

oder $$vy = b(r+x)(e-b),$$

daher $$v = \frac{b(r+x)(e-b)}{y}.$$

Ferner soll das Verhältniß des ersten Theils der Waare zur ganzen Waare zusammengesetzt sein aus dem Verhältnisse des Einkaufspreises zu jedem der beiden Verkaufspreise. Folglich nach §. 133. und 134.

$$x : r+x = b : y + b : e,$$

also $$x : r+x = b^2 : ye.$$

Folglich $$rb^2+xb^2 = xye,$$

daher $$rb^2 = xye-xb^2,$$

oder $$rb^2 = x(ye-b^2),$$

also $$\frac{rb^2}{ye-b^2} = x.$$

Man bilde nun die Gleichung zwischen der Ausgabe und der wirklichen Einnahme, so kommt

$$rb+xb+v = xy+re,$$

oder $$rb-re+v = xy-xb,$$

oder $$r(b-e)+v = x(y-b),$$

oder $$v-r(e-b) = x(y-b).$$

Statt v und x setze man die gefundenen Werthe, so kommt

$$\frac{b(r+x)(e-b)}{y} - r(e-b) = \frac{rb^2}{ye-b^2}(y-b).$$

Da in dem ersten Gliede linker Hand noch einmal x vorkommt, so setze man auch dafür den Werth, so kommt

$$\frac{b\left(r+\frac{rb^2}{ye-b^2}\right)(e-b)}{y} - r(e-b) = \frac{rb^2}{ye-b^2}(y-b).$$

Richtet

Richtet man nun im ersten Gliede linker Hand den Bruch ein, so kommt

$$\frac{b(rye-rb^2+rb^2)(e-b)}{y(ye-b^2)}-r(e-b)=\frac{rb^2(y-b)}{ye-b^2}.$$

In der Klammer linker Hand $-rb^2$ und $+rb^2$ gehoben, kommt

$$\frac{brye(e-b)}{y(ye-b^2)}-r(e-b)=\frac{rb^2(y-b)}{ye-b^2},$$

oder $$\frac{bre(e-b)}{ye-b^2}-r(e-b)=\frac{rb^2(y-b)}{ye-b^2}.$$

Alles auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$bre(e-b)-r(e-b)(ye-b^2)=rb^2(y-b).$$

Löst man die Klammern durch wirkliche Multiplikation auf, so kommt

$$bre^2-b^2re-(re-rb)(ye-b^2)=rb^2y-rb^3,$$

oder $$bre^2-b^2re-(rye^2-rbye-reb^2+rb^3)=rb^2y-rb^3,$$

oder $$bre^2-b^2re-rye^2+rbye+reb^2-rb^3=rb^2y-rb^3.$$

Es hebt sich $-b^2re$ mit $+reb^2$ und $-rb^3$ auf der linken mit $-rb^3$ auf der rechten Seite. Folglich kommt

$$bre^2-rye^2+rbye=rb^2y.$$

Man dividire durchgängig mit r und bringe alle Glieder mit y auf Eine Seite, so kommt

$$be^2=ye^2-bye+b^2y,$$

oder $$be^2=y(e^2-be+b^2),$$

oder $$be^2=y[e(e-b)+b^2],$$

also $$\frac{be^2}{e(e-b)+b^2}=y.$$

Es war $$x=\frac{rb^2}{ye-b^2}.$$

Setzt man nun statt y den gefundenen Werth, so kommt x in lauter bekannten Größen. Es ist also

$$x=\frac{rb^2}{\frac{be^2}{e(e-b)+b^2}e-b^2}.$$

Richtet man im Nenner den Bruch ein, so kommt

$$x=\frac{rb^2}{\frac{be^2-b^2e(e-b)-b^4}{e(e-b)+b^2}}=\frac{rb^2e(e-b)+rb^4}{be^2-b^2e(e-b)-b^4}.$$

Man hebe Zähler und Nenner mit b, so kommt

$$x=\frac{rbe(e-b)+rb^3}{e^2-be(e-b)-b^2}=\frac{rb[e(e-b)+b^2]}{e^2-b[b^2+e(e-b)]}$$

$$=\frac{r}{\frac{e^2}{b[b^2+e(e-b)]}-1}.$$

Im Exempel ist $b = 30$, $c = 40$, $r = 300$. Also

$$x = \frac{300}{\frac{64000}{30(900+40.10)} - 1} = \frac{300}{\frac{64000}{39000} - 1} = \frac{300}{\frac{64}{39} - 1}$$

$$= \frac{300}{1\frac{25}{39} - 1} = \frac{300}{\frac{25}{39}} = \frac{300.39}{25} = 468.$$

$$y = \frac{30.40^2}{40.10+30^2} = \frac{30.1600}{400+900} = \frac{30.1600}{1300} = \frac{30.16}{13}$$

$$= \frac{480}{13} = 36\frac{12}{13} \text{ thlr.}$$

Da $r = 300$ und $x = 468$ ist, so beträgt das ganze Getreide $300+468 = 768$ Wspl. Der Wispel wurde zu 30 thlr. eingekauft, folglich war die Ausgabe $= 23040$ thlr. Es wurden zuerst 468 Wspl. zu $36\frac{12}{13}$ thlr. verkauft, die Einnahme ist also 17280 thlr. Die übrigen 300 Wspl. wurden zu 40 thlr. verkauft, also die Einnahme $= 12000$ thlr., folglich ganze Einnahme $= 29280$ thlr., daher der wirkliche Gewinn $= 6240$ thlr. Die mögliche Einnahme wäre 30720 thlr., also der mögliche Gewinn $= 7680$ thlr. gewesen. Diese Zahlen haben nun die angegebenen Verhältnisse, denn $7680 : 6240 = 36\frac{12}{13} : 30$, weil $30.7680 = 6240.36\frac{12}{13}$ ist, und

$$468 : 768 = 30 : 36\tfrac{12}{13} + 30 : 40$$
$$= 900 : \tfrac{480}{13}.40$$
$$= 11700 : 19200$$
$$= 117 : 192.$$

Hebt man nämlich das Verhältniß 468 : 768 mit 4, so kommt gerade 117 : 192 heraus.

Hätte man in diesem Exempel den ersten Theil der Waare als bekannt angenommen, so würden die Bestimmungen für x und y noch etwas bequemer zu entwickeln geworden sein. Man nehme also folgende allgemeine Bezeichnung

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirklicher Gewinn.	Möglicher Gewinn.
x	b	c	y	x — c	e	v	w

Da sich verhalten soll

$$c : x = b : y + b : e$$
$$= b^2 : ye,$$

so ist $x = \frac{cye}{b^2}$,

und weil $w : v = y : b$ und $w = x(e-b)$ ist, so hat man

$x(e-b) : v = y : b$, also $v = \frac{xb(e-b)}{y}$. Setzt man für x obigen Werth, so kommt

$$v = \frac{cyeb(e-b)}{b^2y},$$

$$\text{also} \quad v = \frac{ce(e-b)}{b}.$$

Nun war $w = x(e-b)$, also wird die Proportion $v : w = b : y$ verwandelt in

$$\frac{ce(e-b)}{b} : x(e-b) = b : y.$$

Dividirt man die ersten beiden Glieder mit $e-b$, so kommt

$$\frac{ce}{b} : x = b : y,$$

$$\text{also} \quad y = \frac{bx}{\frac{ce}{b}} = bx \cdot \frac{b}{ce} = \frac{b^2x}{ce}.$$

Man bilde nun die Gleichung zwischen der Ausgabe und wirklichen Einnahme, so kommt

$$xb + v = cy + xe - ce.$$

Statt v und y den Werth gesetzt, kommt

$$xb + \frac{ce(e-b)}{b} = \frac{cb^2x}{ce} + xe - ce,$$

$$\text{oder} \quad xb + \frac{ce(e-b)}{b} = \frac{b^2x}{e} + xe - ce.$$

Und auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$xb^2e + ce^2(e-b) = b^3x + xbe^2 - ce^2b,$$

$$\text{oder} \quad xb^2e + ce^3 - ce^2b = b^3x + be^2x - ce^2b,$$

und da sich $-ce^2b$ auf beiden Seiten hebt, so kommt

$$ce^3 = b^3x + be^2x - xb^2e,$$

$$\text{oder} \quad ce^3 = xb(b^2 + e^2 - be),$$

$$\text{daher} \quad \frac{ce^3}{b(b^2+e(e-b)} = x.$$

Es war aber $y = \frac{b^2x}{ce}$, folglich statt x den Werth gesetzt, kommt

$$y = \frac{b^2ce^3}{bce(b^2+e(e-b)} = \frac{be^2}{b^2+e(e-b)}.$$

Ist $c = 468$, $b = 30$, $e = 40$, so ist

$$x = \frac{468 \cdot 64000}{30(900+40 \cdot 10)} = \frac{468 \cdot 64000}{30 \cdot 1300} = \frac{468 \cdot 64}{3 \cdot 13} = \frac{36 \cdot 64}{3}$$

$$= 12 \cdot 64 = 768 \text{ Wspl.}$$

$$y = \frac{30 \cdot 1600}{900+40 \cdot 10} = \frac{48000}{1300} = \frac{480}{13} = 36\frac{12}{13} \text{ thlr.,}$$

wie oben.

36) Es kauft jemand eine Partie Tuch, die Elle zu 2 thlr., davon verkauft er einen Theil für einen gewissen Preis, die übrigen 600 Ellen zu 3 thlr. Wie viel Ellen verkaufte er zuerst und wie theuer, wenn sich der mögliche Gewinn zum wirklichen wie der Preis für den Rest zum Preise für den ersten Theil und die ganze Waare zum ersten Theile, wie der Preis für den ersten Theil zum Einkaufspreise verhält?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufs-preis.	Theil der Waare.	Verkaufs-preis.	Rest der Waare.	Verkaufs-preis.	Wirklicher Gewinn.	Mögliche Gewinn.
r+x	b	x	y	r	e	v	w

Es verhält sich $w : v = e : y$,

also $w = \frac{ve}{y}$,

aber auch $w = (r+x)e-(r+x)b$
$= (r+x)(e-b)$,

also $\frac{ve}{y} = (r+x)(e-b)$,

daher $ve = y(r+x)(e-b)$,

also $v = \frac{y(r+x)(e-b)}{e}$.

Ferner soll sich verhalten

$r+x : x = y : b$,

also $(r+x)b = xy$,

und daher $\frac{(r+x)b}{x} = y$.

Statt y in der Formel für v diesen Werth gesetzt, kommt

$$v = \frac{(r+x)b(r+x)(e-b)}{ex} = \frac{b(e-b)(r+x)^2}{ex}.$$

Man bilde nun die Gleichung zwischen der Ausgabe und wirklichen Einnahme, nämlich $(r+x)b+v = xy+re$ und setze statt v und y die gefundenen Werthe, so kommt

$$(r+x)b+\frac{b(e-b)(r+x)^2}{ex} = \frac{x(r+x)b}{x}+re.$$

Oder

$$(r+x)b+\frac{b(e-b)(r+x)^2}{ex} = (r+x)b+re.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$(r+x)bex+b(e-b)(r+x)^2 = (r+x)bex+re^2x.$$

Es hebt sich auf beiden Seiten $(r+x)bex$, also kommt

$$b(e-b)(r+x)^2 = re^2x,$$

oder $b(e-b)(r^2+2rx+x^2) = re^2x,$

oder $br^2(e-b)+2br(e-b)x+b(e-b)x^2 = re^2x,$

also $br^2(e-b) = -b(e-b)x^2+rx(e^2-2b(e-b).$

Die weitere Auflösung dieser quadratischen Gleichung siehe im zweiten Theile.

§. 286.

Zur Übung mögen noch folgende Beispiele dienen, die wir ohne Ordnung, wie sie der Zufall an die Hand gibt, hier beifügen und deren Auflösung wir dem eigenen Nachdenken überlassen wollen.

1) Es kauft jemand 120 Ztn., das Pfund für 7 gr., verkauft davon 40 Ztn., das Pfund für 9 gr., das Übrige theurer, wie viel gewinnt er, wenn man weiß, daß der mögliche Gewinn $\frac{1}{4}$ mal größer ist, als der wirkliche, und wie theuer hat er den Rest verkauft?

2) Es kauft jemand 400 Ztn., das Pfund für 5 gr. 4 pf., verkauft davon 150 Ztn. für einen gewissen Preis, vom Übrigen das Pfund zu 9 gr. Wie theuer verkauft er den ersten Theil und wie viel gewinnt er, wenn dieser wirkliche Gewinn $\frac{3}{5}$ mal so groß ist, als der mögliche?

3) Es kauft jemand Zucker, das Pfund zu 6 gr., verkauft davon 100 Ztn. zu einem gewissen Preise, vom Übrigen das Pfund für 12 gr. Wie viel hat er eingekauft und wie theuer den ersten Theil verkauft, wenn man weiß, daß sich der wirkliche Gewinn zum möglichen verhält, wie der Einkaufspreis zum Verkaufspreise des ersten Theils, und daß dieser erste Theil sich zur ganzen Waare verhält, wie der Einkaufspreis zum Verkaufspreise des ersten Theils und wie der Einkaufspreis zum Verkaufspreise des Restes?

4) Es kauft jemand Getreide, den Scheffel für 21 gr., verkauft davon 100 Wspl. den Scheffel für 1 thlr. 6 gr., das Übrige zu 1 thlr. 9 gr. Wie viel Getreide hat er gekauft und wie viel gewonnen, wenn man weiß, daß der mögliche Gewinn $1\frac{1}{2}$ mal größer ist, als der wirkliche?

5) Es kauft jemand 360 Wspl., den Scheffel für $1\frac{1}{2}$ thlr., verkauft 90 Wspl. zu $1\frac{1}{2}$ thlr., das Übrige so, daß er 3060 thlr. gewinnt. Wie theuer also der Scheffel vom Reste und wie viel hätte er gewonnen, wenn er alles Getreide für den Preis des Restes verkauft hätte?

6) Es kauft jemand 900 Ztn., das Pfund zu 5 gr. 4 pf., verkauft davon 200 Ztn. zu einem gewissen Preise, und den Rest $1\frac{1}{3}$ mal theurer, so daß $9166\frac{2}{3}$ thlr. gewonnen werden. Wie viel beträgt der mögliche Gewinn und wie theuer hat er den ersten Theil der Waare verkauft?

7) Es kauft jemand das Pfund für 6 gr., verkauft 50 Ztn. für einen gewissen Preis, den Rest $1\frac{1}{8}$ mal theurer, gewinnt so $2520\frac{5}{8}$ thlr. und hätte 2750 thlr. gewonnen, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Zentner hat er gekauft und wie theuer den ersten Theil verkauft?

8) Es hat jemand 400 Wspl. gekauft, verkauft davon 100 Wspl. zu einem gewissen Preise, das Übrige $\frac{1}{4}$ mal theurer, gewinnt 4000 thlr. und hätte 6000 thlr. gewonnen, wenn alles für den letztern Preis wäre verkauft worden. Wie theuer hat er eingekauft und den ersten Theil verkauft?

9) Es kauft jemand 432 Ellen Tuch, verkauft davon 96 Ellen, die Elle zu $2\frac{3}{4}$ thlr., das Übrige zu $3\frac{1}{3}$ thlr. Wie theuer hat er eingekauft und wie viel gewonnen, wenn dieser wirkliche Gewinn $\frac{2}{5}$ mal kleiner ist, als der mögliche?

10) Es kauft jemand Kaffee, das Pfund für 5 gr., verkauft davon 50 Ztn. das Pfund für 8 gr., das Übrige für 9 gr. Wie viel Zentner hat er gekauft und wie viel beträgt der wirkliche Gewinn, wenn der mögliche $1\frac{1}{10}$ mal größer ist?

11) Es kauft jemand 560 Wspl., den Scheffel für $1\frac{1}{2}$ thlr., verkauft einen Theil, den Scheffel für $1\frac{1}{4}$ thlr., das Übrige zu $1\frac{1}{2}$ thlr. Wie viel beträgt der wirkliche Gewinn, wenn der mögliche $1\frac{1}{5}$ mal größer ist, und wie viel Wispel hat er zuerst verkauft?

12) Es kauft jemand 500 Anker Wein, den Anker zu 30 thlr., verkauft davon 150 Anker, den Anker zu 40 thlr., den übrigen so, daß sein wirklicher Gewinn nur $\frac{5}{8}$ mal kleiner ist, als der mögliche. Wie viel betragen diese Gewinne und wie theuer ist der Rest verkauft worden?

13) Es kauft jemand 400 Wspl. Getreide, den Scheffel für 21 gr., verkauft davon 150 Wspl. für einen gewissen Preis und das Übrige so, daß er 6000 thlr. gewinnt; er hätte aber 8000 thlr. gewonnen, wenn er alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel betragen die beiden Verkaufspreise?

14) Es kauft jemand Kaffee, verkauft davon einen Theil, das Pfund für 10 gr., die übrigen 300 Ztn., das Pfund für 12 gr., gewinnt so 6000 thlr.; hätte aber 8000 thlr. gewonnen, wenn alles für den letztern Preis verkauft worden wäre. Wie viel

Zentner sind gekauft und wie theuer ist das Pfund bezahlt worden?

15) Es kauft jemand Getreide, den Scheffel für $\frac{7}{8}$ thlr., verkauft einen Theil den Scheffel zu $\frac{5}{8}$ thlr., die übrigen 120 Wspl. aber den Scheffel zu $1\frac{1}{3}$ thlr. und gewinnt so 1000 thlr., wie viel beträgt der mögliche Gewinn und wie viel hat er zuerst verkauft?

16) Es kauft jemand Kaffee, das Pfund zu 4 gr., verkauft einen Theil das Pfund zu 6 gr., die übrigen 400 Ztn., das Pfund für 8 gr., wie viel wird gewonnen und wie viel ist zuerst verkauft worden, wenn der mögliche Gewinn 8000 thlr. beträgt?

17) Es kauft jemand 1000 Ztn. Zucker, das Pfund zu 5 gr., verkauft einen Theil unter dem Einkaufspreise, den Rest aber theurer, so daß er nur 100 thlr. verliert. Hätte er aber alles für den letztern Preis verkauft, so hätte er 2400 thlr. gewonnen. Wie viel hat er zuerst verkauft und wie theuer von dem ersten Theile und vom Reste das Pfund bezahlt bekommen, wenn man weiß, daß der Unterschied der beiden Verkaufspreise die Hälfte vom Einkaufspreise beträgt?

18) Es kauft jemand Kaffee, das Pfund zu 6 gr., verkauft davon einen Theil zu einem gewissen Preise, die übrigen 800 Ztn. aber, das Pfund zu 9 gr., gewinnt so $10083\frac{1}{3}$ thlr., hätte aber 13750 thlr. gewonnen, wenn er alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel hat er zuerst verkauft und zu welchem Preise?

Berichtigungen.

Seite	Zeile	
30	5 v. u. l.	nach 60mr noch $-18qr+60qm-24qp$.
229	10 v. o. l.	Progression st. Proportion.
258	19 v. u. l.	3 Uhr st. 2 Uhr.
368	11 v. o. l.	$1\frac{1}{2}$ st. $\frac{1}{2}$.
375	9 v. u. l.	$+umpqx^2$ st. $+umppx^2$.
406	2 v. o. l.	Pfund st. Pund.
414	8 v. u. l.	gewonnen st. gewonen.